ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1193–1204

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956+517.983

РЕШЕНИЕ ПОЛУГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2022 г. С. П. Зубова, Е. В. Раецкая

Исследуется разрешимость полуграничной задачи в банаховом пространстве для уравнения в частных производных с необратимыми операторными коэффициентами. За счёт регулярности операторного пучка уравнение расщепляется на два уравнения в подпространствах. Выявляются условия разрешимости задач, поставленных для этих уравнений, и строятся решения.

DOI: 10.31857/S0374064122090035, EDN: CHUCTT

Введение. Рассматривается уравнение

$$A\frac{\partial u}{\partial t} = B\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

где $A : E_1 \to E_2$ – линейный замкнутый фредгольмов оператор с нулевым индексом, $\overline{\operatorname{dom} A} = E_1$; $B \in L(E_1 \to E_2)$; E_1, E_2 – банаховы пространства; $(t,x) \in T \times X$, $T = [0,t_k]$, $X = [0,x_k]$; $u = u(t,x)$ – искомая вектор-функция.

Под решением уравнения (1) понимается вектор-функция $u = u(t,x) \in \operatorname{dom} A$, непрерывно дифференцируемая по t и по x, удовлетворяющая (1) при всех $(t,x) \in T \times X$.

Ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in X, \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие вектор-функции со значениями в E_2.

Интерес к уравнениям в частных производных с необратимым оператором при производной по выделенной переменной привлекла работа С.Л. Соболева [1], вследствие чего такие уравнения называют *уравнениями соболевского типа.* Уравнениями указанного типа описываются процессы гидродинамики, тепло- и влагопереноса, процессы в электромеханических системах (см., например, [2–4]).

Исследование уравнения (1) можно сопоставить с исследованием уравнения

$$A\frac{dz}{dt} = Bz(t) \tag{4}$$

с коэффициентами A и B, описанными выше, а решение задачи (1)–(3) – с решением уравнения (4), удовлетворяющим условию

$$z(0) = z_0 \in \operatorname{dom} A. \tag{5}$$

При этом можно использовать многие факты, полученные при решении задачи (4), (5), начало исследования которой было положено, по-видимому, в середине XX века на семинаре проф. Л.А. Люстерника в Московском государственном университете.

В частном случае конечномерных пространств E_1, E_2 определённые результаты описаны в книге [5, гл. XII, § 7]; в конечномерном случае значительные результаты получены в работах [6–9], в банаховом пространстве – в [10, 11].

С шестидесятых годов прошлого века активные исследования задачи (4), (5) велись в Воронежской математической школе под руководством проф. С.Г. Крейна. Подробные результаты получены в работах [12–15], часть их приведена в Математической энциклопедии [16, с. 332–337]. Опишем основные результаты.

В случае регулярного операторного пучка $A-\lambda B$ (т.е. обратимости пучка при достаточно малых по модулю и не равных нулю λ $(\lambda\in\dot{\bigcup}(0)\bigcap\mathbb{C})$) оператор $A_\lambda=(A-\lambda B)^{-1}A\colon\ \operatorname{dom}A\to\to E_1$ имеет число нуль нормальным собственным числом, т.е. имеет место разложение E_1 в прямую сумму

$$E_1=M\bigoplus N, \tag{6}$$

где N – корневое подпространство для A_λ; M инвариантно относительно A_λ и такое, что сужение $\tilde{A_\lambda}$ оператора A_λ на M обратимо (см. [12]). Определение нормального собственного числа приведено в [17, гл. I, § 2].

Далее: решение задачи (4), (5) существует в том и только в том случае, если $z_0\in M$. Само решение целиком лежит в M и оно единственно. Получена формула для решения.

Результаты получены и в случае неоднородного уравнения (4), и в случае переменных коэффициентов A и B, и в случае ненулевого индекса оператора A.

Задача (1)–(3) в пространстве $\mathbb{R}^n$ с дополнительным слагаемым $Cu(t,x)$, с постоянными или переменными коэффициентами исследована в работах В.Ф. Чистякова, в частности, в статьях [18, 19], в которых получены определённые условия разрешимости задачи, построено частное решение.

Цель настоящей работы – построить решение задачи (1)–(3). Для этого требуется определить необходимые условия согласования для функций $\varphi(x)$, $\psi(t)$, достаточную степень их гладкости, убедиться, что достаточным условием на коэффициенты A и B для решения поставленных задач является условие регулярности пучка $A-\lambda B$.

1. Расщепление уравнения и краевых условий. Пусть пучок $A-\lambda B$ регулярен; P_N и P_M – проекторы на подпространства N и M соответственно, отвечающие разложению (6). Тогда

$$u(t,x)=P_Mu(t,x)+P_Nu(t,x). \tag{7}$$

Обозначим $P_Mz=z_M$, $P_Nz=z_N$ для любого $z\in E_1$.

Представление $B=\lambda^{-1}(\lambda B-A+A)$ и умножение уравнения (1) слева на $(A-\lambda B)^{-1}$ приводит к уравнению

$$A_\lambda\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\lambda}(A_\lambda-I)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{8}$$

и поскольку M и N инвариантны относительно A_λ, то, подставив (7) в (8) и отделив слагаемые в M и N, получим в подпространстве M

$$\tilde{A}_\lambda\frac{\partial u_M}{\partial t}=\frac{1}{\lambda}(A_\lambda-P_M)\frac{\partial u_M}{\partial x} \tag{9}$$

и в подпространстве N

$$A_\lambda\frac{\partial u_N}{\partial t}=\frac{1}{\lambda}(A_\lambda-P_N)\frac{\partial u_N}{\partial x}. \tag{10}$$

В M оператор A_λ обратим, следовательно, уравнение (9) разрешается относительно производной по t следующим образом:

$$\frac{\partial u_M}{\partial t}=\frac{1}{\lambda}(P_M-\tilde{A_\lambda}^{-1})\frac{\partial u_M}{\partial x}. \tag{11}$$

Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Уравнение (1) эквивалентно системе, состоящей из равенства (7) и двух дифференциальных уравнений (10), (11).*

Замечание 1. Равенство (7) – алгебраическое уравнение для нахождения функции $u(t,x)$, в этом смысле уравнение (1) является дифференциально-алгебраическим.

Из (7) следует, что

$$u(0,x) = u_M(0,x) + u_N(0,x) = \varphi_M(x) + \varphi_N(x),$$

$$u(t,0) = u_M(t,0) + u_N(t,0) = \psi_M(t) + \psi_N(t),$$

отсюда получим

$$u_M(0,x) = \varphi_M(x), \quad u_M(t,0) = \psi_M(t), \tag{12}$$

$$u_N(0,x) = \varphi_N(x), \quad u_N(t,0) = \psi_N(t). \tag{13}$$

Недостатком уравнений (10) и (11) является наличие в них параметра λ. В статье [12] получена формула для оператора $\lambda^{-1}(P_M - \tilde{A}_\lambda^{-1})$, не содержащая λ. Доказательство независимости решения уравнения (10) от λ достаточно трудоёмко, поэтому преобразуем (10), умножив его слева на $A - \lambda B$:

$$A\frac{\partial u_N}{\partial t} = B\frac{\partial u_N}{\partial x}. \tag{14}$$

Итак, задача состоит в решении уравнений (14) и (11) с условиями (12) и (13).

2. Предварительные сведения. Фредгольмовость оператора $A : E_1 \to E_2$ позволяет разложить пространства в прямые суммы

$$E_1 = \operatorname{Coim} A \bigoplus \operatorname{Ker} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \bigoplus \operatorname{Coker} A, \tag{15}$$

где $\operatorname{Coim} A$ – прямое дополнение к ядру $\operatorname{Ker} A$ в пространстве E_1, $\operatorname{Coker} A$ – дефектное подпространство; сужение $\tilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A$ имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$ (см. [20]).

Проекторы на $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Coker} A$, отвечающие разложению (15), обозначаются через P_0 и Q_0 соответственно; через I – единичный оператор в соответствующем пространстве; оператор $\tilde{A}^{-1}(I - Q_0)$ обозначается через A^- и называется *полуобратным оператором.*

Далее приведём результаты, полученные в [12, 13] и описанные в [14, 15].

Лемма 2. *Равенство*

$$Ay = z, \quad y \in E_1 \bigcap \operatorname{dom} A, \quad z \in E_2,$$

эквивалентно системе

$$Q_0 z = 0,$$

$$y = A^- z + P_0 y \quad \text{для всех} \quad P_0 y \in \operatorname{Ker} A \bigcap \operatorname{dom} A.$$

При построении оператора $(A - \lambda B)^{-1}$, при исследовании свойств оператора $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1}A$ возникают операторы

$$S_0 = Q_0 B, \quad T_0 = A_0^- B \quad (A_0 = A), \quad A_j = S_{j-1}P_{j-1},$$

$$S_j = Q_j S_{j-1} T_{j-1}, \quad T_j = T_{j-1} - A_j^- S_{j-1} T_{j-1}, \quad j = \overline{1,p}, \tag{16}$$

p – максимальная длина цепочек B-присоединённых элементов к элементам из $\operatorname{Ker} A$. Имеются ввиду B-жордановы цепочки, отвечающие нулевому собственному числу.

Операторы $A_j\colon \operatorname{Ker} A_{j-1} \to \operatorname{Coker} A_{j-1}$ – конечномерные операторы с соответствующими квадратными матрицами, следовательно, являются фредгольмовыми, тогда

$$\operatorname{Ker} A_{j-1} = \operatorname{Coim} A_j \bigoplus \operatorname{Ker} A_j, \quad \operatorname{Coker} A_{j-1} = \operatorname{Im} A_j \bigoplus \operatorname{Coker} A_j, \quad j = \overline{1, p-1}. \tag{17}$$

Операторы P_j и Q_j в (16) – это проекторы на $\operatorname{Ker} A_j$ и $\operatorname{Coker} A_j$ соответственно, отвечающие разложениям (17); $A_j^- = \tilde{A}_j^{-1}(Q_{j-1} - Q_j)$.

Лемма 3. *Пучок* $(A - \lambda B)$ *регулярен в том и только в том случае, когда существует число* $q \in \mathbb{N}$ *такое, что оператор* A_q *обратим. Число* p *есть минимальное из таких* q.

Разложение (15) с помощью равенств (17) переходит в разложения

$$E_1 = \operatorname{Coim} A \bigoplus \operatorname{Coim} A_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \operatorname{Coim} A_{p-1} \bigoplus \operatorname{Coim} A_p,$$

$$E_2 = \operatorname{Im} A \bigoplus \operatorname{Im} A_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \operatorname{Im} A_{p-1} \bigoplus \operatorname{Im} A_p,$$

$$\operatorname{Coim} A_p = \operatorname{Ker} A_{p-1}, \quad \operatorname{Im} A_p = \operatorname{Coker} A_{p-1}.$$

Лемма 4. *Справедливо представление пространства E_1 в виде (6), где*

$$M = \{y \in E_1 : S_i y = 0, \quad i = \overline{0, p-1}\}.$$

Сужение $\tilde{A}_\lambda$ оператора A_λ на M имеет ограниченный обратный оператор

$$\tilde{A}_\lambda^{-1} = P_M - \lambda T_p. \tag{18}$$

Получены формулы для построения проекторов P_M и P_N на M и N соответственно.

3. Структура корневого подпространства. Подпространство N есть линейная оболочка собственных и присоединённых элементов $w_i(\lambda)$ оператора A_λ, отвечающих нулевому собственному числу. Оператор A_λ в N нильпотентен со степенью нильпотентности p: $A_\lambda^p = 0$.

Для элементов $w_i(\lambda)$ получены формулы, однако при работе в подпространстве N удобнее использовать v_i – элементы B-жордановых цепочек для A, отвечающие нулевому собственному числу, не зависящие от λ, т.е. элементы $v_1, v_2, \ldots \in E_1$: $Av_1 = 0$, $Av_i = Bv_{i-1}$, ... Максимальная длина цепочек равна p, элементы цепочек длины k имеют вид

$$v_1 = P_{k-1} z_1, \quad v_2 = T_{k-2}(P_{k-1} z_1) + P_{k-2} z_2, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad v_i = \sum_{s=1}^{i} \prod_{j=i}^{s} T_{k-j}(P_{k-s+1} z_{s-1}) + P_{k-i} z_i, \quad i = \overline{1, k}, \tag{19}$$

с произвольными элементами $P_{k-i} z_i \in \operatorname{Ker} A_{k-i}$, т.е. v_i – блоки B-присоединённых элементов к блоку v_1 собственных элементов оператора A, принадлежащих $\operatorname{Coim} A_k$.

Переход от $w_i(\lambda)$ к v_i возможен, поскольку $w_i(\lambda)$ являются линейными комбинациями элементов v_i:

$$w_1(\lambda) = v_1,$$

$$w_i(\lambda) = \sum_{j=2}^{i} (-1)^{j-1} C_{i-2}^{j-2} \lambda^{j-1} v_j, \quad i = \overline{2, k}.$$

Теперь N – линейная оболочка собственных и B-присоединённых элементов оператора A, в таком случае проекторы P_M и P_N не зависят от параметра λ.

Элементы из $\operatorname{Coim} A_1$ не имеют B-присоединённых элементов, длины их B-жордановых цепочек равны единице. Элементы из $\operatorname{Coim} A_2$ имеют по одному B-присоединённому элементу, длины их B-жордановых цепочек равны 2, ..., элементы из $\operatorname{Coim} A_p = \operatorname{Ker} A_{p-1}$ имеют B-жордановы цепочки длины p.

Замечание 2. Если $A_r = (0)$ с некоторым r, $1 \leqslant r < p$, то полагаем, что $A_r^- = (0)$, $\operatorname{Coim} A_r = \{0\}$, соответствующие присоединённые элементы являются нулевыми и $P_r = P_{r-1}$, $Q_r = Q_{r-1}$.

Представим

$$N = N_1 \bigoplus N_2 \bigoplus \ldots \bigoplus N_p,$$

где N_k – линейная оболочка элементов из $\operatorname{Coim} A_k$ (это $v_{k\,1}$) и B-присоединённых к ним элементов $v_{k\,i}$, $i = \overline{2, k}$.

3.1. Структура подпространства N_k.

Лемма 5. $N_k = \operatorname{lin}\{v_{k\,1}, v_{k\,2}, \ldots v_{k\,k}\}$, *где*

$$v_{k\,1} = z_{k\,1}, \quad v_{k\,2} = T_0 z_{k\,1} + z_{k\,2}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad v_{k\,j} = \sum_{i=1}^{j} T_0^{j-i} z_{k\,i}, \quad \textit{для любых} \quad z_{k\,i} \in \operatorname{Coim} A_k, \quad i = \overline{1,k}, \tag{20}$$

и

$$\tilde{S}_i z_{k\,k-j} = 0, \quad j > i, \quad \tilde{S}_i z_{k\,k-i} \neq 0, \quad i = \overline{0, k-1}. \tag{21}$$

Здесь $\tilde{S}_i = Q_0 B T_0^i|_{\operatorname{Coim} A_k}$.

Доказательство. Первое равенство в (20) очевидно. Далее из равенства $Av_{k\,2} = Bv_{k\,1}$ в силу леммы 2 следует, что $v_{k\,2}$ существует в том и в только в том случае, когда $Q_0 B v_{k\,1} = S_0 v_{k\,1} = 0$. Тогда $v_{k\,2} = A^- B v_{k\,1} + z_{k\,2}$ для всех $z_{k\,2} \in \operatorname{Coim} A_k$.

Аналогично, так как существует $v_{k\,i}$ такой, что $Av_{k\,i} = Bv_{k\,i-1}$, то $S_0 v_{k\,i-1} = 0$ и $v_{k\,i} = T_0 v_{k\,i-1} + z_{k\,i}$ для любых $z_{k\,i} \in \operatorname{Coim} A_k$. При этом $S_0 v_{k\,i-1} = S_0 T_0 v_{k\,i-2} = \ldots = S_0 T_0^{i-2} v_{k\,1} = 0$, $i = \overline{2,k}$.

Уравнение $Av_{k\,k+1} = Bv_{k\,k}$ не имеет решения $v_{k\,k+1}$, поэтому $S_0 v_{k\,k} \neq 0$ и $S_i v_{k\,k-i} \neq 0$, $i = \overline{0, k-1}$.

Замечание 3. Формулы (20) согласуются с формулами (19), поскольку $A_j|_{\operatorname{Coim} A_k} = (0)$, $j = \overline{1, k-1}$, и $P_j = P_0$, $Q_j = Q_0$. Сужение $\tilde{A}_k$ оператора A_k на $\operatorname{Coim} A_k$ обратимо в N_k и $\tilde{A}_k = S_k|_{\operatorname{Coim} A_k} = \tilde{S}_k$.

Замечание 4. В формулах (20) нельзя отбросить младшие слагаемые, как это делается при построении B-присоединённых элементов к одномерному вектору из подпространств N. Иначе – элемент из N_k нельзя представить в виде суммы B-присоединённых элементов с элементами из $\operatorname{Coim} A_k$, вообще говоря, неодномерными.

3.2. Представление элементов в N_k. Запишем произвольный элемент $y \in N_k$ в виде суммы элементов, описанных формулами (20):

$$y = z_{k\,1} + (T_0 z_{k\,1} + z_{k\,2}) + \ldots + \sum_{i=1}^{k} T_0^{k-i} z_{k\,i}, \tag{22}$$

с элементами $z_{k\,i} \in \operatorname{Coim} A_k$, которые предстоит определить с помощью свойств (21), для чего целесообразно перегруппировать слагаемые в последнем равенстве:

$$y = \sum_{j=0}^{k-1} T_0^j z_{k\,1} + \sum_{j=0}^{k-2} T_0^j z_{k\,2} + \ldots + (I + T_0) z_{k\,k-1} + z_{k\,k}.$$

Последовательным умножением этого равенства слева на S_0, S_1, $\ldots$, S_{k-1} и с использованием свойств (21) формируется система

$$S_0 y = S_0 T_0^{k-1} z_{k\,1}, \quad S_1 y = S_1 T_0^{k-1} z_{k\,1} + S_1 T_0^{k-2} z_{k\,2}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad S_{k-1} y = S_{k-1} T_0^{k-1} z_{k\,1} + S_{k-1} T_0^{k-2} z_{k\,2} + \ldots + S_{k-1} T_0^0 z_{k\,k}. \tag{23}$$

Здесь $S_0 T_0^{k-1}|_{\operatorname{Coim} A_k} = S_1 T_0^{k-2}|_{\operatorname{Coim} A_k} = \ldots = S_{k-1} T_0^0|_{\operatorname{Coim} A_k} = \tilde{A}_k$ – обратимый оператор, вследствие чего из первого уравнения этой системы находится $z_{k\,1} = \tilde{A}_k^{-1} S_0 y$, из второго уравнения – $z_{k\,2}$, и т. д. Единственность решения $z_{k\,i}$ системы очевидна. Логично обозначить $z_{k\,i}$ через $y_{k\,i}$. Таким образом, доказана

Лемма 6. *Любой элемент* $y \in N_k$ *представим в виде (22) с элементами* $z_{k\,i} = y_{k\,i}$, $i = \overline{1,k}$, *определяемыми из системы (23).*

4. Решение уравнения (14) с условиями (13). Как правило, вектор-функцию из конечномерного пространства представляют в виде суммы элементов минимальной размерности. В данной работе $u_N(t,x)$ ищется в виде суммы B-жордановых блоков:

$$u_N(t,x)=\sum_{k=1}^{p}u_k,\quad \psi_N(t)=\sum_{k=1}^{p}\psi_k,$$

$$u_k=u_{k\,1}+(T_0u_{k\,1}+u_{k\,2})+\ldots+\sum_{i=1}^{k}T_0^{k-i}u_{k\,i},$$

$$\psi_k=\psi_{k\,1}+(T_0\psi_{k\,1}+\psi_{k\,2})+\ldots+\sum_{i=1}^{k}T_0^{k-i}\psi_{k\,i},\tag{24}$$

$u_k=u_k(t,x)\in N_k$, $\psi_k=\psi_k(t)\in N_k$, где $u_{k\,i}$ определяются из (23) с заменой $y\to u_k$, $z_{k\,i}\to u_{k\,i}$, а $\psi_{k\,i}$ – из (23) с заменой $y\to\psi_k$, $z_{k\,i}\to\psi_{k\,i}$.

4.1. Преобразование уравнения (14) в N_k. Соотношение $A\dfrac{\partial u_N}{\partial t}=B\dfrac{\partial u_N}{\partial x}$ в силу леммы 2 эквивалентно системе

$$S_0\frac{\partial u_N}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}=T_0\frac{\partial u_N}{\partial x}+z_{k\,1}(t,x),\quad \text{для любых}\quad z_{k\,1}(t,x)\in\operatorname{Coim}A_k,$$

т.е.

$$S_0\bigg(\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}+\bigg(T_0\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}+\frac{\partial u_{k\,2}}{\partial x}\bigg)+\ldots+\sum_{i=1}^{k}T_0^{k-i}\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial x}\bigg)=0\tag{25}$$

и

$$\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial t}+\bigg(T_0\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial t}+\frac{\partial u_{k\,2}}{\partial t}\bigg)+\ldots+\sum_{i=1}^{k}T_0^{k-i}\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial t}=T_0\bigg(\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}+\bigg(T_0\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}+\frac{\partial u_{k\,2}}{\partial x}\bigg)+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{i=1}^{k}T_0^{k-i}\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial x}\bigg)+z_{k\,1}.\tag{26}$$

Равенство (25) в силу свойств (21) имеет вид $S_0T_0^{k-1}\dfrac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}=0$, и в силу обратимости $S_0T_0^{k-1}|_{\operatorname{Coim}A_k}=\tilde{A}_k$ имеем

$$\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}=0.$$

В соотношении (26) удобно сгруппировать слагаемые при одинаковых степенях T_0:

$$\sum_{j=1}^{k-1}T_0^{k-j}\sum_{i=1}^{j}\bigg(\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial t}-\frac{\partial u_{k\,i+1}}{\partial x}\bigg)+\sum_{i=1}^{k-1}\bigg(\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial t}-\frac{\partial u_{k\,i+1}}{\partial x}\bigg)+\bigg(\frac{\partial u_{k\,k}}{\partial t}-z_{k\,1}\bigg)=0.$$

Умножая последнее равенство последовательно на S_0, S_1, $\ldots$, S_{k-1} и учитывая свойства (21) и обратимость операторов $S_0T_0^{k-1}|_{\operatorname{Coim}A_k}=S_1T_0^{k-2}|_{\operatorname{Coim}A_k}=\ldots=S_{k-1}T_0^{0}|_{\operatorname{Coim}A_k}=\tilde{A}_k$, получаем

$$\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial t}-\frac{\partial u_{k\,i+1}}{\partial x}=0,\quad i=\overline{1,k-1},$$

$$\frac{\partial u_{k\,k}}{\partial t}-z(t,x)=0,$$

т.е. в подпространстве N_k уравнение (14) разрешается относительно производной по x:

$$\frac{\partial u_{k\,1}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u_{k\,i+1}}{\partial x}=\frac{\partial u_{k\,i}}{\partial t},\quad i=\overline{1,k-1}. \tag{27}$$

4.2. Решение уравнения (14) в N_k с условием $u_N(t,0)=\psi_N(t)$. Решая последовательно уравнения (27) с условиями $u_{k\,i}(t,0)=\psi_{k\,i}(t)$ при достаточной гладкости $\psi_{k\,i}(t)$, получаем

$$u_{k\,1}(t,x)=\psi_{k\,1}(t),\quad u_{k\,2}(t,x)=x\frac{d\psi_{k\,1}}{dt}+\psi_{k\,2}(t),\quad \ldots$$

$$\ldots,\quad u_{k\,i}(t,x)=\sum_{j=1}^{i}\frac{x^{i-j}}{(i-j)!}\frac{d^{i-j}\psi_{k\,j}}{dt^{i-j}},\quad i=\overline{1,k}. \tag{28}$$

Определяем и

$$z_{k\,1}(t,x)=\sum_{j=1}^{p}\frac{x^{k-j}}{(k-j)!}\frac{d^{k-j+1}\psi_{k\,j}}{dt^{k-j+1}}.$$

4.3. Решение уравнения (14) с условием $u_N(t,0)=\psi_N(t)$. Согласно равенству (24)

$$u_N(t,x)=\sum_{k=1}^{p}u_k(t,x), \tag{29}$$

поэтому справедлива

Лемма 7. *Пусть $\psi_{k\,i}(t)\in C^{k-i+1}(T\to\mathbb{C})$, $k=\overline{1,p}$, $i\leqslant k$. Решение $u_N(t,x)$ уравнения (14) существует, единственно и описывается формулами (29), (24), (28).*

4.4. Решение уравнения (14) с условиями (13). На основании результатов п. 4.3 справедлива

Лемма 8. *Пусть $\psi_{k\,i}(t)\in C^{k-i+1}(T\to\mathbb{C})$, $k=\overline{1,p}$, $i\leqslant k$. Решение уравнения*

$$A\frac{\partial u_N}{\partial t}=B\frac{\partial u_N}{\partial x}$$

с условиями $u_N(t,0)=\psi_N(t)$, $u_N(0,x)=\varphi_N(x)=\sum_{i=1}^{p}\varphi_i(x)$ существует в том и только в том случае, когда выполняются условия согласования, вытекающие из (29), (24), (28):

$$\varphi_{k\,i}(x)=\sum_{j=1}^{i}\frac{x^{i-j}}{(i-j)!}\frac{d^{i-j}\psi_{k\,j}}{dt^{i-j}}\bigg|_{t=0},\quad i=\overline{1,k}. \tag{30}$$

5. Решение задачи в дополнительном подпространстве. Для решения уравнения (11) можно воспользоваться формулой (18), в результате чего уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial u_M}{\partial t}=T_p\frac{\partial u_M}{\partial x}. \tag{31}$$

5.1. Решение уравнения (31) с условием $u_M(0,x)=\varphi_M(x)$. Использование спектральных свойств оператора $T_p\in L(M\to M)$ приводит к следующему результату.

Пусть Γ – замкнутый спрямляемый контур, окружающий спектр ограниченного оператора xP_M+tT_p.

Лемма 9. *Решение $u_M(t,x)$ уравнения (31) с условием $u_M(0,x)=\varphi_M(x)$ и аналитической на X вектор-функцией $\varphi_M(x)$ имеет вид*

$$u_M(t,x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(tT_p+(x-\mu)P_M)^{-1}\varphi_M(\mu)\,d\mu. \tag{32}$$

В этом нетрудно убедиться непосредственной подстановкой (32) в (31) и в начальное условие.

5.2. Решение уравнения (31) с условиями (12). Из формулы (32) при $x = 0$ следует, что

$$\psi_M(t) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(tT_p - \mu P_M)^{-1}\varphi_M(\mu)\,d\mu. \tag{33}$$

Это ещё одно условие согласования для вектор-функций $\varphi(x)$, $\psi(t)$, необходимое для существования решения задачи (1)–(3).

Лемма 10. *Решение $u_M(t,x)$ уравнения*

$$A\frac{\partial u_M}{\partial t} = B\frac{\partial u_M}{\partial x}$$

с условиями $u_M(0,x) = \varphi_M(x) \in C^\infty(X \to M)$, $u_M(t,0) = \psi_M(t)$ существует в том и только в том случае, когда выполняется условие (33). Решение имеет вид (32).

6. Решение задачи (1)–(3). На основании результатов, полученных в предыдущих пунктах, справедлива следующая

Теорема. *Пусть $\varphi_M(x) \in C^\infty(X \to M)$. Решение задачи (1)–(3) существует в том и только в том случае, когда выполняются условия согласования (30) и (33). Решение единственно и определяется по формулам (7), (32), (29), (24), (28).*

Единственность решения в корневом подпространстве очевидна, а единственность $u_M(t,x)$ доказывается с помощью преобразования Лапласа $\tilde z(t,y)$ функции $z(t,x)$, равной разности двух предполагаемых решений $u_{M\,1}(t,x)$ и $u_{M\,2}(t,x)$. За счёт условий $z(t,0) = 0$ и $z(0,x) = 0$ преобразование $\tilde z(t,y)$ тождественно равно нулю, следовательно, $z(t,x) \equiv 0$ и $u_{M1}(t,x) = u_{M2}(t,x)$.

7. Пример. Решается задача (1)–(3) с операторами

$$A = \begin{pmatrix} \partial/\partial s & 1 \\ -1 & \partial/\partial s \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

в банаховом пространстве $E = E_1 = E_2 = \{y(s) \in C^1([0,2\pi] \to \mathbb{R}^2),\ y(0) = y(2\pi)\}$, $\operatorname{dom} A = C^2([0,2\pi], y(0) = y(2\pi))$, $\overline{\operatorname{dom} A} = E$, т.е. строится решение $u(t,x,s) = (u_1(t,x,s), u_2(t,x,s))$ системы

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial s\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial s\partial t} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{34}$$

с условиями

$$u(0,x,s) = \varphi(x,s) = (\varphi_1(x,s), \varphi_2(x,s)), \quad u(t,0,s) = \psi(t,s) = (\psi_1(t,s), \psi_2(t,s)),$$

$$u(t,x,0) = u(t,x,2\pi). \tag{35}$$

Известно [21], что оператор A в пространстве E является фредгольмовым. Легко проверяется обратимость пучка $A - \lambda B$ при $\lambda \in \dot{\bigcup}(0)\bigcap\mathbb{C}$ и при выполнении условия (35), следовательно, оператор $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1}A$ имеет число нуль нормальным собственным числом и справедливо разложение E в прямую сумму (6).

Ядро оператора A_λ совпадает с ядром A, а решение уравнения $Ay = 0$, т.е. уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial s} = Ry, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \in E,$$

имеет вид $y = e^{sR}c$ для любых $c = c(t,x) \in C^1([T \times X] \to \mathbb{R}^2)$.

Заметим, что

$$e^{sR}c = \begin{pmatrix} c_1\cos s - c_2\sin s \\ c_1\sin s + c_2\cos s \end{pmatrix}.$$

B-присоединённых элементов к элементам из $\operatorname{Ker} A$ нет, поэтому

$$N = \{e^{sR}c, \quad \text{для любых} \quad c \in C^1([T \times X] \to \mathbb{R}^2)\}.$$

Для существования решения y уравнения $A_\lambda y = z$ в пространстве E необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{-\tau R} Ry(t,x,\tau)\, d\tau = 0, \tag{36}$$

которое представляет собой условие принадлежности элемента $y(t,x,s)$ подпространству M. Нетрудно убедиться в том, что если y обладает свойством (36), то и $A_\lambda y$ обладает таким свойством, т.е. M инвариантно относительно A_λ.

Далее, $y(t,x,s) = y_M(t,x,s) + y_N(t,x,s)$, т.е.

$$y(t,x,s) = y_M(t,x,s) + e^{sR}c(t,x). \tag{37}$$

С помощью условия (36) для любых $y \in E$ находим

$$c(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-\tau R} y(t,x,\tau)\, d\tau. \tag{38}$$

Из (37) и (38) определяется проектор на N: $P_N(\cdot) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{(s-\tau)R} R(\cdot)\, d\tau$ и $P_M = I - P_N$. Легко проверяется свойство $P_N^2 = P_N$, тогда и $P_M^2 = P_M$. Имеем

$$\tilde{A}_\lambda^{-1}(\cdot) = P_M(\cdot) - \lambda \int\limits_s^{2\pi} e^{(s-\tau)R} R(\cdot)\, d\tau. \tag{39}$$

Теперь $u(t,x,s) = u_M + u_N$, $u_M = u_M(t,x,s)$, $u_N = u_N(t,x,s)$; $\varphi(x,s) = \varphi_M + \varphi_N$, $\varphi_M = \varphi_M(x,s)$, $\varphi_N = \varphi_N(x,s)$; $\psi(t,s) = \psi_M + \psi_N$, $\psi_M = \psi_M(t,s)$, $\psi_N = \psi_N(t,s)$.

7.1. Решение уравнения (14) с условием $\boldsymbol{u_N(t,0,s) = \psi_N(t,s)}$. Поскольку $N = \operatorname{Ker} A$, то уравнение (14) состоит из одного уравнения

$$\frac{\partial u_N}{\partial x} = 0,$$

следовательно,

$$u_N(t,x,s) = \psi_N(t,s). \tag{40}$$

7.2. Решение уравнения (14) с условиями (35). Так как $u_N(0,x,s) = \varphi_N(x,s)$, то одно из условий согласования граничных значений –

$$\psi_N(0,s) = \varphi_N(x,s), \tag{41}$$

откуда следует, что вектор-функция φ_N не должна зависеть в этом примере от x.

Итак, решение поставленной в примере задачи в подпространстве N существует в том и только в том случае, если $\psi_N(t,s) \in C^1(T \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2)$, $\varphi_N = \varphi_N(s) \in C^1([0,2\pi] \to \mathbb{R}^2)$ и выполняется условие (41). Это решение определяется формулой (40).

7.3. Решение уравнения (31) с условием $\boldsymbol{u_M(0,x,s) = \varphi_M(x,s)}$. В уравнении (31) $T_p = 1/\lambda(P_M - \tilde{A}_\lambda^{-1})$. Из (39) следует, что $T_p(\cdot) = \int_s^{2\pi} e^{(s-\tau)R} R(\cdot)\, d\tau$. Решение уравнения (31) с условием $u_M(0,x,s) = \varphi_M(x,s)$ имеет вид (32), если функция $\varphi_M(x,s)$ аналитична по x в области, ограниченной контуром Γ, окружающим спектр ограниченного оператора $tT_p + xP_M$. Вычислим

$$(tT_p + (x-\mu)P_M)^{-1}\varphi_M(\mu,s) =$$

$$= \frac{1}{x-\mu}\varphi_M(\mu, s) - \frac{t}{(x-\mu)^2}\int\limits_s^{2\pi} \exp\biggl(\Bigl(1 + \frac{t}{x-\mu}\Bigr)(s-\tau)R\biggr) R\varphi_M(\mu, \tau)\, d\tau.$$

Тогда

$$u_M(t, x, s) = \varphi_M(x, s) - t\int\limits_s^{2\pi} e^{(s-\tau)}R\biggl(-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{1}{(x-\mu)^2}\exp\Bigl(\frac{t}{x-\mu}(s-\tau)R\Bigr)R\varphi_M(\mu, \tau)\, d\mu\biggr)\, d\tau.$$

Здесь

$$R\varphi_M = \begin{pmatrix} -\varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}_M = \begin{pmatrix} -\varphi_{M2} \\ \varphi_{M1} \end{pmatrix},$$

$$\exp\Bigl(\frac{t}{x-\mu}(s-\tau)R\Bigr)R\varphi_M = \begin{pmatrix} -\varphi_{M2}\cos\dfrac{t(s-\tau)}{x-\mu} - \varphi_{M1}\sin\dfrac{t(s-\tau)}{x-\mu} \\ -\varphi_{M2}\sin\dfrac{t(s-\tau)}{x-\mu} + \varphi_{M1}\cos\dfrac{t(s-\tau)}{x-\mu} \end{pmatrix}.$$

Разложение функций $\cos(t(s-\tau)/(x-\mu))$, $\sin(t(s-\tau)/(x-\mu))$ в ряды Тейлора и интегрирование по частям в интегралах по контуру Γ приводит к результату

$$u_M(t, x, s) = \begin{pmatrix} \varphi_{M1}(x, s) \\ \varphi_{M2}(x, s) \end{pmatrix} + t\int\limits_s^{2\pi} e^{(s-\tau)R}\begin{pmatrix} v_1(t, x, s, \tau) \\ v_2(t, x, s, \tau) \end{pmatrix}\, d\tau,$$

где

$$v_1 = v_1(t, x, s, \tau) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{2k}(s-\tau)^{2k}}{(2k)!(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}\varphi_{M2}}{\partial x^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}(s-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+2)!}\frac{\partial^{2k+2}\varphi_{M1}}{\partial x^{2k+2}},$$
$$v_2 = v_2(t, x, s, \tau) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}(s-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+2)!}\frac{\partial^{2k+2}\varphi_{M2}}{\partial x^{2k+2}} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}(s-\tau)^{2k}}{(2k)!(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}\varphi_{M1}}{\partial x^{2k+1}}. \tag{42}$$

Окончательно получим

$$u_M(t, x, s) = \begin{pmatrix} \varphi_{M1}(x, s) \\ \varphi_{M2}(x, s) \end{pmatrix} + t\int\limits_s^{2\pi}\begin{pmatrix} v_1\cos(x-\tau) - v_2\sin(s-\tau) \\ v_1\sin(x-\tau) + v_2\cos(s-\tau) \end{pmatrix}\, d\tau. \tag{43}$$

7.4. Решение уравнения (31) с условиями (35). Условие $u_M(t, 0, s) = \psi_M(t, s)$ выполняется в том и только в том случае, как это следует из формулы (43), когда

$$\begin{pmatrix} \varphi_{M1}(0, s) \\ \varphi_{M2}(0, s) \end{pmatrix} + t\int\limits_s^{2\pi}\begin{pmatrix} v_1(t, 0, s, \tau)\cos(s-\tau) - v_2(t, 0, s, \tau)\sin(s-\tau) \\ v_1(t, 0, s, \tau)\sin(s-\tau) + v_2(t, 0, s, \tau)\cos(s-\tau) \end{pmatrix}\, d\tau = \psi_M(t, s).$$

Решение определяется по формулам (43), (42).

7.5. Частный случай 1. Пусть

$$\varphi(x, s) = \begin{pmatrix} x + a\cos s \\ bx\cos s + c\sin s \end{pmatrix}, \quad \psi(t, s) = \begin{pmatrix} t + (a-t)\cos s + t\sin s \\ (c-t)\sin s - t\cos s \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Тогда

$$\varphi_N(x,s)=\begin{pmatrix}\dfrac{a+c}{2}\cos s-\dfrac{b}{2}x\sin s\\ \dfrac{a+c}{2}\sin s+\dfrac{b}{2}x\cos s\end{pmatrix},\quad \varphi_M(x,s)=\begin{pmatrix}x+\dfrac{a-c}{2}\cos s+\dfrac{bx}{2}\sin s\\ \dfrac{c-a}{2}\sin s+\dfrac{bx}{2}\cos s\end{pmatrix},$$

$$\psi_N(t,s)=\begin{pmatrix}\dfrac{a+c}{2}\cos s+t\sin s\\ \dfrac{a+c}{2}\sin s-t\cos s\end{pmatrix},\quad \psi_M(t,s)=\begin{pmatrix}t+\left(\dfrac{a-c}{2}-t\right)\cos s\\ \left(\dfrac{c-a}{2}-t\right)\sin s\end{pmatrix}.$$

Решение задачи в подпространстве M, построенное по формулам (43), (42), имеет вид

$$u_M(t,x,s)=\begin{pmatrix}t+x+\left(\dfrac{a-c}{2}-t\right)\cos s+\dfrac{b}{2}(t+x)\sin s\\ \left(\dfrac{c-a}{2}-t\right)\sin s+\dfrac{b}{2}x\cos s\end{pmatrix},$$

в N –

$$u_N(t,x,s)=\begin{pmatrix}(t+3/2)\cos s\\ (t+3/2)\sin s\end{pmatrix}.$$

Решение

$$u(t,x,s)=u_M(t,x,s)+u_N(t,x,s)=\begin{pmatrix}t+x+\dfrac{3+a-c}{2}\cos s+\dfrac{b}{2}(t+x)\sin s\\ \dfrac{3+c-a}{2}\sin s+\dfrac{b}{2}x\cos s\end{pmatrix}$$

не является решением задачи (34), (35), так как не выполняются условия согласования, в частности условие (41) (φ_N зависит от x).

7.6. Частный случай 2. Пусть в (44) $b=0$:

$$\varphi(x,s)=\begin{pmatrix}x+a\cos s\\ c\sin s\end{pmatrix},\quad \varphi_M(x,s)=\begin{pmatrix}x+\dfrac{a-c}{2}\cos s\\ \dfrac{c-a}{2}\sin s\end{pmatrix},\quad \varphi_N(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{a+c}{2}\cos s\\ \dfrac{a+c}{2}\sin s\end{pmatrix},$$

$$u_M(t,x,s)=\begin{pmatrix}t+x+\left(\dfrac{a-c}{2}-t\right)\cos s\\ \left(\dfrac{c-a}{2}-t\right)\sin s\end{pmatrix},$$

вектор-функция $\psi(t,s)$ прежняя. Тогда функция

$$u(t,x,s)=\begin{pmatrix}t+x+(a-t)\cos s+t\sin s\\ (c-t)\sin s-t\cos s\end{pmatrix}$$

есть решение задачи (34), (35), поскольку условия (35) с функциями (44) при $b=0$ выполняются.

Заключение. В работе показано, что решение задачи (1)–(3), как и задачи (4), (5), представимо в виде суммы решений уравнений в двух подпространствах, одинаковых для этих задач. Но уравнения в задаче (1)–(3) дифференциальные, причём одно из них разрешимо относительно одной переменной, а другое – относительно второй переменной. В задаче (4),

(5) одно уравнение является дифференциальным, а другое – алгебраическим, имеющим лишь тривиальное решение, т.е. задача (4), (5) разрешима лишь тогда, когда начальное значение задано в подпространстве, в котором уравнение является дифференциальным. Доказано, что задача (1)–(3) разрешима не при любых задаваемых значениях в (2), (3), а если только выполняются определённые условия согласования. Выявлены условия на гладкость граничных функций, достаточные для решения задачи (1)–(3). Построено решение, при этом от коэффициентов рассматриваемого уравнения, как и уравнения (4), требуется лишь регулярность операторного пучка. Приведён пример решения задачи (1)–(3) с системой уравнений в частных производных по трём переменным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18. С. 3–50.
2. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М., 1976.
3. *Gunther M., Rentrop P.* PDAE-Netzwerkmodelle in der Elektrischen Schaltungssimulation. Karlsruhe, 1999 (Preprint/IWRMMM, № 99/3).
4. *Серов У.П., Корольков Б.П.* Динамика парогенераторов М., 1981.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц М., 1988.
6. *Campbell S.L.* The index of infinite dimensional implicit system // Math. and Comput. Model. of System. 1999. V. 5. № 1. P. 18–42.
7. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования. Новосибирск, 1988.
8. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.
9. *Kunkel P., Mehrmann V.* Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. Zurich, 2006.
10. *Сидоров Н.А., Романова О.А.* О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1516–1526.
11. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston; Tokyo; Keln, 2003.
12. *Зубова С.П., Чернышов К.И.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения и их применение. Институт физики и математики АН Литовской ССР. 1976. Т. 14. С. 21–39.
13. *Зубова С.П.* Свойства возмущенного фредгольмовского оператора. Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной // Деп. в ВИНИТИ. Воронежский гос. ун-т. Воронеж, 1991. № 2516-В91.
14. *Зубова С.П.* Решение однородной задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной // Докл. РАН. 2009. Т. 428. № 4. С. 444–446.
15. *Зубова С.П.* Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2013. № 2. С. 134–140.
16. Матемватическая экнциклопедия. Т. 3. Коо-Од. 1977–1985.
17. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов М., 1965.
18. *Нгуен Х.Д., Чистяков В.Ф.* О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2013. Т. 6. № 1. С. 98–111.
19. *Бормотова О.В., Гайдомак С.В., Чистяков В.Ф.* О разрешимости вырожденных систем дифференциальных уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. 2005. № 4. С. 18–29.
20. *Никольский С.М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1943. Т. 7. Вып. 3. С. 147–166.
21. *Зубова С.П., Усков В.И.* Приложения матрично-дифференциального оператора к решению задач для уравнений в частных производных // Итоги науки: избр. тр. Междунар. симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. М., 2017. Вып. 31. С. 3–24.

Воронежский государственный университет,
Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова

Поступила в редакцию 07.03.2022 г.
После доработки 18.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.