ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1226–1233

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.28+517.968.78

О СИСТЕМАХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЖДЕСТВЕННО ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ПЕРЕД ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

© 2022 г. М. В. Булатов, Л. С. Соловарова

Рассмотрены линейные однородные системы интегро-дифференциальных и интегральных уравнений с матрицами-ядрами Вольтерры и Фредгольма с нулевыми начальными условиями. Исследован случай, когда искомая вектор-функция зависит от одного (интегро-дифференциальные системы) и двух (системы интегральных уравнений) аргументов и матрица перед главной частью является квадратной и тождественно вырожденной. Подчеркнуто принципиальное отличие рассматриваемых систем от систем, разрешённых относительно главной части, в существовании не только тривиального решения. В терминах матричных пучков и полиномов сформулированы достаточные условия, при выполнении которых задачи для рассматриваемых систем имеют только тривиальное решение. Приведены иллюстративные примеры.

DOI: 10.31857/S0374064122090060, EDN: CIBLSD

Введение. Системы различных классов интегральных и интегро-дифференциальных уравнений описывают важные прикладные задачи, чем и обусловлены интерес к их исследованию и большое количество публикаций по данной тематике. Конкретные прикладные задачи, библиографию и исторический обзор можно найти в специальной учебной литературе [1–3] и в монографиях [4–8].

Как правило, исследование существования и единственности решения таких задач приведены для случая, когда система разрешена относительно главной части. Значительно меньше исследованы системы с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Исключение составляют лишь интегральные уравнения Вольтерры первого рода. К настоящему времени созданы алгоритмы решения этих задач только для частных случаев. Детальную библиографию, исторический обзор и описание трудностей, возникающих при создании и обосновании численных методов решения интегральных уравнений первого рода, можно найти в работах [4–9].

Разработка качественной теории – формулировка условий существования и единственности решения в различных классах функций, а также разработка численных методов решения систем интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерры с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью – только начинает зарождаться. Число публикаций по этой теме насчитывает первые десятки статей (см., например, [10–12] и приведённую в них библиографию). Исследований аналогичного класса задач с матрицами-ядрами типа Вольтерры и Фредгольма практически нет. Эти факторы и послужили мотивацией для написания данной статьи.

В работе приведены формулировки двух видов систем интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью и подчеркнуты их принципиальные отличия от классических постановок задач для систем, разрешённых относительно главной части.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородную задачу

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \int_0^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \mu\int_0^1 L(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $K(t,\tau)$, $L(t,\tau)$ – вещественные $n\times n$-матрицы, $x(t)$ – заданная и искомая n-мерная вектор-функция, μ – вещественный параметр.

В данной работе рассмотрен случай, когда

$$\det A \equiv 0. \tag{3}$$

Всюду далее предполагается, что элементы $A(t)$, $B(t)$, $K(t,\tau)$ и $L(t,\tau)$ обладают достаточной гладкостью, необходимой для проведения выкладок. Под *решением задачи* (1), (2) будем понимать любую непрерывно-дифференцируемую вектор-функцию, которая обращает равенство (1) в тождество и удовлетворяет условию (2).

Если исходная система (1) является неоднородной, то при $K(t,\tau)\equiv L(t,\tau)\equiv 0$ и $A(t)\not\equiv 0$ имеем дифференциально-алгебраические уравнения, а при $A(t)\equiv 0$, $L(t,\tau)\equiv 0$ будем иметь один из четырёх случаев:

1) систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода при $\det B(t)\neq 0$ для любого $t\in[0,1]$;

2) систему интегральных уравнений Вольтерры третьего рода при $\det B(t_j)=0$, $j=\overline{1,p}$, $t_j\in[0,1]$;

3) интегро-алгебраические уравнения, если $\det B(t)\equiv 0$, но при условии, что $B(t)$ не является тождественно нулевой матрицей;

4) систему интегральных уравнений Вольтерры первого рода при нулевой матрице $B(t)$.

Исследование неоднородной задачи (1) с заданными начальными условиями при $L(t,\tau)\equiv 0$ на предмет существования и единственности решения, а также создание численных методов её решения описаны в статьях [13, 14].

Из самой постановки задачи видно, что нулевая вектор-функция является решением данной задачи. Ниже сформулируем условия, гарантирующие существование только тривиального решения поставленных задач.

В данной работе также затронут вопрос о существовании только тривиального решения двумерных систем интегральных уравнений вида

$$C(s,q)u(s,q)+\int\limits_0^s\int\limits_0^q M(s,q,r,l)u(r,l)\,dl\,dr+\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1 N(s,q,r,l)u(r,l)\,dl\,dr=0, \tag{4}$$

где $0\leqslant r\leqslant s\leqslant 1$, $0\leqslant l\leqslant q\leqslant 1$, $C(\cdot)$, $M(\cdot)$, $N(\cdot)$ – $n\times n$-матрицы, θ – скалярный параметр, $u(s,q)$ – n-мерная вектор-функция, и

$$\det C(s,q)\equiv 0. \tag{5}$$

Системы (1), (2) и (4) для которых выполнены условия (3) и (5) соответственно, принципиально отличаются от систем, разрешённых относительно главной части, т.е. с условием $\det A(t)\neq 0$ для любого $t\in[0,1]$ и $\det C(s,q)\neq 0$ при всех $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$. Они могут иметь бесконечно много решений при любых μ и θ, а в неоднородном случае могут быть неустойчивыми к возмущениям входных данных или не иметь достаточно гладкого решения. Таким образом, рассматриваемая задача относится к классу некорректных.

Приведём конкретные примеры.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}'+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+$$

$$+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(\tau)\\x_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau+\mu\int\limits_0^1\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(\tau)\\x_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$x_1(0)=x_2(0)=0.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что данная задача имеет множество решений $x_1 = \psi(t)$, $x_2 = -\psi'(t)$ при любом значении $\mu \in (-\infty, \infty)$, где $\psi(t)$ – любая функция, удовлетворяющая условиям $\psi(0) = \psi'(0)$ и $\int_0^1 \psi(t)dt = 0$.

Пример 2. Неоднородная система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \mu \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

имеет единственное решение при любых значениях $\mu \in (-\infty, \infty)$.

В самом деле, из второго уравнения в (6)

$$\int_0^t x_1(\tau)\, d\tau = f_2(t)$$

имеем $x_1(t) = f_2'(t)$. При этом должно быть выполнено

$$f_2(0) = 0. \tag{7}$$

Продифференцируем первое уравнение в (6):

$$x_1' + x_1 + \int_0^t x_2(\tau)\, d\tau + \int_0^1 x_2(\tau)\, d\tau = f_1(t)$$

и получим $x_1''(t) + x_1'(t) + x_2(t) = f_1'(t)$. В силу того что, $x_1(t) = f_2'(t)$, имеем $x_2(t) = f_1'(t) - f_2''(t) - f_2'''(t)$. Отметим, что данная система имеет единственное решение, которое не зависит от начальных условий (2)

Рассмотрим теперь возмущённую задачу (6):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(\tau) \\ \tilde{x}_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \mu \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(\tau) \\ \tilde{x}_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix},$$

где $\|\tilde{f}_1(t) - f_1(t)\|_C \leqslant \delta$, $\|\tilde{f}_2(t) - f_2(t)\|_C \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Легко заметить, что при $\tilde{f}_2(t) = f_2(t) + \delta \sin(t/\delta^2)$ погрешность $\|\tilde{x}_1(t) - x_1(t)\|_{C_{\delta\to 0}} \to \infty$, а при $\tilde{f}_2 = f_2 + \delta \cos(t)$ возмущённая задача не имеет решения в классе непрерывно-дифференцируемых функций, так как $\tilde{f}_2(0) \neq 0$ (нарушено условие (7)).

Пример 3. В качестве решения задачи

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \mu \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

можно взять вектор-функцию $(0, \varphi'(t))^{\mathrm{T}}$, где $\varphi(t)$ – любая достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 0$.

Перейдём теперь к системе (4). Точно также, как и задача (1), (2) с условием (3), она принципиально отличается от систем, разрешённых относительно главной части (интегральных уравнений второго рода). Приведём некоторые примеры.

Пример 4. Рассмотрим неоднородную систему (4) вида

$$\begin{pmatrix}\varsigma(s,q) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(s,q)\\ u_2(s,q)\end{pmatrix}+\int\limits_0^s\int\limits_0^q\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(r,l)\\ u_2(r,l)\end{pmatrix}dl\,dr+$$

$$+\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1\begin{pmatrix}\psi(s,q,r,l) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(r,l)\\ u_2(r,l)\end{pmatrix}dl\,dr=\begin{pmatrix}\varphi_1(s,q)\\ \varphi_2(s,q)\end{pmatrix}, \tag{8}$$

которая имеет единственное решение при любых достаточно гладких входных данных и любом $\theta\in(-\infty,\infty)$ (предположение на правую часть сделано по ходу изложения).

В самом деле, из второго уравнения $\int_0^s\int_0^q u_1(r,l)\,dl\,dr=\varphi_2(s,q)$ системы (8) вытекает, что

$$u_1(s,q)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial q}\varphi_2(s,q),$$

при этом должно выполняться $\varphi_2(0,q)=\varphi_2(s,0)=0.$

Подставив это выражение в первое уравнение (8), получим

$$\varsigma(s,q)u_1(s,q)+\int\limits_0^s\int\limits_0^q u_2(r,l)\,dl\,dr+\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1\psi(s,q,r,l)u_1(r,l)\,dl\,dr=\varphi_1(s,q),$$

т.е.

$$u_2(s,q)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial q}\Big[\varphi_1(s,q)-\varsigma(s,q)u_1(s,q)-\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1\psi(s,q,r,l)u_1(r,l)\,dl\,dr\Big].$$

Итак, решение данной системы зависит от смешанных производных высоких порядков входных данных, а функция $\varsigma(s,q)$ может обращаться в нуль, и этот факт не означает наличия сингулярных точек.

Похожая на предыдущую система

$$\begin{pmatrix}\varsigma(s,q) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(s,q)\\ u_2(s,q)\end{pmatrix}+\int\limits_0^s\int\limits_0^q\begin{pmatrix}u_1(r,l)\\ u_2(r,l)\end{pmatrix}dl\,dr+$$

$$+\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & N(s,q,r,l)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(r,l)\\ u_2(r,l)\end{pmatrix}dl\,dr=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{9}$$

будет иметь сингулярные точки, если функция $\varsigma(s,q)=0$ в некоторых точках области $[0,1]\times\times[0,1]$ обращается в нуль. Если взять $\varsigma(s,q)=-sq,$ то решением первого уравнения данного примера, помимо тривиального, является функция $u_1(r,l)=1.$ Также в зависимости от того как задана функция $N(s,q,r,l)$ и скаляр θ второе уравнение системы (9) может иметь нетривиальное решение. Например, при $\theta=1$ и $N(s,q,r,l)\equiv1$ любая функция

$$u_2(r,l)=(r-0.5)^{2k+1}+(l-0.5)^{2m+1},$$

где $k,$ m – любые целые неотрицательные числа, является решением.

В следующем пункте приведены достаточные условия существования только тривиального решения задачи (1), (3).

2. Условия существования только тривиального решения. Для дальнейшего изложения потребуются определения и вспомогательные утверждения из теории матричных пучков и полиномов.

Определение 1 [15, 16]. Матричный полином $p^2A(t)+pB(t)+C(t)$, где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – $n\times n$-матрицы, p – скаляр, имеет простую структуру на отрезке $[0,1]$, если:

1) $\operatorname{rank} A(t)=k_0=\mathrm{const}$ для любого $t\in[0,1]$;

2) $\operatorname{rank}(A(t)|B(t))=k_0+k_1=\mathrm{const}$ при любом $t\in[0,1]$;

3) $\det(p^2A(t)+pB(t)+C(t))=a_0(t)p^{2k_0+k_1}+a_1(t)p^{2k_0+k_1-1}+\ldots,$ где $a_0(t)$ – функция, причём $a_0\neq 0$, t – любое значение из отрезка [0,1].

Лемма 1 [15, 16, 13]. *Если матричный полином $p^2A(t)+pB(t)+C(t)$ имеет простую структуру на отрезке $[0,1]$ и элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ принадлежат классу $C^k_{[0,1]}$, то существует невырожденная для любого $t\in[0,1]$ матрица $P(t)$ такая, что*

$$P(t)(p^2A(t)+pB(t)+C(t))=p^2\begin{pmatrix}A_1(t)\\0\\0\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}B_1(t)\\B_2(t)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\\C_3(t)\end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$ – $k_0\times n$-матрицы, $B_2(t)$, $C_2(t)$ – $k_1\times n$-матрицы, C_3 – $(n-k_0-k_1)\times n$-матрица, причём

$$\det\begin{pmatrix}A_1(t)\\\alpha B_2(t)\\\beta C_3(t)\end{pmatrix}\neq 0\quad\text{для любых}\quad t\in[0,1]\quad\text{и}\quad \alpha,\beta\neq 0.$$

Для квадратных матриц, элементы которых зависят от двух аргументов, приведём результаты из теории матричных пучков.

Определение 2 (см., например, [17, с. 52]). Матричный пучок $\lambda C(s,q)+D(s,q)$ удовлетворяет критерию "ранг–степень" в области $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$, если:

1) $\operatorname{rank} C(s,q)=k_0=\mathrm{const}$ для любых $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$;

2) $\det(\lambda C(s,q)+D(s,q))=a_0(s,q)\lambda^{k_0}+a_1(s,q)\lambda^{k_0-1}+\ldots+a_k(s,q)$,

где $a_0(s,q)$ – функция, не обращающаяся в нуль при любых $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$.

Лемма 2 [17, с. 32]. *Если матричный пучок $\lambda C(s,q)+D(s,q)$ удовлетворяет критерию "ранг–степень" в области $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$ и элементы матриц $C(s,q)$ и $D(s,q)$ являются непрерывными функциями в заданной области, то существует невырожденная $n\times n$-матрица с непрерывными элементами $P(s,q)$ такая, что*

$$P(s,q)(\lambda C(s,q)+D(s,q))=\lambda\begin{pmatrix}C_1(s,q)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}D_1(s,q)\\D_2(s,q)\end{pmatrix},\qquad(10)$$

где C_1, D_1 – $k_0\times n$-матрицы, D_2 – $(n-k_0)\times n$-матрица, λ – действительный параметр.

Лемма 3 [10]. *Матрица $\begin{pmatrix}C_1(s,q)\\\alpha D_2(s,q)\end{pmatrix}$ из леммы 1 является невырожденной для любых $(s,q)\in[0,1]\times[0,1]$ и любого скаляра $\alpha\neq 0$.*

Перед формулировкой условий существования достаточно гладкого решения рассматриваемого класса задач приведём ещё два факта.

Утверждение 1. *Если у задачи (1), (2) элементы входных данных достаточно гладкие, $\det A(t)\neq 0$ при всех $t\in[0,1]$, то при $|\mu|<\mu_0$ она имеет только тривиальное решение.*

Утверждение 2. *Система интегральных уравнений*

$$u(s,q)+\int\limits_0^r A_1(s,q,r)u(s,r)\,dr+\int\limits_0^s A_2(s,q,l)u(l,q)\,dl+$$

$$+\int\limits_0^s\int\limits_0^q A_3(s,q,r,l)u(r,l)\,dl\,dr+\theta\int\limits_0^1\int\limits_0^1 A_4(s,q,r,l)u(r,l)\,dl\,dr=0,$$

где $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant l \leqslant q \leqslant 1$, $A_j(\cdot)$, $j = \overline{1,4}$, *–* $n \times n$*-матрицы с непрерывными в области определения элементами,* θ *– скалярный параметр, при* $|\theta| \leqslant \theta_0$ *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство этих фактов следует из принципа сжатых отображений (см., например, [1, с. 74; 2, с. 52]).

Сформулируем достаточные условия существования решения рассматриваемых задач.

Утверждение 3. *Пусть для задачи (1), (2) выполнены условия:*

1) элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $K(t,\tau)$, $L(t,\tau)$ *и* $f(t)$ *– дважды непрерывно дифференцируемые функции (для матриц* $K(t,\tau)$, $L(t,\tau)$ *– по совокупности элементов);*

2) матричный полином $p^2A(t) + pB(t) + K(t,t)$ *имеет простую структуру на отрезке* $[0,1]$.

Тогда при $|\mu| \leqslant m_0$ *данная задача имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Умножим систему (1) на матрицу $P(t)$ такую, что матрица

$$P(t)(p^2A(t) + pB(t) + K(t,t))$$

имеет блочный вид

$$P(t)(p^2A(t) + pB(t) + K(t,t)) = p^2 \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1(t,t) \\ K_2(t,t) \\ K_3(t,t) \end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$, $K_1(t,t)$ – $k_0 \times n$-матрицы, $B_2(t)$, $K_2(t,t)$ – $k_1 \times n$-матрицы, $K_3(t,t)$ – $n \times (n - k_0 - k_1)$-матрица, $\operatorname{rank} A(t) = k_0$, $\operatorname{rank}(A(t)|B(t)) = k_0 + k_1$. Существование такой матрицы гарантируют условия утверждения и лемма 1.

Используя результат леммы 1, распишем в блочном виде систему

$$P(t)\left(A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \mu\int\limits_0^1 L(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\right) = \tag{11}$$

$$= A_1(t)x'(t) + B_1(t)x(t) + \int\limits_0^t K_1(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \mu\int\limits_0^1 L_1(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = 0,$$

$$B_2(t)x(t) + \int\limits_0^t K_2(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \mu\int\limits_0^1 L_2(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = 0, \tag{12}$$

$$\int\limits_0^t K_3(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \mu\int\limits_0^1 L_3(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = 0, \tag{13}$$

где

$$P(t)L(t,\tau) = \begin{pmatrix} L_1(t,\tau) \\ L_2(t,\tau) \\ L_3(t,\tau) \end{pmatrix}, \quad P(t)f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя (12), (13) по t один и два раза соответственно и объединяя полученные уравнения с уравнениями (11), получаем систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \\ K_3(t,t) \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \bar{B}_2(t) \\ \bar{B}_3(t) \end{pmatrix} x(t) + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} K_1(t,\tau) \\ \bar{K}_2(t,\tau) \\ \bar{K}_3(t,\tau) \end{pmatrix} x(\tau)\,d\tau + \mu\int\limits_0^1 \begin{pmatrix} L_1(t,\tau) \\ \bar{L}_2(t,\tau) \\ \bar{L}_3(t,\tau) \end{pmatrix} x(\tau)\,d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

с начальным условием $x(0) = 0$, элементы матриц которой являются непрерывными функциями в силу первого условия утверждения. Из условий утверждения и леммы 1 следует, что блочная матрица

$$\begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \\ K_3(t,\tau) \end{pmatrix}$$

у системы (14) является невырожденной для любого $t \in [0,1]$. Из утверждения 1 вытекает, что система (14) при $|\mu| \leqslant \mu_0$ и $x(0) = 0$ имеет только тривиальное решение. Утверждение доказано.

Если в точках нарушается второе условие утверждения 2, то через данные точки может проходить несколько решений. Для иллюстрации этого факта достаточно рассмотреть простейший пример с матрицами

$$A(t) = \operatorname{diag}(a_{11}(t), 0, 0), \quad B(t) = \operatorname{diag}(1, b_{22}(t), 0),$$
$$K(t,\tau) = \operatorname{diag}(0, 1, K_{33}(t,\tau)), \quad L(t,\tau) \equiv 0. \tag{15}$$

Дифференциальные уравнения

$$(t - t_j)x'(t) - dx(t) = 0, \quad x(0) = 0, \tag{16}$$

где d – натуральное число, $t_j \in [0,1)$, $j = \overline{1,3}$, имеют решения $x = 0$ при $t \in [0, t_j)$ и $x = c(t - t_j)^d$ при $t \in [t_j, 1]$, где c – любое число.

Положим $j = 3$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^{\text{т}}$ и $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < 1$. Записав (16) при $j = 2$ и $j = 3$ в виде интегральных уравнений Вольтерры второго и первого рода соответственно и объединив полученные уравнения в систему (1) с матрицами (15), получим, что в точках $t_j \in [0,1)$ происходит нарушение условий второго утверждения (соответственно изменяется $\operatorname{rank} A(t)$ в точке t_1, изменяется $\operatorname{rank}(A(t)|B(t)$ в точке t_2 и функция $a_0(t_3) = 0$).

Утверждение 4. *Пусть для задачи (4) выполнены условия:*

1) элементы входных данных достаточно гладкие;

2) матричный пучок $\lambda C(s,q) + M(s,q,s,q)$ удовлетворяет критерию “ранг–степень”.

Тогда, начиная с некоторого $|\theta| \leqslant \theta_0$, рассматриваемая задача имеет единственное решение.

Доказательство утверждения 4 основано на леммах 2 и 3 и проводится аналогично доказательству утверждения 3.

Заключение. В статье приведены достаточные условия существования только тривиального решения для однородных систем интегро-дифференциальных (с нулевыми начальными данными) и интегральных уравнений с тождественно вырожденной главной частью. Данные условия сформулированы в терминах матричных полиномов и пучков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-51-S52003-а),

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
2. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. М., 1975.
3. *Бельтюков Б.А.* Некоторые вопросы теории приближённых методов решения интегральных уравнений. Иркутск, 1994.
4. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. М., 1978.
5. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерры I рода: теория и численные методы. Новосибирск, 1999.
6. *Brunner H., Houwen P. van der.* The Numerical Solution of Volterra Equations. Amsterdam; New York, 1986.

7. *Brunner H.* Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. Cambridge, 2004.
8. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Philadelphia, 1985.
9. *Тен Мен Ян.* Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерры I рода: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 1985.
10. *Bulatov M.V., Lima P.M.* Two-dimensional integral-algebraic systems: analysis and computational methods // J. of Comput. and Appl. Math. 2011. V. 236. № 2. P. 132–140.
11. *Brunner H., Hui L.* Collocation methods for integro-differential algebraic equations with index 1// IMA J. Numer. Anal. 2020. V. 40(2). P. 850–885.
12. *Chistyakova E.V., Chistyakov V.F.* Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // Appl. Numer. Math. 2020. V. 149. P. 43–51.
13. *Булатов М.В., Чистякова Е.В.* Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1248–1255.
14. *Булатов М.В., До Тиен Тхань.* Методы типа Адамса для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2014. Т. 7. № 3. С. 93–106.
15. *Булатов М.В.* Об одном семействе матричных троек // Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий: матер. конф. Иркутск, 2002. С. 10.
16. *Булатов М.В., Минг-Гонг Ли.* Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1299–1306.
17. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск, 1996.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 05.11.2020 г.
После доработки 24.05.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.