ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1186–1192

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

О ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. А. Я. Янченко

Исследованы целые решения (решения, являющиеся целыми функциями) для алгебраических дифференциальных уравнений вида $P(y, y^{(n)}) + Q(z, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (где P, Q – многочлены с комплексными коэффициентами, причём степень Q меньше, чем степень P). Показано, что (при некоторых ограничениях на многочлен P) все целые трансцендентные решения таких уравнений являются квазимногочленами.

DOI: 10.31857/S0374064122090023, EDN: CHOUZA

1. Исторический обзор. Формулировка основной теоремы. Одной из задач теории алгебраических дифференциальных уравнений в комплексной области является задача описания их целых решений. Получено довольно много результатов для линейных (по y, y', $\ldots$ $\ldots$, $y^{(n)}$) уравнений. Что же касается нелинейного случая, то почти все полученные результаты относятся к конкретным уравнениям, например, хорошо изучены уравнения Пенлеве (см. [1, с. 78]). Имеющиеся к настоящему времени результаты, относящиеся к более или менее общим классам нелинейных алгебраических дифференциальных уравнений (помимо классических теорем Брио–Буке–Эрмита и Пикара, описывающих, в частности, целые решения уравнений вида $P(y, y') = 0$ и $P(y, y'') = 0$), рассматривают в основном достаточно специфические целые решения таких уравнений – многочлены или целые функции, имеющие конечное число нулей (с такими результатами можно ознакомиться, например, в монографии [2]).

В последние годы автором данной статьи разработана некоторая техника, с помощью которой удалось получить для некоторого класса нелинейных алгебраических дифференциальных уравнений (т.н. уравнений с выделенной линейной частью) описание их целых решений конечного порядка [3, 4].

В данной работе использование этой техники совместно с применением теории максимального члена Вимана–Валерона позволило описать все целые решения уже другого общего класса нелинейных уравнений, при этом на возможные целые решения изначально не накладывается условие конечности их порядка.

Через $\mathbb{C}[\omega_1, \ldots, \omega_n]$ будем обозначать кольцо многочленов от переменных ω_1, $\ldots$, ω_n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – целая функция, то положим (при всяком $R > 0$) $M_f(R) = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$; порядок ρ целой функции $f(z)$ определяется равенством

$$\rho = \varlimsup_{R\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(R)}{\ln R},$$

при этом если $\rho < +\infty$, то говорят, что $f(z)$ – *функция конечного порядка*. Если целая функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, то при всяком $R > 0$ максимальный член $m_f(R)$ определяется равенством $m_f(R) = \max\limits_k |a_k| R^k$; центральный индекс $\nu_f(R)$ определяется как наибольшее значение k_0, при котором $m_f(R) = |a_{k_0}| R^{k_0}$ (см., например, [5, с. 11; 6, с. 10]).

Основной результат работы – установление справедливости следующей теоремы.

Теорема. *Пусть n, d – натуральные числа и $P \in \mathbb{C}[z, \omega_0, \ldots, \omega_n]$, $P = \sum_{l=0}^{d} P_l$, где при всяком $l = \overline{0, d}$ P_l – однородный многочлен (по совокупности переменных ω_0, $\ldots$, ω_n) степени l. При этом $P_d = \prod_{j=1}^{d} (\omega_n - \alpha_j \omega_0)$, где α_1, $\ldots$, α_d – различные комплексные числа.*

Пусть $y = f(z)$ *– целая функция, являющаяся решением дифференциального уравнения* $P(z, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. *Тогда найдутся натуральное* N, *комплексные числа* $\beta_1, \ \ldots, \ \beta_N$ *и многочлены* $q_1(z), \ldots, q_N(z) \in \mathbb{C}[z]$ *такие, что*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} q_j(z) e^{\beta_j z}.$$

Несложно привести примеры дифференциальных уравнений, описанных в теореме. Таким является уравнение

$$(y^{(4)})^2 - y^2 - zy^{(3)} - zy = 0$$

(с целым решением $y = e^z - z$).

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $f(z)$ *– целая функция. Тогда существует измеримое множество* $E_f \subset \subset [0; +\infty)$ *такое, что:*

а) $\int_{E_f} (1/r)\, dr < +\infty$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ *найдётся число* $R_0 \equiv R_0(\varepsilon) > 0$ *такое, что при всех* $R > R_0$, $R \notin E_f$, *справедливы оценки*

$$M_f(R) < m_f(R)(\ln m_f(R))^{\varepsilon + 1/2}, \quad \nu_f(R) < \ln(m_f(R))^{1+\varepsilon}.$$

Лемма 1 является следствием теоремы Вимана–Валерона [5, с. 22, оценки (5), (6)].

Замечание. Множество E_f из условий леммы 1 будем далее называть *исключительным множеством* функции f.

Лемма 2. *Пусть* $f(z)$ *– целая функция,* E_f *– её исключительное множество. Пусть при любом* $R > 0$ ξ_r *– такая точка, что* $|\xi_R| = R$ *и* $|f(\xi_R)| = M_f(R)$. *Пусть* j *– натуральное число. Тогда для любого* $\delta \in (0; 1/4)$ *найдётся постоянная* γ_1, *не зависящая от* R, *такая, что при каждом* $R > 0$, $R \notin E_f$, *следует*

$$f^{(j)}(\xi_R) = \left(\frac{\nu_f(R)}{\xi_R}\right)^j f(\xi_R)(1 + \eta_j(\xi_R)),$$

где $|\eta_j(\xi_R)| \leqslant \gamma_1 (\nu_f(R))^{\delta - 1/4}$.

Лемма 2 доказывается, например, в [5, с. 25, соотношение (8)].

Лемма 3. *Пусть* $f(z)$ *– целая трансцендентная функция,* E_f *– её исключительное множество. Пусть существуют постоянные (не зависящие от* R*)* $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ *такие, что при всех* $R \notin E_f$ *справедлива оценка*

$$\nu_f(R) \leqslant \gamma_1 R^{\gamma_2}.$$

Тогда $f(z)$ *– целая функция конечного порядка.*

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$. Так как $f(z)$ – целая функция, то $\max\limits_k |C_k| \leqslant C$ при некотором $C \in \mathbb{R}$. Отсюда в силу определения $m_f(R)$ имеем оценку $m_f(R) \leqslant C R^{\nu_f(R)}$.

Применим лемму 1, выбрав число $\varepsilon = 1/2$. Тогда найдётся $R_0 > 0$ такое, что при любом $R > R_0$, $R \notin E_f$, выполняются неравенства

$$M_f(R) \leqslant (C R^{\nu_f(R)}) \ln(C R^{\nu_f(R)}) \leqslant (C R^{\nu_f(R)})^2 \leqslant C^2 R^{2\gamma_1 R^{\gamma_2}}.$$

Поэтому найдутся постоянные $\gamma_3, \gamma_4 > 0$ такие, что при любом $R \notin E_f$ справедлива оценка

$$M_f(R) \leqslant e^{\gamma_3 R^{\gamma_4}}.$$

Далее, из свойств исключительного множества E_f следует, что найдётся постоянная $\gamma_5 > 0$ такая, что $\int_{E_f}(1/r)\,dr < \gamma_5$. Пусть $R > e^{\gamma_5}+1$. Покажем, что существует хотя бы одна точка $A \in [R, R^2]$, не лежащая в E_f. Если бы это было не так, то из оценок

$$\gamma_5 \geqslant \int\limits_{E_f} \frac{dr}{r} \geqslant \int\limits_{R}^{R^2} \frac{dr}{r} = \ln R$$

получили бы противоречие с оценкой $R > e^{\gamma_5}+1$. Тогда справедливы неравенства

$$M_f(R) \leqslant M_f(A) \leqslant \exp(\gamma_3 A^{\gamma_4}) \leqslant \exp(\gamma_3 R^{2\gamma_4})$$

при любом $R > e^{\gamma_5}+1$, что означает конечность порядка функции $f(z)$. Таким образом, лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть n, d – натуральные числа, $P \in \mathbb{C}[z, \omega_0, \ldots, \omega_n]$ и $P = \sum_{l=1}^{d} P_l$, где:*

а) при всяком l P_l – однородный многочлен степени l по совокупности переменных $\omega_0, \ldots, \omega_n$;

б) $P_d = \prod_{j=1}^{d}(\omega_n - \alpha_j\omega_0)$, $\{\alpha_j\} \in \mathbb{C}$.

Пусть $y = f(z)$ – целая трансцендентная функция, удовлетворяющая уравнению

$$P(z, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Тогда $f(z)$ – функция конечного порядка.

Доказательство. При всяком R, не лежащем в исключительном множестве E_f, выберем какую-либо точку ξ_R с условием $M_f(R) = |f(\xi_R)|$. Предположим, что существует бесконечная числовая последовательность $R_k \notin E_f$ такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} R_k = +\infty$, и при любом k

$$\nu_f(R_k) > R_k^2.$$

Применив лемму 2 (со значением $\delta = 1/8$), найдём, что существует $R_0 > 0$ такое, что при всяком $R_k > R_0$ и при любом $j = \overline{1,n}$ справедливы оценки

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\right)^j \leqslant \left|\frac{f^{(j)}(\xi_{R_k})}{f(\xi_{R_k})}\right| \leqslant 2\left(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\right)^j. \tag{1}$$

Пусть далее $R_k > R_0$. Рассмотрим равенство

$$P(\xi_{R_k}, f(\xi_{R_k}), \ldots, f^{(n)}(\xi_{R_k})) = 0,$$

равносильное равенству $I_1 = I_2$, где

$$I_1 = (f(\xi_{R_k}))^d \prod_{j=1}^{d}\left(\frac{f^{(n)}(\xi_{R_k})}{f(\xi_{R_k})} - \alpha_j\right), \quad I_2 = \sum_{l=1}^{d-1} P_l\left(\xi_{R_k}, 1, \ldots, \frac{f^{(n)}(\xi_{R_k})}{f(\xi_{R_k})}\right) f^l(\xi_{R_k}).$$

Учитывая оценки (1) и то, что $\nu_f(R_k) > R_k^2$, получаем при достаточно большом R_k

$$|I_1| \geqslant |f(\xi_{R_k})|^d \prod_{j=1}^{d}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\right)^n - |\alpha_j|\right) \geqslant \gamma_1 |f(\xi_{R_k})|^d \left(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\right)^{nd}$$

для некоторой постоянной $\gamma_1 > 0$. Аналогично можно показать, что

$$|I_2| \leqslant (d-1)HR^m\left(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\right)^{n(d-1)} \leqslant \gamma_2 R^{\gamma_3}|f(\xi_{R_k})|^{d-1}\left(\frac{\nu_f(R_k)}{R_k}\right)^{n(d-1)},$$

здесь H – сумма модулей всех коэффициентов всех многочленов $P_1, \ldots, P_{d-1}$; m – максимальная степень по переменной z у всех многочленов $P_1, \ldots, P_{d-1}$; $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$ – постоянные, не зависящие от R_k.

Отсюда, учитывая, что $|I_1| = |I_2|$, найдём

$$|\nu_f(R_k)| \leqslant \gamma_4 R_k^{1+\gamma_3/n} \frac{1}{|f(\xi_{R_k})|}. \tag{2}$$

Так как $f(z)$ – трансцендентная функция, то правая часть в неравенстве (2) стремится к нулю при $R_k \to +\infty$, откуда следует, что и $\nu_f(R_k) \to 0$ при $k \to +\infty$, что противоречит оценкам (1). Но тогда найдётся постоянная $\gamma_5 > 0$, не зависящая от R, такая, что при всех $R \notin E_f$ следует неравенство $\nu_f(R) \leqslant \gamma_5 R^2$, откуда в силу леммы 3 заключаем, что $f(z)$ – функция конечного порядка. Лемма 4 полностью доказана.

Лемма 5 ([3], лемма 3). *Пусть $h(z)$ – целая функция конечного порядка не выше ρ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $R_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что справедливо следующее утверждение: при любых $R > R_0$ и $H > 0$ в кольце $C_R = \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\}$ можно выбрать конечное множество B_R кругов с суммой радиусов не более $2H$ таким образом, что при любом $z \in C_R \setminus B_R$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \leqslant \delta\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1} + \frac{R^{\rho+\varepsilon}}{H}\right). \tag{3}$$

Следствие 1. *Пусть $\varphi(z)$ – целая функция конечного порядка не выше ρ. Тогда при всяком $j \in \mathbb{N}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа R_j и σ_j такие, что справедливо утверждение: при любых $R > R_j$ и $H > 0$ в кольце $C_R = \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\}$ можно выбрать конечное множество $B_{j,R}$ кругов с суммой радиусов не более $2jH$ таким образом, что при всяком $z \in C_R \setminus B_{j,R}$ верна оценка*

$$\left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)}\right| \leqslant \sigma_j\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1} + \frac{R^{\rho+\varepsilon}}{H}\right)^j. \tag{4}$$

Доказательство. Отметим, что при любом $l \in \mathbb{N}$ $\varphi^{(l)}(z)$ – целая функция порядка не выше ρ (см., например, [6, гл. 1]). Применим лемму 5 к каждой из $\varphi^{(l)}(z)$ при всех $l = \overline{0, j-1}$.

Пусть $B_{j,R}$ – объединение совокупностей исключительных кругов при всех $l = \overline{0, j-1}$; $\delta_0, \ldots, \delta_{j-1}$ – соответствующие постоянные из неравенства (3). Тогда сумма радиусов всех кругов из $B_{j,R}$ не более чем $2jH$, и при всех $z \in C_R \setminus B_{j,R}$ выполняется оценка

$$\left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)}\right| = \left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \left|\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right| \cdots \left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi^{(j-1)}(z)}\right| \leqslant \delta_0 \cdots \delta_{j-1}\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1} + \frac{R^{\rho+\varepsilon}}{H}\right)^j.$$

В завершение доказательства положим $\sigma_j = \delta_0 \cdots \delta_{j-1}$.

Следствие 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_r(z)$ – целые функции конечного порядка не выше ρ. Тогда при всяком $s \in \mathbb{N}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $R_{s,r}$ и $\lambda_{s,r}$ такие, что справедливо утверждение: при любых $R > R_{s,r}$ и $H > 0$ в кольце $C_R = \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\}$ можно выбрать конечное множество $B_{r,s,R}$ кругов с суммой радиусов не более $2rsH$ таким образом, что при всяком $z \in C_R \setminus B_{r,s,R}$ и при любых $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s}$ верны оценки*

$$\left|\frac{\varphi_k^{(j)}(z)}{\varphi_k(z)}\right| \leqslant \lambda_{s,r}\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1} + \frac{R^{\rho+\varepsilon}}{H}\right)^s.$$

Замечание. Для доказательства следствия 2 достаточно применить следствие 1 к каждой из функций $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_r(z)$ и, объединив выброшенные в каждом случае круги, взять

в качестве правой части искомого неравенства максимум из правых частей всех неравенств вида (4).

Лемма 6 ([4], § 2, лемма 2). *Пусть* $\delta \in (0;1)$; $R > 10^{1/\delta}$; B_R *– конечное множество кругов с общей суммой радиусов менее* $2R^{1-\delta}$, *лежащих в кольце* $C_R = \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\}$. *Тогда найдётся число* $R_1 \in (2R, 3R)$ *такое, что окружность* $\beta_{R_1} = \{z : |z| = R_1\}$ *не пересекается с множеством* B_R.

3. Доказательство теоремы. Далее через γ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ будем обозначать положительные постоянные, которые зависят только от функции $f(z)$ и многочлена P (и не зависят от определённых далее чисел R). По условию $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$P_d(f(z), f^{(n)}) + Q(z, f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)) = 0, \tag{5}$$

где $P_d(\omega_0, \omega_n) = \prod_{j=1}^{d}(\omega_n - \alpha_j\omega_0)$, а степень многочлена Q (по совокупности переменных ω_0, $\ldots$, ω_n) не превосходит $d-1$. Так как при $d = 1$ утверждение теоремы очевидно выполняется, то в дальнейшем считаем, что $d \geqslant 2$.

Согласно лемме 4 функция $f(z)$ имеет конечный порядок. Пусть этот порядок равен ρ. Положим $K = 100(nd + \deg_z Q)^2(\rho + 1)$. Обозначим через $\mathcal{L}$ следующее множество функций:

$$\mathcal{L} = \{f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z), f^{(n)}(z) - \alpha_1 f(z), \ldots, f^{(n)}(z) - \alpha_d f(z)\}.$$

Тогда каждая из функций множества $\mathcal{L}$ имеет порядок, не превосходящий ρ, и найдётся постоянная γ_1 такая, что при любом $R > \gamma_1$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{L}$ и любого $j \in \in \{0, 1, \ldots, n\}$ справедливы оценки

$$M_{\varphi^{(j)}}(4R) \leqslant \exp(R^{\rho+1}).$$

Применим следствие 2 из леммы 5, согласно которому существуют постоянные $\gamma_2, \gamma_3 > 0$, что при любом $R > \gamma_2$ найдётся конечное число кругов B_R такое, что:

а) $B_R \subset \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\}$;

б) сумма радиусов всех кругов из B_R не превосходит $R^{1/2}$;

в) при любом $z \in \{2R \leqslant |z| \leqslant 3R\} \setminus B_R$ для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{L}$ и любого $j \in \in \{0, 1, \ldots, 3nd\}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)}\right| \leqslant \gamma_3 R^K.$$

Далее, согласно лемме 6 найдётся $\gamma_4 > 1$, что при любом $R > \gamma_4$ существует число $R_1 \subset \subset (2R, 3R)$ такое, что окружность $\beta_{R_1} = \{z : |z| = R_1\}$ лежит во множестве $\{2R \leqslant |z| \leqslant \leqslant 3R\} \setminus B_R$ и, следовательно, для любой точки $z \in \beta_{R_1}$, любой функции $\varphi \in \mathcal{L}$ и любого $j \in \{0, 1, \ldots, 3nd\}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)}\right| \leqslant \gamma_3 R^K. \tag{6}$$

Фиксируем произвольное достаточное большое R. Пусть многочлен Q из равенства (5) имеет вид

$$Q = \sum_{j_0+\ldots+j_n \leqslant d-1} a_{j_1,\ldots,j_n}(z)\omega_0^{j_0}\cdots\omega_n^{j_n}.$$

Тогда из (5) при любом $z \in \beta_{R_1}$ получим

$$|f(z)|^d \prod_{j=1}^{d}\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} - \alpha_j\right| \leqslant \sum_{j_0+\ldots+j_n \leqslant d-1} |a_{\overline{j}}(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^{j_1}\cdots\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}\right|^{j_n}|f(z)|^{j_0+\ldots+j_n},$$

откуда, учитывая выбор параметра K, имеем неравенство

$$|f(z)|^d \prod_{j=1}^{d} \left| \frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leqslant \gamma_5 (|f(z)|+1)^{d-1} R^{K(d-1/2)}. \tag{7}$$

Пусть $z_0 \in \beta_{R_1}$ и $|f(z_0)| > R^{2Kd}$. Из (7) находим

$$\prod_{j=1}^{d} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_j \right| \leqslant \gamma_6 \frac{R^{K(d-1/2)}}{|f(z_0)|}. \tag{8}$$

Здесь согласно условиям теоремы все числа α_j различны.

Пусть j_0 таково, что справедливо неравенство

$$\min_j \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_j \right| = \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_{j_0} \right|.$$

Тогда из (8) имеем

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_{j_0} \right|^d \leqslant \prod_{j=1}^{d} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_j \right| \leqslant \gamma_6 \frac{R^{K(d-1/2)}}{R^{2Kd}},$$

откуда следует, что

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_{j_0} \right| \leqslant \frac{\gamma_7}{R^K}.$$

Если $j \neq j_0$, то (при достаточно большом R)

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_j \right| \geqslant |\alpha_j - \alpha_{j_0}| - \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_{j_0} \right| \geqslant |\alpha_j - \alpha_{j_0}| - \frac{\gamma_7}{R^K} \geqslant \frac{1}{2}|\alpha_j - \alpha_{j_0}|.$$

Из (8) будем иметь

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f(z_0)} - \alpha_{j_0} \right| \leqslant \gamma_8 \frac{R^{K(d-1/2)}}{|f(z_0)|}$$

или

$$|f^{(n)}(z) - \alpha_{j_0} f(z_0)| \leqslant \gamma_8 R^{K(d-1/2)}.$$

Если же $|f(z_0)| \leqslant R^{2Kd}$, то из (6) следует, что

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \gamma_9 R^{3Kd},$$

откуда получим

$$|f^{(n)}(z_0) - \alpha_{j_0} f(z_0)| \leqslant \gamma_{10} R^{3Kd}.$$

Таким образом, при достаточно большом $R > \gamma_{11}$ и при любом $z \in \beta_{R_1}$ найдётся натуральное число $j(z) \in \{1, \ldots, d\}$ такое, что

$$|f^{(n)}(z) - \alpha_{j(z)} f(z)| \leqslant \gamma_{12} R^{3Kd}.$$

Но тогда, согласно (6), при всех $l = \overline{0, 2nd}$ справедливы оценки

$$|f^{(n+l)}(z) - \alpha_{j(z)} f^{(l)}(z)| \leqslant \gamma_{13} R^{4Kd}. \tag{9}$$

Отсюда при всех $s = \overline{1, d}$ имеют место неравенства

$$|f^{(ns)}(z) - \alpha_{j(z)}^{s} f(z)| \leqslant (1 + |\alpha_{j(z)}|)^{s} \gamma_{13} R^{4Kd}. \tag{10}$$

Действительно, применив индукцию:
1) при $s = 1$ получим оценку (9);
2) если (10) верно при $s = t$, то при $s = t + 1$ имеем

$$|f^{(n(t+1))}(z) - \alpha_{j(z)}^{t+1} f(z)| \leqslant |f^{(n(t+1))}(z) - \alpha_{j(z)} f^{(nt)}(z)| + |\alpha_{j(z)} f^{(nt)}(z) - \alpha_{j(z)}^{t+1} f(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_{13} R^{4Kd} + |\alpha_{j(z)}|(1 + |\alpha_{j(z)}|)^{t} \gamma_{13} R^{4Kd} \leqslant (1 + |\alpha_{j(z)}|)^{t+1} \gamma_{13} R^{4Kd}.$$

Справедливость неравенств (10) доказана.

Пусть $Q(t) = \prod_{j=1}^{d} (t - \alpha_j) = t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \ldots + a_0$. Положим

$$L(f) = f^{(nd)} + a_{d-1} f^{(n(d-1))} + \ldots + a_1 f^{(n)} + a_0.$$

Тогда (учитывая, что $Q(\alpha_{j(z)}) = 0$ при всех $j(z)$) найдём, что при любом $z \in \beta_{R_1}$

$$|L(f(z))| = |L(f(z)) - Q(\alpha_{j(z)}) f(z)| \leqslant$$

$$\leqslant |f^{(dn)}(z) - \alpha_{j(z)}^{d} f(z)| + |a_{d-1}||f^{((d-1)n)}(z) - \alpha_{j(z)}^{d-1} f(z)| + \ldots + |a_0||f(z) - f(z)| \leqslant \gamma_{15} R^{4Kd}.$$

Таким образом, при всяком достаточно большом R для целой функции $L(f(z))$ имеет место оценка

$$\max_{|z| \leqslant R} |L(f(z))| \leqslant \max_{z \in \beta_{R_1}} |L(f(z))| \leqslant \gamma_{14} R^{4Kd}.$$

Тогда по теореме Лиувилля $L(f(z)) = q(z)$ при некотором многочлене $q(z) \in \mathbb{C}[z]$, т.е. функция $y = f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$y^{(dn)} + a_{d-1} y^{((d-1)n)} + \ldots + a_1 y^{(n)} + a_0 y = q(z),$$

откуда следует, что $f(z)$ – квазимногочлен. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М., 1950.
2. *Горбузов В.Н.* Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений. Гродно, 2006.
3. *Подкопаева В.А., Янченко А.Я.* О целых решениях конечного порядка одного класса алгебраических дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1318–1322.
4. *Янченко А.Я.* О некоторых арифметических свойствах значений целых функций конечного порядка и их первых производных // Мат. сб. 2019. Т. 210. № 12. С. 136–150.
5. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., 1987.
6. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 28.03.2022 г.
После доработки 11.08.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.