ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1234–1241

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.642.2

КОЛЛОКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОСОБЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

 Н. С. Габбасов

Исследовано линейное интегро-дифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для нахождения его приближённого решения в пространстве обобщённых функций предложены и обоснованы специальные варианты обобщённого метода коллокации.

DOI: 10.31857/S0374064122090072, EDN: CIHAHE

Настоящая работа посвящена отысканию приближённого решения линейного интегро-дифференциального уравнения (ИДУ)

$$Ax \equiv x^{(p)}(t)\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j}+\int\limits_{-1}^{1}K(t,s)x(s)\,ds=y(t), \tag{1}$$

где $t\in I\equiv[-1,1]$, числа $t_j\in(-1,1)$, $m_j\in\mathbb{N}$ $(j=\overline{1,q})$ и $p\in Z^+$ являются фиксированными; K и y – известные непрерывные функции, обладающие определёнными свойствами "гладкости" точечного характера, а x – искомая функция. Очевидно, что задача о нахождении решения ИДУ (1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, возникает вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность этой задачи. При рассмотрении этого вопроса вполне естественно учитывать, что при $p=0$ ИДУ (1) представляет собой линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле уравнения являются "родственными"). Последнее встречается в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1; 2, с. 121–129] и содержащуюся в них библиографию), в теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также в теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщённых функций типа D или V. Под D (соответственно V) понимается пространство обобщённых функций, построенных с помощью функционала "дельта-функция Дирака" (соответственно функционала "конечная часть интеграла по Адамару"). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114].

ИДУ (1) при $q=1$, $t_1=0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нётера для такого уравнения в классах гладких и обобщённых функций типа D. В статье [8] разработана полная теория разрешимости общего ИДУ (1) в некотором пространстве типа D обобщённых функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A), обоснован прямой проекционный метод приближённого решения, основанный на применении стандартных полиномов. Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближённого решения в пространствах обобщённых функций с соответствующим теоретическим обоснованием.

В данной статье разработаны обобщённые варианты метода коллокации на основе специальных полиномов, приспособленные к приближённому решению ИДУ (1) в пространстве типа D обобщённых функций. Основное внимание уделено обоснованию исследуемых методов в смысле [9, гл. 1], т.е. доказаны теоремы существования и единственности решения соответствующего приближённого уравнения, установлены оценки погрешности приближённого решения и доказана безусловная сходимость последовательности приближённых решений к точному решению однозначно разрешимого ИДУ (1). Также исследованы вопросы устойчивости и обусловленности аппроксимирующих уравнений.

1. Пространства основных и обобщённых функций. Пусть $C \equiv C(I)$ – банахово пространство всех непрерывных на отрезке I функций с обычной max-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Следуя работе [10], будем считать, что функция $f \in C$ принадлежит классу $C\{m;0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$, если в точке $t=0$ существует тейлоровская производная $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (естественно считаем, что $C\{0;0\} \equiv C$). Построим основное в наших исследованиях пространство:

$$Y \equiv C\{m,p;0\} \equiv \{y \in C\{m;0\} : y^{\{i\}}(0)=0, \quad i=\overline{0,p-1}\},$$

где число $p \in Z^+$ удовлетворяет неравенству $p < m$.

Введём в пространстве Y норму

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{i=p}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)|, \tag{2}$$

где $T : Y \to C$ – “характеристический” оператор класса Y, определяемый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0)t^i/i!\right]t^{-m} \equiv H(t) \in C \quad (H(0) \equiv \lim_{t\to 0} H(t)).$$

Лемма 1 [8]. *i) Включение $y \in Y$ равносильно выражению*

$$y(t) = t^m H(t) + \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i, \tag{3}$$

причём $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t=0$, а $y^{\{i\}}(0) = \alpha_i i!$ $(i=\overline{p,m-1})$.

ii) Пространство Y по норме (2) полно и нормально вложено в пространство C.

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на множестве I функций, в котором определим норму

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)| \quad (z \in C^{(p)}), \tag{4}$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$.

Лемма 2 [8]. *Пространство $C^{(p)}$ с нормой (4) полно и нормально вложено в пространство C.*

Следствие 1. *Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в $C^{(p)}$ и норма (4) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \geqslant 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \leqslant \|z\|_{C^{(p)}} \leqslant d\|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^{p} \|z^{(i)}\|_C$.*

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \{z \in C^{(p)} : z^{(i)}(-1) = 0 \ \ (i=\overline{0,p-1})\}$ – банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$ обобщённых функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \tag{5}$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(p)}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и её "тейлоровские" производные, действующие на пространстве Y основных функций по следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}, y) \equiv \int_{-1}^{1} \delta^{\{i\}}(t)y(t)dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0) \quad (y \in Y, \quad i = \overline{0, m-p-1}). \tag{6}$$

Очевидно, что векторное пространство X является банаховым относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-p-1} |\gamma_i|. \tag{7}$$

2. Обобщённый метод коллокации на основе полинома Бернштейна. Пусть задано ИДУ (1). Для сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать $q = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (t \in I), \tag{8}$$

$$V \equiv UD, \quad Df \equiv f^{(p)}(t), \quad Ug \equiv t^m g(t), \quad Kx \equiv \int_{-1}^{1} K(t,s)x(s)\,ds,$$

где $p \in N \bigcup \{0\}$, $m \in N$, $p < m$; $y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}$; ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\,\cdot\,, s) \in C, \quad K(t, \cdot\,) \in Y, \quad \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y \quad (i = \overline{0, m-p-1}), \tag{9}$$

а $x \in X$ – искомый элемент.

Приближённое решение ИДУ (8) будем искать в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+n+1}\delta^{\{i\}}(t), \tag{10}$$

$$g_n \equiv Jz_n, \quad z_n(t) \equiv 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{i} (t+1)^i (1-t)^{n-i} \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{11}$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1}z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^{t} (t-s)^{p-1} z(s)\,ds,$$

$\binom{n}{i} \equiv n!/(i!(n-i)!)$ $(i = \overline{0, n})$ – биномиальные коэффициенты. Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}$ $(j = \overline{0, n+m-p})$ найдём согласно нашему методу из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(n+m-p+1)$–го порядка:

$$c_k = (Ty - TKx_n)(\nu_k) \quad (k = \overline{0, n}), \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{p, m-1}), \tag{12}$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближённого решения, а узлы коллокации $\nu_k = \nu_k^{(n)} \in I$ вычисляются по формуле

$$\nu_k = -1 + 2k/n \quad (k = \overline{0, n}). \tag{13}$$

Прежде чем перейти к обоснованию предложенного метода (10)–(13), следуя работе [11], примем следующие полезные для оформления результатов соглашения. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant n_0)$ СЛАУ (12) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$, и последовательность приближённых решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (8) по норме пространства X” заменим простой фразой “метод (10)–(12) обоснованно применим к уравнению (8)”. Во-вторых, для погрешности приближённого решения введём специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|_X$; оценка этой величины определяет скорость сходимости приближённых решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (8).

Для вычислительного алгоритма (8)–(13) справедлива

Теорема 1. *Если однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в пространстве X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2 [8]), то прямой метод (10)–(12) обоснованно применим к уравнению (8), причём*

$$\Delta x_n^* = O\{\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \omega(f_i; \Delta_n) + \omega(Ty; \Delta_n)\}, \tag{14}$$

где $\omega(f; \Delta)$ – модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ $(0 < \Delta \leqslant 2)$, а $\omega_t(h; \Delta)$ – частный модуль непрерывности функции h по переменной t; $h \equiv T_t K$, $f_i \equiv T\psi_i$ $(i = \overline{0, m-p-1})$, $\Delta_n \equiv n^{-1/2}$.

Доказательство. Очевидно, что ИДУ (8) можно представить в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y \quad (x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}, \quad y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}),$$

в котором оператор $A : X \to Y$ непрерывно обратим.

Систему (10)–(12) требуется записать также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства. Именно, через $X_n \subset X$ обозначим $(n + m - p + 1)$-мерное подпространство элементов вида (10), а за $Y_n \subset Y$ примем класс $\operatorname{span}\{t^i\}_p^{n+m}$. Далее введём линейный оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m-p+1} : Y \to Y_n$ согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m-p+1}(y; t) \equiv (UB_nTy)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!}, \tag{15}$$

где $B_n : C \to \Pi_n \equiv \operatorname{span}\{t^i\}_0^n$ представляет собой оператор Бернштейна [12, с. 22] по системе узлов (13).

Покажем теперь, что система (10)–(12) равносильна линейному уравнению

$$A_n x_n \equiv Vx_n + \Gamma_n K x_n = \Gamma_n y \quad (x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n). \tag{16}$$

Пусть $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ – решение уравнения (16), т.е. $Vx_n^* + \Gamma_n \tau_n^* = 0$ $(\tau_n^* \equiv Kx_n^* - y)$. В силу равенств (10), (11) и (15) последнее означает, что

$$(U(z_n^* + B_nT\tau_n^*))(t) + \sum_{i=p}^{m-1} (\tau_n^*)^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!} \equiv 0. \tag{17}$$

На основании (3) очевидно, что тождество (17) эквивалентно системе

$$z_n^*(t) \equiv (B_n(Ty - TKx_n^*))(t), \quad (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{p, m-1}). \tag{18}$$

В левой и правой частях первого равенства системы (18) находятся полиномы Бернштейна некоторых функций соответственно со значениями c_k^* и $(Ty - TKx_n^*)$ в узлах (ν_k) $(k = \overline{0, n})$ из (13). Далее, с учётом (8) и $Vx_n^* = Uz_n^*$, имеем

$$(\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) \quad (i = \overline{p, m-1}, \quad \rho_n^* \equiv Ax_n^* - y).$$

Следовательно, система (18) принимает вид

$$c_k^* = (Ty - TKx_n^*)(\nu_k) \quad (k = \overline{0,n}), \quad (\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{p, m-1}). \tag{19}$$

Итак, СЛАУ (12) имеет решение $\{c_j^*\}_0^{n+m-p}$, т.е. решение уравнения (16) является решением системы (10)–(12).

С целью получения обратного утверждения соответствующие равенства в узлах в (19) умножаем на выражения

$$2^{-n}\binom{n}{i}(t+1)^i(1-t)^{n-i} \quad (i = \overline{0,n})$$

соответственно и затем почленно складываем, что приводит к системе (18). Далее достаточно провести изложенные выше рассуждения в обратном порядке.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (16). Для этих целей понадобится аппроксимативное свойство оператора Γ_n, которое устанавливает

Лемма 3. *Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка*

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \leqslant d_1\omega(Ty; \Delta_n)$$

(здесь и далее d_i $(i = \overline{1,3})$ – некоторые константы, значения которых не зависят от натурального числа n).

Справедливость леммы 3 следует из представления (3), определений (15), (2) и оценки [12, с. 245]:

$$\|f - B_n f\|_C \leqslant d_1\omega(f; \Delta_n) \quad (f \in C). \tag{20}$$

Покажем теперь "близость" операторов A и A_n на подпространстве X_n. Использовав уравнения (8) и (16), представления (3) и (15), норму (2), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n K x_n\|_Y = \|TKx_n - B_n TKx_n\|_C. \tag{21}$$

На основании (8), (5) и (6) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1}(-1)^i\gamma_i\psi_i(t).$$

Следовательно,

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1}(-1)^i c_{i+n+1}\psi_i(t),$$

и тогда справедливо равенство

$$TKx_n = \int_{-1}^{1} h(t,s)g_n(s)\,ds + \sum_{i=0}^{m-p-1}(-1)^i c_{i+n+1} f_i(t). \tag{22}$$

В силу (22), (20), леммы 2 и определения (7) последовательно выводим промежуточную оценку

$$\|TKx_n - B_n TKx_n\|_C \equiv \max_{t\in I}\left|\int_{-1}^{1}(h - B_n^t h)(t,s)g_n(s)\,ds + \sum_i (-1)^i c_{i+n+1}(f_i - B_n f_i)(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2d_1\|g_n\|_C\omega_t(h;\Delta_n)+\sum_i d_1|c_{i+n+1}|\omega(f_i;\Delta_n)\leqslant$$

$$\leqslant 2d_1\|g_n\|_{(p)}\omega_t(h;\Delta_n)+d_1\|x_n\|_X\sum_i\omega(f_i;\Delta_n)\leqslant$$

$$\leqslant d_2\biggl[\omega_t(h;\Delta_n)+\sum_i\omega(f_i;\Delta_n)\biggr]\|x_n\|_X \quad (d_2\equiv 2d_1). \tag{23}$$

Из (21) и (23) следует искомая оценка “близости” операторов A и A_n:

$$\varepsilon_n\equiv\|A-A_n\|_{X_n\to Y}\leqslant d_2\biggl[\omega_t(h;\Delta_n)+\sum_i\omega(f_i;\Delta_n)\biggr]. \tag{24}$$

Из теоремы 7 [9, с. 19] на основании оценки (24) и леммы 3 вытекает утверждение теоремы 1 с оценкой погрешности (14).

Следствие 2. *Если существуют ограниченные производные* $h_t^{(r)}$, $f_i^{(r)}$, $(Ty)^{(r)}$ $(r\geqslant 2)$, *то в условиях теоремы 1 верна оценка* $\Delta x_n^*=O(1/n)$.

3. Обобщённый метод коллокации на базе интерполяционного полинома Эрмита–Фейера. Приближённое решение задачи (8), (9) будем искать в виде

$$x_n(t)\equiv\biggl(J\biggl\{\sum_{i=0}^{2n-1}c_it^i\biggr\}\biggr)(t)+\sum_{i=0}^{m-p-1}c_{i+2n}\delta^{\{i\}}(t), \tag{25}$$

где $c_j=c_j^{(n)}$ $(j=\overline{0,2n+m-p-1})$ – подлежащие определению коэффициенты, которые находим из квадратной СЛАУ $(2n+m-p)$-го порядка:

$$(T\rho_n)(\lambda_k)=0,\quad (TUx_n)'(\lambda_k)=0\quad (k=\overline{1,n}),\quad \rho_n^{\{i\}}(0)=0\quad (i=\overline{p,m-1}), \tag{26}$$

где $\{\lambda_k\}$ – система узлов Чебышёва первого рода.

Пусть $F_n\equiv F_{2n+m-p}:Y\to Y_n\equiv\operatorname{span}\{t^i\}_p^{2n+m-1}$ – линейный оператор, сопоставляющий любой функции $y\in Y$ полином F_ny, однозначно определяемый условиями

$$(TF_ny-Ty)(\lambda_k)=0,\quad (TF_ny)'(\lambda_k)=0\quad (k=\overline{1,n}),$$

$$(F_ny-y)^{\{i\}}(0)=0\quad (i=\overline{p,m-1}).$$

На основании рассуждений, приведённых в работе [5, с. 29], несложно получить представление

$$F_ny\equiv F_{2n+m-p}(y;t)\equiv(U\Phi_nTy)(t)+\sum_{i=p}^{m-1}y^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!}, \tag{27}$$

где $\Phi_n:C\to\Pi_{2n-1}$ – оператор Эрмита–Фейера [12, с. 549] по системе $\{\lambda_k\}$ $(k=\overline{1,n})$.

Лемма 4. *Если функции* $y\in Y$ *и* Ty *принадлежат классу* $\operatorname{Lip}\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, *то справедлива оценка*

$$\|y-F_ny\|_Y\leqslant d_3n^{-\alpha/2}.$$

Доказательство следует из леммы 1, представлений (27), (2) и оценки (см., например, [13])

$$\|f-\Phi_nf\|_C\leqslant d_3n^{-\alpha/2}\quad (f\in\operatorname{Lip}\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1).$$

Для вычислительной схемы (8), (9), (25), (26) справедлива

Теорема 2. *Если* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ *в пространстве* X, *а функции* h *(по* t*),* f_i $(i = \overline{0, m-p-1})$, Ty *принадлежат классу* $\operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *то метод (25), (26) обоснованно применим к уравнению (8), и при этом* $\Delta x_n^* = O(n^{-\alpha/2})$.

Для доказательства данной теоремы достаточно повторить рассуждения, проведённые при доказательстве теоремы 1, с учётом того, что в этом случае система (25), (26) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$A_n x_n \equiv F_n A x_n = F_n y \quad (x_n \in \widetilde{X}_n, \quad F_n y \in \widetilde{Y}_n),$$

где $\widetilde{X}_n$ – подпространство всех образований x_n вида (25) таких, что $(TUx_n)'(\lambda_k) = 0$ $(k = \overline{1, n})$, а $\widetilde{Y}_n$ состоит из всех полиномов $y_n \in Y_n$, обладающих свойством $(Ty_n)'(\lambda_k) = 0$ $(k = \overline{1, n})$.

4. Замечания.

1. В силу определения нормы в $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) к $x^* = A^{-1}y$ в метрике $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ следует обычная сходимость в пространстве обобщённых функций, т.е. слабая сходимость.

2. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко получить из теорем 1 и 2, а именно, из них вытекают соответствующие простые следствия: 1) если исходные данные (h, f_i, Ty) уравнения (8) принадлежат классу $C^{(r)}$ $(r = 2, 3, \ldots)$, то в условиях теоремы 1 справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-1})$; 2) если же исходные данные принадлежат классу $\operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то при выполнении условий теоремы 2 верна оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-\alpha/2})$.

3. При $p = 0$ исследуемое ИДУ (8) является интегральным уравнением третьего рода с оператором

$$A : D\{m; 0\} \to C\{m; 0\},$$

а прямой метод (10)–(13) – специальным для УТР вариантом обобщённого метода коллокации. Следовательно, теорема 1 содержит в себе известные результаты [5, с. 98–100] по обоснованию специального варианта метода коллокации для решения УТР в классе $D\{m; 0\}$ обобщённых функций.

4. Если $m = p = 0$, то ИДУ (8) преобразуется в интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве C. При этом вычислительный алгоритм (10)–(13) становится известным вариантом метода коллокации (см. [14]), причём $Ty \equiv y$ и $h \equiv K$. Поэтому в данном случае оценка теоремы 1 совпадает с соответствующей уравнению второго рода в C оценкой статьи [14].

5. Суть предыдущих замечаний 3, 4 остаётся в силе и в случае прямого метода (25), (26).

6. Так как в условиях теорем 1 и 2 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида

$$\|A_n^{-1}\| = O(1) \quad (A_n^{-1} : Y_n \to X_n, \quad n \geqslant n_1),$$

то очевидно [9, с. 23, 24], что предложенные в данной работе прямые методы для ИДУ (8) устойчивы относительно малых возмущений исходных данных. Последнее позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперёд заданной степенью точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bart G.R., Warnock R.L.* Linear integral equations of the third-kind// SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М., 1972.
3. *Бжихатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче со смещением // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.

4. *Расламбеков С.Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщённых функций // Изв. вузов. Математика. 1983. № 10. С. 51–56.
5. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщённых функций. Казань, 2006.
6. *Замалиев Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2012.
7. *Абдурахман.* Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 2003.
8. *Габбасов Н.С.* Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 889–899.
9. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, 1980.
10. *Прессдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Мат. исследования. 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
11. *Габбасов Н.С.* Прямые методы решения интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 904–916.
12. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. М.; Л., 1949.
13. *Петерсен И.* О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1961. № 1. С. 3–12.
14. *Каспшицкая М.Ф., Тукалевская Н.И.* К вопросу о сходимости метода коллокации // Укр. мат. журн. 1967. Т. 19. № 4. С. 48–56.

Набережночелнинский институт Казанского
(Приволжского) федерального университета

Поступила в редакцию 29.12.2021 г.
После доработки 29.12.2021 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.