ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1205–1219

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛФЕРА

© 2022 г. Б. Ю. Иргашев

Рассмотрена задача типа Коши для уравнения высокого порядка с дробной производной в смысле Хилфера. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи в классе ограниченных функций, построенного с помощью автомодельных решений.

DOI: 10.31857/S0374064122090047, EDN: CHVYQA

1. Введение и построение автомодельных решений. Рассмотрим следующее уравнение дробного порядка:
$$D_{0y}^{\alpha_1,\beta_1}u(x,y)-\mu D_{0x}^{\alpha_2,\beta_2}u(x,y)=0, \tag{1}$$
здесь $q-1<\alpha_1\leqslant q,\ \ p-1<\alpha_2\leqslant p,\ \ q<p,\ \ q,p\in\mathbb{N},\ \ 0\leqslant\beta_1\leqslant 1,\ \ 0\leqslant\beta_2\leqslant 1,\ \ \mu<0,\ \ D_{0t}^{\alpha,\beta}$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Хилфера порядка α и типа β (см. [1])
$$D_{0t}^{\alpha,\beta}u=I_{0t}^{\beta(s-\alpha)}\frac{\partial^s}{\partial t^s}(I_{0t}^{(1-\beta)(s-\alpha)}u),$$
или
$$D_{0t}^{\alpha,\beta}u=D_{0t}^{-\beta(s-\alpha)}\frac{\partial^s}{\partial t^s}(D_{0t}^{-(1-\beta)(s-\alpha)}u),$$
где $s-1<\alpha\leqslant s,\ \ 0\leqslant\beta\leqslant 1,\ \ s\in\mathbb{N},\ \ I_{0t}^{\gamma}$ – оператор дробного интегрирования, а D_{0t}^{γ} – оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка γ, определяемый соотношением [2, с. 28]
$$D_{0t}^{\gamma}\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\gamma)}\displaystyle\int\limits_0^t\frac{\varphi(\tau)d\tau}{|t-\tau|^{\gamma+1}}, & \gamma<0,\\ \varphi(t), & \gamma=0,\\ \dfrac{d^{[\gamma]+1}}{dt^{[\gamma]+1}}D_{0t}^{\gamma-[\gamma]-1}\varphi(t), & \gamma>0,\end{cases}$$
в котором $[\gamma]$ – целая часть числа γ.

Заметим, что в уравнении (1) при $\beta=0$ имеем дробную производную Римана–Лиувилля, а при $\beta=1$ – дробную производную Капуто.

В работе [3] методами специальных операторов были найдены автомодельные решения уравнения с постоянными коэффициентами, содержащие дробные производные в смысле Римана–Лиувилля. Для уравнения с обычной производной вида
$$\frac{\partial^p u(x,y)}{\partial x^p}-\frac{\partial^q u(x,y)}{\partial y^q}=0,\quad p<q,$$
автомодельные решения были построены в статье [4].

Отметим, что различные начально-краевые задачи для уравнения с дробной производной Хилфера изучались в работах [5–7] и др.

Найдём один из видов автомодельных решений уравнения (1). Справедлива следующая

Лемма 1. *Если* $\mu < 0$, $-\alpha_1\gamma_j + b + 1 + \beta_1(\alpha_1 - q) > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\gamma_j = (j - (1-\beta_2)(p-\alpha_2))/\alpha_2$, $j = \overline{0, p-1}$, *то автомодельные решения уравнения (1) при* $x > 0$, $y > 0$ *имеют вид*

$$u_j(x,y) = x^{\alpha_2\gamma_j} y^{-\alpha_1\gamma_j + b} e^{\alpha_2\gamma_j + 1, -\alpha_1\gamma_j + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right), \tag{2}$$

где

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)\Gamma(\delta - \beta n)}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha > \beta, \quad z \in \mathbb{C},$$

– функция типа Райта [8, с. 23] или обобщённая функция Райта [3].

Доказательство. Найдём частные производные от функции (2), входящие в уравнение (1). Для упрощения записи индекс j при параметре γ будем пропускать. Использовав формулу (2.2.12) из [8], получим

$$D^{-\beta_1(q-\alpha_1)}_{0y} \frac{\partial^q}{\partial y^q} D^{-(1-\beta_1)(q-\alpha_1)}_{0y}\left(x^{\alpha_2\gamma} y^{-\alpha_1\gamma + b} e^{\alpha_2\gamma+1, -\alpha_1\gamma + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right) =$$

$$= x^{\alpha_2\gamma}\left(y^{-\alpha_1\gamma + b - \alpha_1} e^{\alpha_2\gamma+1, -\alpha_1\gamma + b - \alpha_1 + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right), \tag{3}$$

а с помощью формул (1.2.7) и (2.2.17) –

$$D^{-\beta_2(p-\alpha_2)}_{0x} \frac{\partial^p}{\partial x^p} D^{-(1-\beta_2)(p-\alpha_2)}_{0x}\left(x^{\alpha_2\gamma} y^{-\alpha_1\gamma + b} e^{\alpha_2\gamma+1, -\alpha_1\gamma + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right) =$$

$$= D^{-\beta_2(p-\alpha_2)}_{0x} D^{p-(1-\beta_2)(p-\alpha_2)}_{0x}\left(x^{\alpha_2\gamma} y^{-\alpha_1\gamma + b} e^{\alpha_2\gamma+1, -\alpha_1\gamma + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right) =$$

$$= D^{-\beta_2(p-\alpha_2)}_{0x}\left(y^{-\alpha_1\gamma + b} x^{\alpha_2\gamma - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2)} e^{\alpha_2\gamma - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2) + 1, -\alpha_1\gamma + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right).$$

Применив формулу (2.2.3) из [8], будем иметь

$$e^{\alpha_2\gamma - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2) + 1, -\alpha_1\gamma + b + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1} e^{\alpha_2\gamma + 1 - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2) + \alpha_2, -\alpha_1\gamma + b + 1 - \alpha_1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right),$$

а формулу (2.2.17) –

$$\frac{1}{\mu} D^{-\beta_2(p-\alpha_2)}_{0x}\left(y^{-\alpha_1\gamma + b - \alpha_1} x^{\alpha_2\gamma - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2) + \alpha_2} \times\right.$$

$$\left.\times\, e^{\alpha_2\gamma - p + (1-\beta_2)(p-\alpha_2) + \alpha_2 + 1, -\alpha_1\gamma + b + 1 - \alpha_1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu} y^{-\alpha_1\gamma + b - \alpha_1} x^{\alpha_2\gamma} e^{\alpha_2\gamma + 1, -\alpha_1\gamma + b - \alpha_1 + 1}_{\alpha_2,\alpha_1}\left(\frac{1}{\mu} x^{\alpha_2} y^{-\alpha_1}\right). \tag{4}$$

Подставив выражения (3) и (4) в уравнение (1), получим верное равенство. Лемма доказана.

Отметим, что при $\beta = 0$ представление (2) совпадает с результатами из работы [3].

Пусть теперь в представлении (2) $\alpha_2 = p \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 = \alpha$, $q-1 < \alpha \leqslant q \in \mathbb{N}$, $q < p$, тогда автомодельными решениями уравнения

$$D_{0y}^{\alpha,\beta} u(x,y) - \mu \frac{\partial^p u(x,y)}{\partial x^p} = 0, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{5}$$

будут выражения вида

$$u_i(x,y) = y^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{-n} (xy^{-\alpha/p})^{pn+i}}{\Gamma(-\alpha n - \alpha i/p + b + 1)(pn+i)!}, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

Рассмотрим их линейную комбинацию

$$u(x,y) = y^b \sum_{i=0}^{p-1} c_i u_i(x,y), \quad c_i \in \mathbb{C},$$

и пусть коэффициенты c_i такие, что $c_i = c^i$, $c^p = 1/\mu$, т.е. в качестве параметра c выберем любой из корней уравнения $c^p = 1/\mu$. В результате получим семейство из p функций

$$u(x,y) = y^b \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b+1; cxy^{-\alpha/p}\biggr), \tag{6}$$

здесь

$$\phi(-\delta, \varepsilon; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(-\delta k + \varepsilon)}$$

– функция Райта [9].

Теперь выясним, в каких случаях выражение (6) удовлетворяет уравнению (5). Справедлива следующая

Лемма 2. *Если* $(1+\alpha/p)\pi/2 < |\arg c| \leqslant \pi$, *то представление (6) удовлетворяет уравнению (5).*

Доказательство. Учитывая лемму 2.1 из работы [10], имеем

$$D_{0y}^{-\beta(q-\alpha)} \frac{\partial^q}{\partial y^q} D_{0y}^{-(1-\beta)(q-\alpha)} \biggl(y^b \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b+1; cxy^{-\alpha/p}\biggr)\biggr) =$$

$$= D_{0y}^{-\beta(q-\alpha)} \biggl(y^{b+(1-\beta)(q-\alpha)-q} \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b+1+(1-\beta)(q-\alpha)-q; cxy^{-\alpha/p}\biggr)\biggr) =$$

$$= y^{b-\alpha} \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b-\alpha+1; cxy^{-\alpha/p}\biggr). \tag{7}$$

Далее непосредственным вычислением убеждаемся, что для $s \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$y^b \frac{\partial^s}{\partial x^s} \biggl(\phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b+1; cxy^{-\alpha/p}\biggr)\biggr) = y^b \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(cy^{-\alpha/p})^n x^{n-s}}{(n-s)!\Gamma(-\alpha n/p + b + 1)} =$$

$$= c^s y^{b-\alpha s/p} \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b - \frac{\alpha}{p}s + 1; cy^{-\alpha/p}x\biggr), \tag{8}$$

из которого следует, что

$$y^b \frac{\partial^p}{\partial x^p} \biggl(\phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b+1; cxy^{-\alpha/p}\biggr)\biggr) = \frac{1}{\mu} y^{b-\alpha} \phi\biggl(-\frac{\alpha}{p}, b-\alpha+1; cy^{-\alpha/p}x\biggr). \tag{9}$$

Подставив (7) и (9) в уравнение (5), получим верное равенство. Лемма доказана.

2. Задача с начальными условиями и её решение. В этом пункте в области
$$D = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < T\}, \quad 0 < T < +\infty,$$
для уравнения
$$L[u(x, y)] = D^{\alpha,\beta}_{0y} u(x, y) - (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} u(x, y)}{\partial x^{2n}} = 0, \tag{10}$$
где $n = 1, 2, \ldots,$ если $0 < \alpha \leqslant 1$, и $n = 2, 3, \ldots,$ если $1 < \alpha < 2$, рассмотрим задачу с начальными условиями типа Коши.

Задача Коши для уравнений с дробными производными Джрбашяна–Нерсесяна и Римана–Лиувилля рассматривалась, соответственно, в работах [10, 11] и [12], идеи которых использованы в настоящем исследовании. Следует также отметить статьи [13–16], где изучен вопрос о разрешимости задачи типа Коши для уравнений с дробными производными Капуто и Римана–Лиувилля и с целыми производными второго порядка.

Так как $\lambda_k^{2n} = (-1)^{n-1}$, где $\lambda_k = e^{(2k-n+1)i\pi/(2n)}$, $k = \overline{0, n-1}$, то с учётом леммы 2 и неравенства
$$\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{2n}\right) < |\arg(-\lambda_k)| \leqslant \pi, \quad k = \overline{0, n-1},$$
функции вида
$$u_k(x, y) = y^b \phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, b + 1; -\lambda_k |x| y^{-\alpha/(2n)}\right), \quad b \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{11}$$
удовлетворяют уравнению (10) в области D.

Рассмотрим следующую линейную комбинацию решений (11):
$$\Gamma_b(x - \xi, y) = \frac{y^b}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, b + 1; -\lambda_k |x - \xi| y^{-\alpha/(2n)}\right). \tag{12}$$
Вещественнозначность функции (12) следует из работы [12, лемма 2]. Отметим также, что функция $\Gamma_b(x - \xi, y - \eta)$ при $b = \alpha - 1 - \alpha/(2n)$ является фундаментальным решением уравнения (10) при $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\beta = 0$ (см. [12]). Изучим некоторые свойства функции $\Gamma_b(x - \xi, y - \eta)$.

Лемма 3. *Справедливы следующие соотношения:*

1) при всех $s \in \mathbb{N}$
$$\frac{\partial^s \Gamma_b(x - \xi, y)}{\partial x^s} = -(\operatorname{sgn}(x - \xi))^s \frac{y^{b-\alpha s/(2n)}}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (-\lambda_k)^{s+1} \phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, b - \frac{\alpha s}{2n} + 1; -\lambda_k |x - \xi| y^{-\alpha/(2n)}\right);$$

2) $\dfrac{\partial^{2n} \Gamma_b(x - \xi, y)}{\partial x^{2n}} = (-1)^{n-1} \Gamma_{b-\alpha}(x - \xi, y);$

3) $\lim\limits_{x-\xi\to+0} \dfrac{\partial^s \Gamma_b(x - \xi, y)}{\partial x^s} - \lim\limits_{x-\xi\to-0} \dfrac{\partial^s \Gamma_b(x - \xi, y)}{\partial x^s} = \begin{cases} 0, & s = \overline{0, 2n-2}, \\ \dfrac{(-1)^n y^{b-\alpha+\alpha/(2n)}}{\Gamma(b + \alpha/(2n) - \alpha + 1)}, & s = 2n - 1; \end{cases}$

4) $D^{\alpha}_{0y} \Gamma_b(x - \xi, y) = \Gamma_{b-\alpha}(x - \xi, y);$

5) $\left|\dfrac{\partial^s \Gamma_b(x - \xi, y)}{\partial x^s}\right| \leqslant C|x - \xi|^{-\theta} y^{b+\alpha(\theta-s)/(2n)}$, *где* $y > 0$, $s \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $C = C(\alpha, b, \theta, s)$,
$$\theta \leqslant \begin{cases} 0, & \dfrac{\alpha s}{2n} - b - 1 \notin \mathbb{N}_0, \\ -1, & \dfrac{\alpha s}{2n} - b - 1 \in \mathbb{N}_0; \end{cases}$$

6) при $|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)} \to +\infty$

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}\Gamma_b(x-\xi,y)\right| \leqslant Cy^{b-\alpha s/(2n)}\exp(-\nu|x-\xi|^{2n/(2n-\alpha)}y^{-\alpha/(2n-\alpha)}),$$

где C *– положительная постоянная, не зависимая от* x, ξ, y, *а*

$$\nu < \left(1-\frac{\alpha}{2n}\right)\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\alpha/(2n-\alpha)}\cos\left(\frac{n-1}{2n-\alpha}\pi\right);$$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\,d\xi = \frac{y^{b+\alpha/(2n)}}{\Gamma(\alpha/(2n)+b+1)}.$

Доказательство.

1) Использовав формулу (8), имеем

$$\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s} = \frac{y^b}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\frac{\partial^s}{\partial x^s}\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b+1;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right) =$$

$$= -(\operatorname{sgn}(x-\xi))^s\frac{y^{b-\alpha s/(2n)}}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(-\lambda_k)^{s+1}\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b-\frac{\alpha s}{2n}+1;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right).$$

2) Справедливость этого пункта следует из свойства 1) при $s=2n$.

3) Из свойства 1) следует, что

$$\lim_{x-\xi\to+0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s} - \lim_{x-\xi\to-0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s} =$$

$$= \frac{y^{b-\alpha s/(2n)}}{2n\Gamma(b-\alpha s/(2n)+1)}\left(-\sum_{k=0}^{n-1}(-\lambda_k)^{s+1}+(-1)^s\sum_{k=0}^{n-1}(-\lambda_k)^{s+1}\right).$$

Если $s=2m$, $m\in\mathbb{N}$, то

$$\lim_{x-\xi\to+0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s} - \lim_{x-\xi\to-0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s} = 0.$$

Если $s=2m-1$, $m=\overline{1,n-1}$, то

$$\lim_{x-\xi\to+0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s} - \lim_{x-\xi\to-0}\frac{\partial^s\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s} = -\frac{y^{b-\alpha s/(2n)}}{n\Gamma(b-\alpha s/(2n)+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{2m} =$$

$$= -\frac{y^{b-\alpha s/(2n)}}{n\Gamma(b-\alpha s/(2n)+1)}e^{-(nm+m)i\pi/n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{2kmi\pi/n} = 0.$$

Наконец, если $s=2n-1$, то

$$\lim_{x-\xi\to+0}\frac{\partial^{2n-1}\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^{2n-1}} - \lim_{x-\xi\to-0}\frac{\partial^{2n-1}\Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^{2n-1}} = \frac{(-1)^n y^{b+\alpha/(2n)-\alpha}}{\Gamma(b+\alpha/(2n)-\alpha+1)}.$$

4) Из леммы 2.1 работы [10] находим

$$D_{0y}^{\alpha}\Gamma_b(x-\xi,y) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k D_{0y}^{\alpha}\left(y^b\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b+1;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k y^{b-\alpha}\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b-\alpha+1;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right) = \Gamma_{b-\alpha}(x-\xi,y).$$

5) Используя оценку из [10, формула (2.11)]

$$|y^{\varepsilon-1}\phi(-\delta,\varepsilon;\lambda x y^{-\delta})| \leqslant C x^{-\theta} y^{\varepsilon-1+\delta\theta}, \quad \theta \geqslant \begin{cases} 0, & -\varepsilon \notin \mathbb{N}_0, \\ -1, & -\varepsilon \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

получим

$$\left|\frac{\partial^s \Gamma_b(x-\xi,y)}{\partial x^s}\right| \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}|\lambda_k|^{s+1}\left|y^{b-\alpha s/(2n)}\phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, b-\frac{\alpha s}{2n}+1; -\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C|x-\xi|^{-\theta}y^{b+\alpha(\theta-s)/(2n)}.$$

6) Учитывая оценку из [10, формула (2.8)], при $|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)} \to +\infty$

$$|\phi(-\delta,\varepsilon;z)| \leqslant C\exp(-\nu|z|^{1/(1-\delta)}), \quad C = C(\delta,\varepsilon,\nu), \tag{13}$$

где $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

$$\nu < (1-\delta)\delta^{\delta/(1-\delta)}\cos\frac{\pi-|\arg z|}{1-\delta}, \quad \frac{1+\delta}{2}\pi < |\arg z| \leqslant \pi,$$

и свойство 1), имеем

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}\Gamma_b(x-\xi,y)\right| \leqslant C y^{b-\alpha s/(2n)} \max_{k=\overline{0,n-1}}\left|\phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, b-\frac{\alpha s}{2n}+1; -\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C y^{b-\alpha s/(2n)} \max_{k=\overline{0,n-1}} \exp(-\nu|x-\xi|^{2n/(2n-\alpha)}y^{-\alpha/(2n-\alpha)}),$$

где

$$\nu < \left(1-\frac{\alpha}{2n}\right)\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\alpha/(2n-\alpha)}\cos\left(\frac{\pi-|\arg(-\lambda_k)|}{1-\alpha/(2n)}\right).$$

Так как

$$\min_{k=\overline{0,n-1}}\cos\left(\frac{\pi-|\arg(-\lambda_k)|}{1-\alpha/(2n)}\right) = \cos\left(\frac{n-1}{2n-\alpha}\pi\right),$$

то справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}\Gamma_b(x-\xi,y)\right| \leqslant C y^{b-\alpha s/(2n)}\exp(-\nu|x-\xi|^{2n/(2n-\alpha)}y^{-\alpha/(2n-\alpha)}),$$

где

$$\nu < \left(1-\frac{\alpha}{2n}\right)\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\alpha/(2n-\alpha)}\cos\left(\frac{n-1}{2n-\alpha}\pi\right).$$

7) Используя равенство (см. [10, формула (2.12)])

$$\int_0^{+\infty}\phi(-\delta,\varepsilon;\lambda x)\,dx = -\frac{1}{\lambda\Gamma(\delta+\varepsilon)}, \tag{14}$$

имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\,d\xi = \frac{y^b}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int_{-\infty}^{+\infty}\phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)d\xi =$$

$$= \frac{y^b}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\Big[\int\limits_{-\infty}^{x}\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k(x-\xi)y^{-\alpha/(2n)}\Big)\,d\xi +$$

$$+\int\limits_{x}^{+\infty}\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k(\xi-x)y^{-\alpha/(2n)}\Big)\,d\xi\Big]. \qquad (15)$$

Вычислим каждый интеграл в отдельности. Для этого в первом интеграле сделаем замену переменных по формулам $t=(x-\xi)y^{-\alpha/(2n)}$, $\xi = x - y^{\alpha/(2n)}t$, $d\xi = -y^{\alpha/(2n)}\,dt$. Тогда будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k(x-\xi)y^{-\alpha/(2n)}\Big)\,d\xi =$$

$$= y^{\alpha/(2n)}\int\limits_{0}^{+\infty}\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k t\Big)\,d\xi = \frac{y^{\alpha/(2n)}}{\lambda_k\Gamma(\alpha/(2n)+b+1)}. \qquad (16)$$

Аналогично для второго интеграла получим

$$\int\limits_{x}^{+\infty}\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k(\xi-x)y^{-\alpha/(2n)}\Big)\,d\xi = \frac{y^{\alpha/(2n)}}{\lambda_k\Gamma(\alpha/(2n)+b+1)}. \qquad (17)$$

Подставив выражения (16) и (17) в (15), получим равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\,d\xi = \frac{y^{b+\alpha/(2n)}}{\Gamma(\alpha/(2n)+b+1)}.$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего изложения введём функцию

$$\Phi(b+1,b;-\lambda_k t) = \Big(\frac{\alpha}{2n}+b\Big)\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k t\Big) - \phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b; -\lambda_k t\Big), \quad b,t\in\mathbb{R},$$

здесь предполагается, что множитель $\alpha/(2n)+b$ не меняется, могут изменяться вторые параметры у функций Райта. Например, запись $\Phi(b+1+s, b+s; -\lambda_k t)$ означает следующее:

$$\Phi\Big(b+1+s, b+s; -\lambda_k t\Big) = \Big(\frac{\alpha}{2n}+b\Big)\phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+1+s; -\lambda_k t\Big) - \phi\Big(-\frac{\alpha}{2n}, b+s; -\lambda_k t\Big).$$

Отметим некоторые свойства этой функции.

Лемма 4. *Справедливы следующие соотношения:*

1) $\dfrac{d}{dt}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t) = -\lambda_k\Phi\Big(b+1-\dfrac{\alpha}{2n}, b-\dfrac{\alpha}{2n}; -\lambda_k t\Big)$;

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi\Big(b+1+\frac{\alpha s}{2n}, b+\frac{\alpha s}{2n}; -\lambda_k t\Big)\,dt =$

$$= \frac{b+\alpha/(2n)}{\lambda_k}\bigg(\frac{1}{\Gamma(b+1+\alpha(s+1)/(2n))} - \frac{1}{(b+\alpha/(2n))\Gamma(b+\alpha(s+1)/(2n))}\bigg);$$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_{0}^{+\infty}t^{2s}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)\,dt = 0, \quad s=\overline{0,n-1}.$

Доказательство.

1) Следует из формулы (см. [10, 17])

$$\frac{d}{dz}\phi(\delta,\varepsilon;z)=\phi(\delta,\varepsilon+\delta;z)\quad(\delta>-1).$$

2) Следует из формулы (14).

3) Учитывая свойство 1) леммы 4, неравенство (13), и используя метод интегрирования по частям, имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_0^{+\infty}t^{2s}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)\,dt=-\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{+\infty}t^{2s}d\Phi\biggl(b+1+\frac{\alpha}{2n},b+\frac{\alpha}{2n};-\lambda_k t\biggr)=$$

$$=2s\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{+\infty}\Phi\biggl(b+1+\frac{\alpha}{2n},b+\frac{\alpha}{2n};-\lambda_k t\biggr)t^{2s-1}\,dt.$$

Повторив этот процесс ещё $2s-1$ раз, получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_0^{+\infty}t^{2s}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2s)!}{\lambda_k^{2s-1}}\int\limits_0^{+\infty}\Phi\biggl(b+1+\frac{\alpha s}{n},b+\frac{\alpha s}{n};-\lambda_k t\biggr)\,dt=$$

$$=\frac{(2s)!}{\Gamma(b+\alpha(2s+1)/(2n))}\biggl(\frac{\alpha+2nb}{\alpha(2s+1)+2nb}-1\biggr)e^{i(n-1)s\pi/n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-2\pi iks/n}=0.$$

Последнее равенство выполняется при $s=\overline{1,n-1}$. Справедливость свойства 3) леммы 4 при $s=0$ следует из свойства 2) этой же леммы. Лемма доказана.

Исследуем теперь задачи с начальными условиями для уравнения (10).

Задача 1. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (10) в области $D=\{(x,y):-\infty<x<+\infty,$ $0<y<T\}$, удовлетворяющее условиям:

1) $0<\alpha\leqslant 1$;

2) $D_{0y}^{\alpha,\beta}u(x,y),\ \dfrac{\partial^{2n}u(x,y)}{\partial x^{2n}}\in C(D)$;

3) $y^{(1-\beta)(1-\alpha)}u(x,y)\in C(\overline{D})$;

4) $\lim\limits_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(1-\alpha)}u(x,y))=\varphi(x)$.

Заданная функция удовлетворяет ограничению

$$\varphi(x)\in C(\mathbb{R}),\quad |\varphi(x)|\leqslant M,\quad 0<M-\mathrm{const}. \tag{18}$$

Задача 2. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (10) в области D, удовлетворяющее условиям:

1) $1<\alpha<2$;

2) $D_{0y}^{\alpha,\beta}u(x,y),\dfrac{\partial^{2n}u(x,y)}{\partial x^{2n}}\in C(D)$, $y^{(1-\beta)(2-\alpha)}u(x,y)\in C^1(\overline{D})$;

3) $\lim\limits_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}u(x,y))=\varphi(x)$;

4) $\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{\partial}{\partial y}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}u(x,y))=\psi(x)$. Заданные функции удовлетворяют ограничениям

$$\varphi^{(2n)}(x),\psi(x)\in C(\mathbb{R}),\quad |\psi(x)|,|\varphi^{(j)}(x)|\leqslant M \tag{19}$$

для любых $x\in\mathbb{R}$, $j=\overline{0,2n}$, $0<M-\mathrm{const}$.

Существование решений задач 1 и 2 следует из следующих теорем.

Теорема 1. *Решение задачи 1 определяется формулой*

$$u(x,y)=\Gamma(1-(1-\beta)(1-\alpha))\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{20}$$

где

$$b=-\frac{\alpha}{2n}-(1-\beta)(1-\alpha). \tag{21}$$

Доказательство. Сначала покажем, что функция (20) удовлетворяет уравнению (10). Используя закон композиции операторов дробного интегро-дифференцирования и обобщённую формулу Ньютона–Лейбница ([8, с. 15]), получим

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi=D_{0y}^{-\beta(1-\alpha)}D_{0y}^{1-(1-\beta)(1-\alpha)}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg)=$$

$$=D_{0y}^{\alpha}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg)-\frac{y^{\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\lim_{y\to 0}D_{0y}^{-(1-\beta)(1-\alpha)}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg). \tag{22}$$

Покажем, что выражение (22) имеет смысл. Отметим, что при $b\in\mathbb{R}$, $y>0$ в силу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi=\int\limits_{-\infty}^{-K}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{-K}^{K}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_{K}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi$$

и свойств 5), 6) из леммы 3 имеем

$$\bigg|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg|<\infty, \tag{23}$$

где $0<K$ – достаточное большое число. Учитывая это, находим

$$D_{0y}^{\alpha}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y\frac{1}{(y-t)^{\alpha}}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg)dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\bigg(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y\frac{\Gamma_b(x-\xi,t)}{(y-t)^{\alpha}}\,dt\bigg)d\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}D_{0y}^{\alpha}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

В силу (23) все выкладки законны. Используя свойство 4) леммы 3, имеем

$$D_{0y}^{\alpha}\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\bigg)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b-\alpha}(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{24}$$

Последний интеграл существует в силу свойств 5) и 6) леммы 3. Далее, учитывая свойство 7) леммы 3, получим

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{-(1-\beta)(1-\alpha)}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\biggr)=\lim_{y\to 0}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+(1-\beta)(1-\alpha)}(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\biggr)=$$

$$=\varphi(x)\lim_{y\to 0}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\,d\xi\biggr)+\lim_{y\to 0}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi\biggr)=$$

$$=\varphi(x)+\lim_{y\to 0}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi\biggr).$$

Теперь вычислим предел в последней сумме:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi,$$

$$I_2=\int\limits_{x+\varepsilon}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi,$$

$$I_3=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi.$$

Учитывая свойство 6) леммы 3 и (18), находим

$$\lim_{y\to 0}I_1=\lim_{y\to 0}I_2=0,\quad |I_3|\leqslant C\sup_{s\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}|\varphi(s)-\varphi(x)|,\quad \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\Bigl|\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\Bigr|\,d\xi\leqslant C.$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$ и произвольности ε имеем $\lim\limits_{y\to 0}I_3=0$. Значит,

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b-\alpha}(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{y^{\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\varphi(x). \tag{25}$$

Теперь вычислим частную производную по переменной x. Учитывая свойства 2) и 3) леммы 3, получим

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{x}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\biggr)=$$

$$=(-1)^{n-1}\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b-\alpha}(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{y^{\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\biggr). \tag{26}$$

Подставив (25) и (26) в уравнение (10), получим тождество.

Покажем справедливость соотношения 4) задачи 1. Имеем

$$\Gamma(1-(1-\beta)(1-\alpha))\lim_{y\to+0}\left(y^{(1-\beta)(1-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)=$$

$$=\Gamma(1-(1-\beta)(1-\alpha))\lim_{y\to+0}(J_1+J_2+J_3),$$

где

$$J_1=y^{(1-\beta)(1-\alpha)}\left(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{+\infty}\right)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\Gamma_b(x-\xi,y)\,d\xi,$$

$$J_2=y^{(1-\beta)(1-\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\Gamma_b(x-\xi,y)(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi,$$

$$J_3=y^{(1-\beta)(1-\alpha)}\varphi(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\,d\xi.$$

Из свойств 6) и 7) леммы 3, а также из (18) и (21) следует, что

$$\lim_{y\to+0}J_1=\lim_{y\to+0}J_2=0,\quad \lim_{y\to+0}J_3=\frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-(1-\beta)(1-\alpha))},$$

откуда

$$\lim_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(1-\alpha)}u(x,y))=\varphi(x).$$

Условие 3) задачи 1 вытекает из непрерывности функции $\varphi(x)$ и соотношения 4) задачи 1. Теорема доказана.

Теорема 2. *Решение задачи 2 определяется формулой*

$$u(x,y)=\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha))\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi, \qquad (27)$$

здесь $b=-\alpha/(2n)-(1-\beta)(2-\alpha)$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1 покажем, что первое слагаемое в представлении (27) удовлетворяет уравнению (10), т.е.

$$L\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right]=0, \qquad (28)$$

и условию

$$\lim_{y\to+0}\left(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)=\varphi(x). \qquad (29)$$

Проверим, что второе слагаемое в представлении (27) тоже удовлетворяет уравнению (10). Действуя так же как и в доказательстве теоремы 1 (формулы (22)–(25)), имеем

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\Bigg)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1-\alpha}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{y^{\beta(2-\alpha)-1}}{\Gamma(\beta(2-\alpha))}\lim_{y\to+0}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\Bigg)-$$

$$-\frac{y^{\beta(2-\alpha)-2}}{\Gamma(\beta(2-\alpha)-1)}\lim_{y\to+0}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{1-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\Bigg)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1-\alpha}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi+\frac{y^{\beta(2-\alpha)-1}\psi(x)}{\Gamma(\beta(2-\alpha))}. \tag{30}$$

Здесь учтены условия (19), свойство 6) леммы 3 и равенства

$$\lim_{y\to+0}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\,d\xi\Bigg)=1,\quad \lim_{y\to+0}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{1-\alpha/(2n)}(x-\xi,y)\,d\xi\Bigg)=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\Gamma(2)}=0,$$

которые следуют из свойства 7) леммы 3. Найдём частные производные по переменной x. Использовав свойство 3) леммы 3, запишем

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\Bigg)=\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{x}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\Bigg)=$$

$$=(-1)^{n-1}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1-\alpha}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi+\frac{y^{\beta(2-\alpha)-1}\psi(x)}{\Gamma(\beta(2-\alpha))}\Bigg). \tag{31}$$

Из (30) и (31) следует

$$L\Bigg[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\Bigg]=0. \tag{32}$$

Учитывая (28) и (32), получим $L[u(x,y)]=0$.

Теперь проверим выполнение условия 3) задачи 2. Из леммы 3 и (19) имеем

$$\lim_{y\to+0}\Bigg(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\Bigg)=$$

$$=\lim_{y\to+0}\Bigg(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{+\infty}+\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\Bigg)\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)(\psi(\xi)-\psi(x))\,d\xi\Bigg)+$$

$$+\lim_{y\to+0}\Bigg(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\psi(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\,d\xi\Bigg)=0. \tag{33}$$

Из (29) и (33) следует, что $\lim\limits_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}u(x,y))=\varphi(x)$.

Осталось проверить условие 4) задачи. Найдём

$$I=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-b-\alpha/(2n)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)\right)=$$

$$=\left(-\frac{\alpha}{2n}-b\right)\lim_{y\to 0}\left(y^{-b-1-\alpha/(2n)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)+\lim_{y\to 0}\left(y^{-b-\alpha/(2n)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{b-1}(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\left(y^{-b-1-\alpha/(2n)}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{\alpha}{2n}+b\right)\Gamma_b(x-\xi,y)-y\Gamma_{b-1}(x-\xi,y)\right)\varphi(\xi)\,d\xi\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2n}\lim_{y\to 0}y^{-1-\alpha/(2n)}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\biggl[\biggl(\int\limits_{-\infty}^{x}+\int\limits_{x}^{+\infty}\biggr)\biggl(\left(\frac{\alpha}{2n}+b\right)\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b+1;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)-$$

$$-\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},b;-\lambda_k|x-\xi|y^{-\alpha/(2n)}\right)\biggr)\varphi(\xi)\,d\xi\biggr].$$

В первом интеграле сделаем замену переменных по формулам

$$t=(x-\xi)y^{-\alpha/(2n)},\quad \xi=x-ty^{\alpha/(2n)},\quad d\xi=-y^{\alpha/(2n)}\,dt,$$

а во втором – по формулам

$$t=(\xi-x)y^{-\alpha/(2n)},\quad \xi=x+ty^{\alpha/(2n)},\quad d\xi=y^{\alpha/(2n)}\,dt.$$

В результате получим

$$I=-\frac{1}{2n}\lim_{y\to 0}y^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)(\varphi(x-y^{\alpha/(2n)}t)+\varphi(x+y^{\alpha/(2n)}t))\,dt. \tag{34}$$

С учётом свойства 3) леммы 4 и формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\varphi(x-y^{\alpha/(2n)}t)=\sum_{s=0}^{2n-1}(-1)^s\frac{\varphi^{(s)}(x)}{s!}(y^{\alpha/(2n)}t)^s+\frac{\varphi^{(2n)}(x-\theta y^{\alpha/(2n)}t)}{(2n)!}y^{\alpha}t^{2n},\quad 0<\theta<1,$$

$$\varphi(x+y^{\alpha/(2n)}t)=\sum_{s=0}^{2n-1}\frac{\varphi^{(s)}(x)}{s!}(y^{\alpha/(2n)}t)^s+\frac{\varphi^{(2n)}(x+\mu y^{\alpha/(2n)}t)}{(2n)!}y^{\alpha}t^{2n},\quad 0<\mu<1,$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)(\varphi(x-y^{\alpha/(2n)}t)+\varphi(x+y^{\alpha/(2n)}t))\,dt=$$

$$=\frac{y^{\alpha}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\int\limits_{0}^{+\infty}t^{2n}\Phi(b+1,b;-\lambda_k t)(\varphi^{(2n)}(x+\mu y^{\alpha/(2n)}t)+\varphi^{(2n)}(x-\theta y^{\alpha/(2n)}t))\,dt. \tag{35}$$

Учитывая оценку (13), условие (19), соотношение (35) и $1<\alpha<2$, находим

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-b-\alpha/(2n)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)\right)=0.$$

Осталось проверить справедливость равенства

$$J = \Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha)) \lim_{y\to+0} \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{(1-\beta)(2-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)\,d\xi\right) = \psi(x).$$

Действительно, действуя так же как при получении представления (34) и используя свойство 2) леммы 4, имеем

$$J = -\frac{\Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha))}{2n} \lim_{y\to+0} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \int\limits_0^{+\infty} \Phi(b+2,b+1;-\lambda_k t)(\psi(x-y^{\alpha/(2n)}t)+\psi(x+y^{\alpha/(2n)}t))\,dt =$$

$$= -\psi(x)\frac{\Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha))}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \int\limits_0^{+\infty} \Phi(b+2,b+1;-\lambda_k t)\,dt =$$

$$= -\psi(x)\frac{\Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha))}{n} \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b+\alpha/(2n)}{\Gamma(b+2+\alpha/(2n))} - \frac{1}{\Gamma(b+1+\alpha/(2n))}\right) =$$

$$= -\Gamma(b+2+\alpha/(2n))\left(\frac{b+\alpha/(2n)}{\Gamma(b+2+\alpha/(2n))} - \frac{1}{\Gamma(b+1+\alpha/(2n))}\right)\psi(x) = \psi(x).$$

Предельный переход в интеграле законен в силу (13), (19). Теорема доказана.

3. Единственность решений. Покажем единственность решений задач 1 и 2 при некоторых дополнительных условиях. Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи 1 (задачи 2) с условиями:*

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)|\,dx < \infty$;

2) $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{\partial^j u(x,y)}{\partial x^j} = 0,\ \ j=\overline{0,2n-1}.$

Тогда это решение единственно при $y>0$.

Доказательство. Покажем единственность решения задачи 2 (единственность задачи 1 доказывается аналогично). Пусть существуют два решения задачи 2 с условиями 1) и 2) (теорема 3). Обозначим их разность через $v(x,y)$. Тогда функция $v(x,y)$ есть решение следующей задачи:

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}v(x,y) - (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n}v(x,y)}{\partial x^{2n}} = 0, \quad \lim_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}v(x,y)) = 0,$$

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial}{\partial y}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}v(x,y)) = 0. \tag{36}$$

Применим преобразование Фурье

$$F_x[v](\xi,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(x,y)e^{ix\xi}\,dx = \widehat{v}(\xi,y),$$

$$F_x\left[\frac{\partial^{2n}v(x,y)}{\partial x^{2n}}\right](\xi,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{2n}v(x,y)}{\partial x^{2n}}e^{ix\xi}\,dx = (-1)^n\xi^{2n}\widehat{v}(\xi,y).$$

С учётом (36) получим задачу

$$D_{0y}^{\alpha,\beta}\widehat{v}(\xi,y) = -\xi^{2n}\widehat{v}(\xi,y), \quad \lim_{y\to+0}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\widehat{v}(\xi,y)) = 0, \quad \lim_{y\to+0}\frac{\partial}{\partial y}(y^{(1-\beta)(2-\alpha)}\widehat{v}(\xi,y)) = 0.$$

Из работы [18, лемма 1] следует, что $\widehat{v}(\xi,y)\equiv 0$. Значит (см. [19, теорема 120, с. 183]) $v(x,y)\equiv$ $\equiv 0$ п.в. Так как $y^{(1-\beta)(2-\alpha)}v(x,y)\in C^1(\bar{D})$, то $v(x,y)\equiv 0$ при $y>0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hilfer R.* Fractional time evolution // Appl. of Fract. Calc. in Phys. 2000. P. 87–130.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
3. *Luchko Yu., Gorenflo R.* Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order // Fract. Calc. and Appl. Anal. 1998. V. 1. № 1. P. 63–78.
4. *Иргашев Б.Ю.* Построение частных решений с особенностями, выраженных через гипергеометрические функции, для уравнения с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 328–336.
5. *Kim M.-Ha., Chol-Ri G., Chol O.H.* Operational method for solving multi-term fractional differential equations with the generalized fractional derivatives // Fract. Calc. and Appl. Anal. 2014. V. 17. № 1. P. 79–95.
6. *Karimov E.T.* Tricomi type boundary value problem with integral conjugation condition for a mixed type equation with Hilfer fractional operator // Bull. of the Inst. of Math. 2019. № 1. P. 19–26.
7. *Salakhitdinov M.S., Karimov E.T.* Direct and inverse source problems for two-term time-fractional diffusion equation with Hilfer derivative // Uzbek Math. J. 2017. № 4. P. 140–149.
8. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.
9. *Wright E.M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. V. 8. № 29. P. 71–79.
10. *Pskhu A.V.* Fundamental solutions and cauchy problems for an odd-order partial differential equation with fractional derivative // Electr. J. of Differ. Equat. 2019. V. 2019. № 21. P. 1–13.
11. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. мат. 2009. Т. 73. № 2. С. 141–182.
12. *Карашева Л.Л.* Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временно́й переменной // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 696–706.
13. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 599–609.
14. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля // Докл. РАН. 2006. Т. 406. № 1. С. 12–16.
15. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Условия существования классического решения задач Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Докл. РАН. 2007. Т. 414. № 4. С. 451–454.
16. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц.уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 660–670.
17. *Wright E.M.* The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1940. V. 11. № 1. P. 36–48.
18. *Kadirkulov B.J., Jalilov M.A.* On a nonlocal problem for a fourth-order mixed-type equation with the Hilfer operator // Bull. of the Karaganda Univ. Math. ser. 2021. V. 104. № 4. P. 89–102.
19. *Титчмарш Э.Ч.* Введение в теорию интегралов Фурье. М., 1948.

Наманганский инженерно-строительный институт,
Республика Узбекистан,
Институт математики имени В.И. Романовского
АН Республики Узбекистан, г. Ташкент

Поступила в редакцию 30.01.2022 г.
После доработки 16.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.