ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1242–1250

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.48

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЁННОГО ПРИНЦИПА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

© 2022 г. М. В. Николаев, А. А. Никитин, У. Дикман

Работа посвящена анализу системы нелинейных интегральных уравнений, возникающей в результате трёхпараметрического замыкания третьего пространственного момента в модели У. Дикмана и Р. Лоу в случае n-видового сообщества в N-мерном пространстве. Данная система для анализа её разрешимости представляется в виде операторного уравнения в банаховом пространстве специального вида. При помощи обобщённого принципа неподвижных точек формулируются достаточные условия существования нетривиального решения.

DOI: 10.31857/S0374064122090084, EDN: CIIPCT

Введение. В данной работе изучена система нелинейных интегральных уравнений, возникающая в модели популяционной динамики Дикмана–Лоу [1, 2] в случае многовидового сообщества:

$$0 = 2\delta_{ij}\overline{m}_i(x)N_i + [(\overline{m}_i + \overline{m}_j) * C_{ij}](x) - (\widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1-\widetilde{\alpha})(d_i + d_j) + \overline{w}_{ij}(x) + \overline{w}_{ji}(x))C_{ij}(x) -$$

$$- \widetilde{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{[\overline{w}_{ik} * C_{jk}](-x)}{N_j} + \frac{[\overline{w}_{jk} * C_{ik}](x)}{N_i}\right)C_{ij}(x) - \widetilde{\gamma}\sum_{k=1}^{n}\frac{[\overline{w}_{ik}C_{ik} * C_{kj}](x) + [\overline{w}_{jk}C_{kj} * C_{ik}](x)}{N_k} -$$

$$- \widetilde{\beta}N_iN_j\sum_{k=1}^{n}(s_{ik} + s_{jk})N_k, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Здесь $[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\,dy$ – свёртка функций f и g; $d_i > 0$ – естественная смертность вида i; $\overline{m}_i(x) = b_i m_i(x)$, где $m_i(x)$ – ядро разброса, а $b_i > 0$ – интенсивность рождаемости вида i; $\overline{w}_{ij}(x) = s_{ij}w_{ij}(x)$, где $w_{ij}(x)$ – ядро конкуренции, $s_{ij} \geqslant 0$ – сила конкуренции вида i по отношению к виду j. Ядра разброса и конкуренции являются неотрицательными интегрируемыми сферически симметричными функциями с L_1-нормой, равной единице, стремящимися к нулю на бесконечности. Кроме того, $\widetilde{\alpha} = \alpha/(\alpha+\gamma)$, $\widetilde{\beta} = \beta/(\alpha+\gamma)$, $\widetilde{\gamma} = \gamma/(\alpha+\gamma)$, где α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\alpha + \gamma \neq 0$. Все описанные выше величины известны, а под δ_{ij} понимается символ Кронекера. Числа N_i и функции $C_{ij}(x)$ – это неизвестные первые и вторые пространственные моменты сообщества соответственно, на которые накладываются дополнительные условия вида

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N} \to +\infty} C_{ij}(x) = N_iN_j, \quad i,j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Система (1) называется *системой уравнений равновесия*. Она представляет собой следствие бесконечной системы интегро-дифференциальных уравнений динамики пространственных моментов (вывод которой дан, например, в статье [3]) в случае трёхпараметрического замыкания третьего момента (см. [4]). Числа α, β и γ являются параметрами данного замыкания.

Решение системы описывает средние плотности популяций видов сообщества, а также пространственное распределение пар индивидов в стационарном случае (отсутствует динамика во времени).

Подобные задачи ранее исследовались авторами в работах [5] и [6], в которых рассматривался одновидовой случай, что приводило к одному интегральному уравнению. В первой статье к изучаемому уравнению для установления достаточных условий существования решения применялся обобщённый принцип Лере–Шаудера. Во второй статье введение пространств функций, интегрируемых с точностью до константы, позволило применить принцип Банаха. Идеи этих статей частично использованы в настоящей работе, но с применением более общего принципа неподвижных точек и принципа Лере–Шаудера–Банаха, предложенного М.А. Красносельским (см. [7]).

Основная цель работы – найти достаточные условия, гарантирующие существование нетривиального решения системы (1) с учётом условий (2). Для этого система рассматривается в виде единого операторного уравнения в терминах некоторого специального банахова пространства. После этого оператор, порождённый уравнением, исследуется на предмет наличия неподвижных точек. Кроме того, показывается, что неподвижная точка исследуемого оператора не может быть тривиальной. Заметим, что леммы, приведённые в пунктах 1 и 2, имеют технический характер и могут быть доказаны с использованием стандартной техники из курса функционального анализа.

1. Вспомогательные утверждения. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим матричное банахово пространство $\mathbb{B}^{m\times n}$, т.е. пространство матриц, компонентами которых являются элементы $\mathbb{B}$, а норма определяется по правилу

$$\|F\|_{m\times n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\|F_{ij}\|, \tag{3}$$

где

$$F = [F_{ij}]_{i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n}} \in \mathbb{B}^{m\times n}.$$

Очевидно, что полученное пространство $\mathbb{B}^{m\times n}$ с нормой (3) также является банаховым, и для него имеет место следующий критерий компактности.

Лемма 1. *Множество $M\subset\mathbb{B}^{m\times n}$ компактно в пространстве $\mathbb{B}^{m\times n}$ тогда и только тогда, когда каждое из множеств $M|_{ij}$ при $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ компактно в $\mathbb{B}$, где*

$$M|_{ij} = \{F_{ij} : F\in M\}.$$

Из этой леммы напрямую следует связь компактности оператора, действующего в матричных пространствах, с компактностью его сужений на всевозможные компоненты образа.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ – банаховы пространства. Оператор $\mathcal{A}$, действующий из $\mathbb{B}_1^{m_1\times n_1}$ в $\mathbb{B}_2^{m_2\times n_2}$, компактен тогда и только тогда, когда одновременно компактны все операторы следующего вида:*

$$\mathcal{A}_{ij}F = (\mathcal{A}F)_{ij},\quad i=\overline{1,m_2},\quad j=\overline{1,n_2},$$

т.е. сужения оператора $\mathcal{A}$ на всевозможные компоненты пространства $\mathbb{B}_2^{m_2\times n_2}$.

В дальнейшем будем рассматривать специальное функциональное пространство $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, введённое в статье [6], состоящее из функций вида

$$f(x) = F(x)+\eta,\quad \text{где}\quad F\in L_1(\mathbb{R}^N),\quad \eta\in\mathbb{R}.$$

Для удобства изложения будем обозначать функцию $F\in L_1(\mathbb{R}^N)$ и число $\eta\in\mathbb{R}$, соответствующие функции $f\in\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, через $\mathcal{F}f$ и $\mathcal{N}f$ соответственно. Введённое пространство является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{\widehat{L_1}} = \|\mathcal{F}f\|_{L_1} + |\mathcal{N}f|. \tag{4}$$

Установим критерии предкомпактности множеств из пространства $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$.

Лемма 3. *Множество K предкомпактно в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}K$ предкомпактно в $L_1(\mathbb{R}^N)$, а $\mathcal{N}K$ предкомпактно в $\mathbb{R}$, где*

$$\mathcal{F}K = \{\mathcal{F}f : f \in K\}, \quad \mathcal{N}K = \{\mathcal{N}f : f \in K\}.$$

Формулировка леммы 3 имеет весьма общий характер. Намного удобнее пользоваться следующим (специальным) критерием.

Лемма 4. *Множество K предкомпактно в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) существует число $M > 0$ такое, что для любой функции $f \in K$ справедливо неравенство $\|f\|_{\widehat{L_1}} < M$;

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что при выполнении для произвольного $h \in \mathbb{R}^N$ условия $\|h\|_{\mathbb{R}^N} < \delta$ и для любой функции $F \in \mathcal{F}K$ справедливо неравенство $\int_{\mathbb{R}^N} |F(x+h) - F(x)|\, dx < \varepsilon$.

Доказательство. Согласно лемме 3 множество K предкомпактно тогда и только тогда, когда предкомпактны множества $\mathcal{F}K$ и $\mathcal{N}K$. Таким образом, если K предкомпактно в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, то для множества $\mathcal{F}K$ выполнен критерий Рисса, а множество $\mathcal{N}K$ ограничено, что с учётом определения нормы (4) влечёт справедливость условий 1) и 2).

С другой стороны, если упомянутые выше условия леммы верны, то множество $\mathcal{F}K$ удовлетворяет критерию Рисса, а множество $\mathcal{N}K$ ограничено, т.е. удовлетворяет условию теоремы Больцано–Вейерштрасса. Следовательно, оба они предкомпактны в соответствующих пространствах, а значит, K предкомпактно в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. Лемма доказана.

2. Некоторые операторы, действующие в пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$. Исследуем некоторые отображения, действующие в банаховом пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$.

Рассмотрим класс интегрируемых существенно ограниченных функций

$$BL_1(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N) : \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| < +\infty\}$$

и введём обозначение

$$\|\varphi\|_{BL_1} = \max\{\|\varphi\|_{L_1}, \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi|\}.$$

Пусть $\Phi \in (BL_1(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ и $\mathcal{M}$ – оператор, действующий на элементы $F \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ по правилу $\mathcal{M}F = \Phi \odot F$, где под $\odot$ подразумевается покомпонентное умножение матриц.

Лемма 5. *Оператор $\mathcal{M}$ является линейным оператором в пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$, имеющим норму $\|\mathcal{M}\| = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \|\Phi_{ij}\|_{BL_1}$.*

Для элемента $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ и функции $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N)$ корректно определена операция свёртки

$$[f * \varphi](x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\varphi(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}f(x-y)\varphi(y)\, dy + \mathcal{N}f \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\, dy.$$

Рассмотрим аналог этой операции в пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$. Пусть

$$\varphi_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^N), \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Определим оператор $\mathcal{C}$, действующий на элементы $F \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ по правилу

$$\mathcal{C}F = [[\varphi_{ij} * F_{ij}]]_{i,j=\overline{1,n}}. \tag{5}$$

Лемма 6. *Оператор $\mathcal{C}$, определяемый выражением (5), является линейным компактным оператором, действующим в пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$, с нормой $\|\mathcal{C}\| = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \|\varphi_{ij}\|_{L_1}$.*

Замечание 1. Компактность оператора $\mathcal{C}$ доказывается при помощи лемм 1, 2 и 4.

Помимо линейных операторов рассмотрим так называемые квадратичные операторы. Будем называть оператор $\mathcal{A} : X \to Y$ *квадратичным*, если существует такой билинейный оператор $\mathcal{B} : X \times X \to Y$, что для любого $x \in X$ выполняется

$$\mathcal{A}x = \mathcal{B}(x, x).$$

Будем называть K-*нормой* квадратичного оператора $\mathcal{A}$, действующего из банахова пространства $\mathbb{B}_1$ с нормой $\|\cdot\|_1$ в банахово пространство $\mathbb{B}_2$ с нормой $\|\cdot\|_2$, число

$$\|\mathcal{A}\|_K = \sup_{x\in\mathbb{B}_1\setminus\{\theta_1\}} \frac{\|\mathcal{A}x\|_2}{\|x\|_1^2} = \sup_{\|x\|_1=1} \|\mathcal{A}x\|_2.$$

где θ_1 – это нулевой элемент пространства $\mathbb{B}_1$.

Замечание 2. K-норма квадратичного оператора, действующего в банаховых пространствах, не превосходит нормы порождающего его билинейного оператора.

Лемма 7. *Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ – банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно, а $\mathcal{A} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ – квадратичный оператор, порождённый билинейным оператором $\mathcal{B}$. Тогда для любых элементов $x, y \in \mathbb{B}_1$ имеет место оценка*

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_2 \leqslant \|\mathcal{B}\|(\|x\|_1 + \|y\|_1)\|x - y\|_1.$$

Доказательство. Исходя из билинейности оператора $\mathcal{B}$, имеем

$$\mathcal{B}(x, x) - \mathcal{B}(y, y) = \mathcal{B}(x, x) - \mathcal{B}(x, y) + \mathcal{B}(x, y) - \mathcal{B}(y, y) = \mathcal{B}(x, x - y) + \mathcal{B}(x - y, y).$$

Значит,

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_2 = \|\mathcal{B}(x, x - y) + \mathcal{B}(x - y, y)\|_2 \leqslant \|\mathcal{B}(x, x - y)\|_2 + \|\mathcal{B}(x - y, y)\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\mathcal{B}\| \cdot \|x\|_1\|x - y\|_1 + \|\mathcal{B}\| \cdot \|x - y\|_1\|y\|_1 = \|\mathcal{B}\|(\|x\|_1 + \|y\|_1)\|x - y\|_1.$$

Замечание 3. Действующий в банаховых пространствах квадратичный оператор $\mathcal{A}$, порождённый билинейным оператором $\mathcal{B}$, является липшицевым в любом шаре радиуса R с центром в нуле с константой липшицевости $L = 2R\|\mathcal{B}\|$.

Приведём примеры квадратичных операторов, действующих в $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$. Пусть

$$\varphi_{ij} \in BL_1(\mathbb{R}^N), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим билинейный оператор $\mathcal{S}$, действующий на элементы $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ по правилу

$$\mathcal{S}(F, G) = \left[\sum_{k=1}^{n}([\varphi_{ik}F_{ik} * G_{kj}] + [\varphi_{jk}G_{kj} * F_{ik}])\right]_{i,j=\overline{1,n}}. \tag{6}$$

Лемма 8. *Норма билинейного оператора $\mathcal{S}$, определяемого выражением (6), не превосходит числа $2\max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \|\varphi_{ij}\|_{BL_1}$.*

Определим билинейный оператор $\mathcal{P}$ следующим образом:

$$(\mathcal{P}(F, G))(x) = \left[\sum_{k=1}^{n}([\varphi_{ik} * F_{jk}](-x) + [\varphi_{jk} * F_{ik}](x))G_{ij}(x)\right]_{i,j=\overline{1,n}}, \tag{7}$$

где $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$.

Лемма 9. *Норма билинейного оператора $\mathcal{P}$ не превосходит числа $2\max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \|\varphi_{ij}\|_{BL_1}$.*

Пусть задан набор числовых констант $\{\lambda_{ijk} \in \mathbb{R} : i,j,k = \overline{1,n}\}$. Рассмотрим билинейный оператор, действующий на элементы $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ следующим образом:

$$\mathcal{R}(F,G) = \left[\mathcal{N}F_{ij}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ijk}\mathcal{N}G_{ik}\right]_{i,j=\overline{1,n}}. \tag{8}$$

Лемма 10. *Норма билинейного оператора $\mathcal{R}$ не превосходит числа*

$$\max_{p,q,r=\overline{1,n}}|\lambda_{pqr}|.$$

Замечание 4. Очевидно, что образ оператора $\mathcal{R}$ лежит в пространстве числовых матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$, поэтому если он ограничен, то и компактен.

3. Исследование системы уравнений равновесия. Запишем систему (1) в терминах пространства $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$. Для этого введём новые неизвестные функции

$$Q_{ij} = \frac{C_{ij}}{N_i}. \tag{9}$$

Условия (2) поведения вторых пространственных моментов на бесконечности позволяют заключить, что

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N}\to+\infty} Q_{ij}(x) = N_j, \quad i,j=\overline{1,n},$$

и что неизвестные функции Q_{ij} можно искать в пространстве $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. В таком случае можно полагать, что $\mathcal{N}Q_{ij} = N_j$.

Будем всюду далее дополнительно считать, что ядра разброса и конкуренции существенно ограничены. Запишем систему (1) после замены (9) в операторной форме. Пусть

$$M = \operatorname{diag}\{\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n\}, \quad W = [\overline{w}_{ij} + \overline{w}_{ji}]_{i,j=\overline{1,n}}, \quad \Omega = [(\widetilde{\alpha}(b_i+b_j) + (1-\widetilde{\alpha})(d_i+d_j))^{-1}]_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Пусть также $\mathcal{C}$ – оператор, аналогичный оператору свёртки (5) с $\varphi_{ij} = \overline{m_i} + \overline{m}_j$; $\mathcal{S}$ – квадратичный оператор, порождённый билинейным оператором самосвёртки (6), для которого $\varphi_{ij} = \overline{w}_{ij}$; $\mathcal{P}$ – квадратичный оператор, порождённый билинейным свёрточно-мультипликативным оператором (7), для которого $\varphi_{ij} = \overline{w}_{ij}$; а $\mathcal{R}$ – квадратичный оператор, порождённый билинейным скалярно-матричным оператором (8), для которого $\lambda_{ijk} = s_{ik} + s_{jk}$. Рассмотрим оператор, действующий по правилу

$$\mathcal{E}F = \Omega\odot(2M + \mathcal{C}F - W\odot F - \widetilde{\beta}\mathcal{P}F - \widetilde{\gamma}\mathcal{S}F - \widetilde{\beta}\mathcal{R}F),$$

где под $\odot$ подразумевается покомпонентное умножение матриц. Заметим, что операторное уравнение $Q = \mathcal{E}Q$ эквивалентно системе (1) после замены (9). В дальнейшем будем называть оператор $\mathcal{E}$ *оператором равновесия.*

Таким образом, задача об отыскании равновесных пространственных моментов сведена к задаче нахождения неподвижной точки оператора равновесия. Прежде чем переходить к исследованию существования неподвижной точки оператора равновесия, отметим следующий, важный с биологической точки зрения, факт.

Теорема 1. *Неподвижная точка оператора равновесия не может быть нулевым элементом пространства $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$.*

Доказательство. Обозначим нулевые элементы пространств $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ и $L_1(\mathbb{R}^N)$ через Θ и θ_{L_1} соответственно. Рассмотрим действие оператора $\mathcal{E}$ на элементе Θ покомпонентно. Пусть $i=\overline{1,n}$, тогда

$$(\mathcal{E}\Theta)_{ii}(x) = 2\overline{m}_i(x) + 2[\overline{m}_i * 0](x) - 2\overline{w}_{ii}(x)\cdot 0 - \widetilde{\beta}\sum_{k=1}^{n}([\overline{w}_{ik}*0](-x) + [\overline{w}_{ik}*0](x))\cdot 0 -$$

$$-\widetilde{\gamma}\sum_{k=1}^{n}([\overline{w}_{ik}\cdot 0 * 0](-x) + [\overline{w}_{ik}\cdot 0*0](x)) - 2\widetilde{\beta}\cdot 0\cdot\sum_{k=1}^{n}s_{ik}\cdot 0 = 2\overline{m}_i(x).$$

Поскольку в постановке задачи $b_i > 0$, а $\|m_i\|_{L_1} = 1$, то $\overline{m}_i = b_i m_i \neq \theta_{L_1}$. Таким образом, $(\mathcal{E}\Theta)_{ii} \neq \theta_{L_1} = \Theta_{ii}$, а значит, $\mathcal{E}\Theta \neq \Theta$, т.е. Θ не является неподвижной точкой оператора равновесия. Теорема доказана.

В дальнейшем будем обозначать

$$\mu = \max_{i,j=\overline{1,n}} \|\overline{m}_i + \overline{m}_j\|_{L_1} = \max_{i,j=\overline{1,n}} (b_i + b_j) = 2\max_{i=\overline{1,n}} b_i,$$

$$\nu = 2\max_{i,j=\overline{1,n}} \|\overline{w}_{ij}\|_{BL_1}, \quad \xi = \max_{i,j,k=\overline{1,n}} |s_{ik} + s_{jk}| = 2\max_{i,j=\overline{1,n}} s_{ij}, \quad \eta = \max_{i,j=\overline{1,n}} \|\overline{w}_{ij} + \overline{w}_{ji}\|_{BL_1},$$

$$\omega = \max_{i,j=\overline{1,n}} |\Omega_{ij}| = \left(\min_{i,j=\overline{1,n}} |\widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \widetilde{\alpha})(d_i + d_j)|\right)^{-1}.$$

Будем предполагать, что параметры биологической модели и замыкания подобраны так, что величина ω определена корректно, т.е. выполнено условие

$$\min_{i,j=\overline{1,n}} |\widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \widetilde{\alpha})(d_i + d_j)| > 0. \tag{10}$$

Используя известные принципы Банаха и Лере–Шаудера, можно доказать обобщённый принцип существования неподвижной точки оператора, действующего в банаховом пространстве, который не является ни сжимающим, ни компактным.

Теорема 2 [7]. *Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в некотором банаховом пространстве $\mathbb{B}$, причём $\mathcal{A}$ – компактный, а $\mathcal{B}$ – сжимающий. Пусть $B \subset \mathbb{B}$ является замкнутым выпуклым ограниченным множеством, причём для любых $x, y \in B$ справедливо*

$$\mathcal{A}x + \mathcal{B}y \in B,$$

тогда у оператора $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ существует по крайней мере одна неподвижная точка в B.

Применим данную теорему для нахождения достаточных условий существования у оператора равновесия неподвижной точки.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (10), $|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}| > 0$, и существует по крайней мере один коэффициент агрессивности s_{ij}, не равный нулю. Пусть также*

$$D = \left(\mu + \eta - \frac{1}{\omega}\right)^2 - 8(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)\sum_{i=1}^{n} b_i \geqslant 0,$$

а положительное число R такое, что

$$\omega(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R) < 1, \quad \frac{-\mu - \eta + \omega^{-1} - \sqrt{D}}{2(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)} \leqslant R \leqslant \frac{-\mu - \eta + \omega^{-1} + \sqrt{D}}{2(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)}.$$

Тогда у оператора равновесия существует неподвижная точка в шаре радиуса R с центром в нуле.

Доказательство. Представим оператор равновесия в виде суммы $\mathcal{K} + \mathcal{H}$, где

$$\mathcal{K}F = \Omega \odot (\mathcal{C}F - \widetilde{\beta}\mathcal{R}F), \quad \mathcal{H}F = \Omega \odot (2M - W \odot F - \widetilde{\beta}\mathcal{P}F - \widetilde{\gamma}\mathcal{S}F).$$

Согласно лемме 6 и замечанию 4 операторы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{R}$ компактны, поэтому и оператор $\mathcal{K}$ компактен, поскольку растяжение (умножение на константу) не влияет на компактность, а сумма компактных операторов является компактным оператором. В свою очередь, оператор $\mathcal{H}$ является липшицевым в любом шаре радиуса R с центром в нуле, так как из лемм 5, 8, 9 и замечания 1 следует

$$\|\mathcal{H}F - \mathcal{H}G\|_{n\times n} \leqslant \omega(\|W \odot (F - G)\|_{n\times n} + |\widetilde{\beta}| \cdot \|\mathcal{P}F - \mathcal{P}G\|_{n\times n} + |\widetilde{\gamma}| \cdot \|\mathcal{S}F - \mathcal{S}G\|_{n\times n}) \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R)\|F - G\|_{n\times n}$$

для любых $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ с нормой, не превосходящей числа R. Кроме того, $\mathcal{H}$ – сжимающий оператор в данном шаре, если $\omega(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R) < 1$.

Пусть $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$, причём их нормы не превосходят числа R. Тогда можно установить следующую оценку:

$$\|\mathcal{K}F + \mathcal{H}G\|_{n\times n} = \|\Omega \odot (\mathcal{C}F - \widetilde{\beta}\mathcal{R}F + 2M - W \odot G - \widetilde{\beta}\mathcal{P}G - \widetilde{\gamma}\mathcal{S}G)\|_{n\times n} \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\|\mathcal{C}F\|_{n\times n} + |\widetilde{\beta}|(\|\mathcal{R}F\|_{n\times n} + \|\mathcal{P}G\|_{n\times n}) + 2\|M\|_{n\times n} + \|W\odot G\|_{n\times n} + |\widetilde{\gamma}| \cdot \|\mathcal{S}G\|_{n\times n}) \leqslant$$

$$\leqslant \omega\biggl(\mu\|F\|_{n\times n} + |\widetilde{\beta}|(\xi\|F\|^2_{n\times n} + \nu\|G\|^2_{n\times n}) + 2\sum_{i=1}^n b_i + \eta\|G\|_{n\times n} + |\widetilde{\gamma}|\nu\|G\|^2_{n\times n}\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant \omega\biggl((|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)R^2 + (\mu+\eta)R + 2\sum_{i=1}^n b_i\biggr).$$

Для того чтобы норма оператора $\mathcal{K}F + \mathcal{H}G$ не превосходила числа R, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)R^2 + (\mu+\eta)R + 2\sum_{i=1}^n b_i \leqslant \frac{R}{\omega},$$

т.е.

$$(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)R^2 + \biggl(\mu+\eta-\frac{1}{\omega}\biggr)R + 2\sum_{i=1}^n b_i \leqslant 0.$$

Из условий теоремы следует, что $a = |\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu > 0$, поэтому для выполнения упомянутого выше неравенства необходимо, чтобы рассматриваемый квадратный трёхчлен имел вещественные корни, т.е. чтобы его дискриминант

$$D = \biggl(\mu+\eta-\frac{1}{\omega}\biggr)^2 - 8(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)\sum_{i=1}^n b_i$$

был неотрицательным. В таком случае корни будут равны

$$R_{1,2} = \frac{-\mu-\eta+\omega^{-1} \pm \sqrt{D}}{2(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)}$$

и при всех $R \in [R_1, R_2]$ исследуемое неравенство будет выполнено.

Таким образом, если величина D не меньше нуля, а положительное число R такое, что справедливы неравенства

$$\omega(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R) < 1, \quad \frac{-\mu-\eta+\omega^{-1} - \sqrt{D}}{2(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)} \leqslant R \leqslant \frac{-\mu-\eta+\omega^{-1} + \sqrt{D}}{2(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu)},$$

то для операторов $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$ и шара радиуса R с центром в нуле выполнены все условия теоремы 2, а значит, у оператора равновесия существует по крайней мере одна неподвижная точка в рассматриваемом шаре.

Отметим, что условие $|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}| > 0$ нужно только для того, чтобы коэффициент при старшей степени в возникающем при доказательстве теоремы квадратном трёхчлене не обращался в нуль. Однако из невыполнения данного условия не следует отсутствие неподвижной точки у оператора равновесия. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (10),* $\widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma} = 0$, *а*

$$\rho = \frac{1}{\omega} - \mu - \eta > 0.$$

Тогда оператор равновесия имеет неподвижную точку в шаре радиуса

$$R = \frac{2}{\rho}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

с центром в нуле.

Доказательство. Представим оператор $\mathcal{E}$ в виде суммы $\mathcal{K}+\mathcal{H}$ аналогично доказательству теоремы 3 и получим

$$\mathcal{K}F = \Omega\odot\mathcal{C}F, \quad \mathcal{H}F = \Omega\odot(2M - W\odot F).$$

При этом для любых $F, G \in (\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{H}F - \mathcal{H}G\|_{n\times n} \leqslant \omega\|W\odot(F-G)\|_{n\times n} \leqslant \omega\eta\|F-G\|_{n\times n}.$$

Так как $\omega^{-1}-\mu-\eta > 0$, а $\mu > 0$, то $\omega\eta < 1$, а значит, $\mathcal{H}$ – сжимающий всюду оператор. При этом если нормы элементов F и G не превосходят числа R, то

$$\|\mathcal{K}F - \mathcal{H}G\|_{n\times n} = \|\Omega\odot(\mathcal{C}F + 2M - W\odot G)\|_{n\times n} \leqslant \omega(\|\mathcal{C}F\|_{n\times n} + 2\|M\|_{n\times n} + \|W\odot G\|_{n\times n}) \leqslant$$

$$\leqslant \omega\biggl(\mu\|F\|_{n\times n} + 2\sum_{i=1}^{n} b_i + \eta\|G\|_{n\times n}\biggr) \leqslant \omega\biggl((\mu+\eta)R + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\biggr).$$

Поэтому если

$$\biggl(\mu+\eta-\frac{1}{\omega}\biggr)R + 2\sum_{i=1}^{n} \leqslant 0,$$

то норма $\mathcal{K}F - \mathcal{H}G$ также не будет превосходить R. Решением данного неравенства относительно R с учётом

$$\mu+\eta-\frac{1}{\omega} = -\rho < 0$$

является множество

$$R \geqslant \frac{2}{\rho}\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

С учётом компактности оператора $\mathcal{K}$ и сжимаемости оператора $\mathcal{H}$ всюду из теоремы 2 следует, что в шаре радиуса

$$R = \frac{2}{\rho}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

с центром в нуле у оператора равновесия существует неподвижная точка. Теорема доказана.

Заключение. В рамках данной работы была изучена система нелинейных интегральных уравнений (1) с дополнительными условиями (2). Данная система возникает в биологической модели У. Дикмана и Р. Лоу, описывающей многовидовые сообщества неподвижных организмов. Для исследования разрешимости данная система была сформулирована в виде единого операторного уравнения в специальном банаховом пространстве $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$. Было показано, что порождаемый этим уравнением оператор равновесия при определённых условиях на параметры замыкания α, β, γ, а также на скалярные параметры биологической модели b_i, d_i и s_{ij}, представим в виде суммы $\mathcal{K}+\mathcal{H}$, где оператор $\mathcal{K}$ является компактным, а $\mathcal{H}$ – сжимающим в шаре пространства $(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N))^{n\times n}$ определённого радиуса R с центром в нуле. Это позволило, применив обобщённый принцип Лере–Шаудера–Банаха, доказать существование неподвижной точки оператора равновесия в этом шаре, что равносильно существованию решения исходной системы уравнений равновесия. Также было показано, что получаемое решение не может быть тривиальным, а значит, рассматриваемое состояние равновесия не является состоянием вымирания сообщества.

Результаты пп. 1, 2 настоящей работы получены Никитиным А.А. при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042). Остальные результаты получены всеми авторами при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Law R., Dieckmann U.* Moment approximations of individual-based models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Eds. U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge, 2000. P. 252–270.
2. *Dieckmann U., Law R.* Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Eds. U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge, 2000. P. 412–455.
3. *Plank M.J., Law R.* Spatial point processes and moment dynamics in the life sciences: a parsimonious derivation and some extensions // Bull. Math. Biol. 2015. V. 77. № 4. P. 586–613.
4. *Murrell D., Dieckmann U., Law R.* On moment closures for population dynamics in continuous space // J. of Theoretical Biology. 2004. V. 229. № 3. P. 421–432.
5. *Николаев М.В., Никитин А.А.* Принцип Лере–Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1209–1217.
6. *Николаев М.В., Дикман У., Никитин А.А.* Применение специальных функциональных пространств к исследованию нелинейных интегральных уравнений, возникающих в равновесной пространственной логистической динамике // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. № 1. С. 35–39.
7. *Красносельский М.А.* Два замечания о методе последовательных приближений // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10. № 1 (63). С. 123–127.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Высший университет Окинавского института
науки и технологий, г. Онна, Япония,
Международный институт прикладного
системного анализа, г. Лаксенбург, Австрия,
Высший университет повышения квалификации,
г. Хаяма, Япония

Поступила в редакцию 11.04.2022 г.
После доработки 28.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.