

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.23

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЁРТКИ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ, ЗАДАННОГО НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

© 2022 г. А. А. Полосин

Как известно, одномерные интегральные уравнения типа свёртки, рассматриваемые на конечном отрезке, в общем случае не решаются в квадратурах, в отличие от аналогичных уравнений, рассматриваемых на всей прямой или на полупрямой. По этой причине при исследовании их спектра приходится использовать те или иные асимптотические методы. В работе рассмотрен интегральный оператор типа свёртки с логарифмическим ядром, заданный на конечном отрезке. С помощью преобразования Фурье задача последовательно сведена к задаче сопряжения и к сингулярному (особому) интегральному уравнению на полупрямой, интегральный оператор в котором не является сжимающим. Показано, что главная часть полученного интегрального уравнения допускает обращение в явном виде. Рассмотрены случаи четной и нечетной собственной функции, в каждом из которых найдена асимптотика собственных значений и собственных функций исходного оператора.

DOI: 10.31857/S0374064122090096, EDN: CTTTKO

В работе [1] найдена асимптотика собственных значений интегрального уравнения переноса

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{|t-x|^\alpha}, \quad x \in [-1, 1], \quad 0 < \alpha < 1.$$

В статьях [2, 3] изучена асимптотика собственных значений и собственных функций более общего семейства интегральных операторов свёртки

$$(Au)(\tau) = \int_0^T k(t-\tau)u(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T,$$

для которых образ Фурье ядра $k(s)$ – функция $K(x)$ – является невырожденной однородной функцией, т.е. $K(cx) = c^{-\gamma}K(x)$ для любого $c > 0$ и любого вещественного x , где $0 < \gamma < 1$.

В работе [4] предложен метод решения уравнений типа свёртки, заданных на конечном отрезке, в случае, когда известны два частных решения, отвечающих правым частям специального вида. В [5] получена асимптотика собственных значений и собственных функций интегрального оператора свёртки с ядром $k(x) = (\pi x)^{-1} \sin(lx)$, $l > 0$, заданного на отрезке $[-1, 1]$. В настоящей работе исследована асимптотика собственных значений и собственных функций интегрального оператора свёртки с логарифмическим ядром.

Рассмотрим спектральную задачу

$$u(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-x|} u(t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Пусть параметр $\lambda \gg 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что собственная функция является либо чётной, либо нечётной. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1°. Искомая функция чётная (и действительная): $u(x) = u(-x)$. Положим

$$v(x) = \int_0^x u(t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Легко видеть, что $v(x)$ – нечётная функция. Проинтегрируем правую часть уравнения (1) по частям и получим

$$u(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(t) dt}{t-x} + 2v(1)w(x), \quad (2)$$

где

$$w(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{1}{1-x^2}.$$

В дальнейшем будем придерживаться общей схемы, описанной в [6, с. 201]. Продолжим уравнение (2) на всю вещественную прямую, доопределив функции $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ нулём вне отрезка $[-1, 1]$:

$$u(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(t) dt}{t-x} + 2v(1)w(x) + f_+(x-1) + f_+(-x-1), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3)$$

где

$$f_+(x) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(t) dt}{t-x-1}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Применим к соотношению (3) преобразование Фурье с масштабированным аргументом. Введём обозначения

$$U(p) = \int_{-1}^1 e^{i\lambda p x} u(x) dx, \quad W(p) = \int_{-1}^1 e^{i\lambda p x} w(x) dx,$$

тогда $U(0) = 2v(1)$,

$$\int_{-1}^1 e^{i\lambda p x} v(x) dx = \frac{U(0) \cos(\lambda p) - U(p)}{i\lambda p}, \quad W(p) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{i\lambda p x} \ln \frac{1}{1-x^2} dx$$

и (3) перейдёт в уравнение

$$\frac{|p|-1}{|p|} e^{i\lambda p} U(p) + U(0) \frac{1+e^{2i\lambda p}}{2|p|} - U(0) e^{i\lambda p} W(p) - e^{2i\lambda p} F^+(p) = F^+(-p). \quad (5)$$

Заметим, что $F^+(0)$ существует, так как $f_+(x) = O(x^{-2})$ при $x \rightarrow +\infty$ в силу нечётности функции $v(x)$.

Обозначим $D_0(p) = 1 + 1/|p|$, $D(p) = p^2 D_0(p)/(p^2 - 1)$ и определим каноническую функцию $X(z)$ задачи сопряжения аналитических функций, удовлетворяющую соотношению $D(p) = X^+(p)/X^-(p)$ (см. [7, с. 176]). Для этого положим $D_0(p) = X_0^+(p)/X_0^-(p)$, где

$$\ln X_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} D_0(t) \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{|t|} \right) \frac{dt}{t-z}$$

и

$$X^+(z) = z^2 X_0^+(z)/(z^2 - 1), \quad X^-(z) = X_0^-(z).$$

Отметим, что $X(\infty) = 1$. Тогда уравнение (5) можно представить в виде

$$\frac{p^2 - 1}{p^2} \frac{e^{i\lambda p} U(p)}{X_0^+(p)} + (1 + |p|) \left(U(0) \frac{1 + e^{2i\lambda p}}{2p^2 X_0^+(p)} - \frac{U(0)e^{i\lambda p} W(p) + e^{2i\lambda p} F^+(p)}{|p| X_0^+(p)} \right) = \frac{F^+(-p)}{X_0^-(p)}. \quad (6)$$

Определим функцию $\Phi(z)$ следующим образом:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - 1}{z^2} \frac{e^{i\lambda z} U(z)}{X_0^+(z)} + (1 + z \operatorname{sgn} \operatorname{Re} z) \times \\ \times \left(U(0) \frac{1 + e^{2i\lambda z}}{2z^2 X_0^+(z)} - \frac{U(0)e^{i\lambda z} W(z) + e^{2i\lambda z} F^+(z)}{z(\operatorname{sgn} \operatorname{Re} z) X_0^+(z)} \right), & \operatorname{Im} z > 0, \\ F^+(-z)/X_0^-(z), & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

В силу (6) функция $\Phi(z)$ является аналитической во всей плоскости, за исключением верхней мнимой полуоси, имеет в нуле особенность интегрируемого порядка и исчезает на бесконечности. Следовательно,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{U(0)e^{i\lambda t} W(t) + e^{2i\lambda t} F^+(t) - U(0)(1 + e^{2i\lambda t})/2}{t X_0^+(t)(t - z)} dt.$$

Отсюда вытекает, что при $\operatorname{Im} z > 0$

$$F^+(z) = \frac{X^-(-z)}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{U(0)e^{i\lambda t} W(t) + e^{2i\lambda t} F^+(t) - U(0)(1 + e^{2i\lambda t})/2}{t X_0^+(t)(t + z)} dt.$$

Таким образом, на верхней мнимой полуоси $z = iy$, $0 < y < +\infty$, относительно функции $\varsigma(y) = e^{-\lambda y} F^+(iy)/X_0^-(-iy)$ получаем уравнение

$$\varsigma(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{X_0^-(-is)}{s X_0^+(is)} \frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s + y} \varsigma(s) ds = \zeta(y), \quad (7)$$

где

$$\zeta(y) = U(0) \frac{e^{-\lambda y}}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 + e^{-2\lambda s} - 2e^{-\lambda s} W(is)}{s X_0^+(is)(s + y)} ds.$$

Изучим поведение канонической функции на мнимой оси. Так как

$$\int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{u} \frac{du}{u^2 + 1} = 0,$$

то

$$\begin{aligned}\ln X_0^+(is) &= \frac{s}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2 + s^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \frac{1+su}{su} \frac{du}{u^2 + 1} = \ln \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+su)}{u^2 + 1} du = \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{s}{\pi} \frac{\ln s}{s-1} + \frac{s}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\operatorname{arccotg} u - \frac{1}{1+u} \right) \frac{du}{1+su},\end{aligned}$$

поэтому

$$X_0^+(is) = \frac{1 + O(s \ln s)}{\sqrt{s}}, \quad s \rightarrow +0; \quad (8)$$

так как $\ln X_0^-(-is) = -\ln X_0^+(is)$, то $X_0^-(is) = \sqrt{s}(1 + O(s \ln s))$ при $s \rightarrow +0$. Таким образом,

$$\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} = 1 + O(s \ln s), \quad s \rightarrow +0.$$

Соответственно представим уравнение (7) в виде

$$\varsigma(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(s+y)} \varsigma(s) \frac{ds}{s+y} = \tilde{\zeta}(y), \quad 0 < y < +\infty, \quad (9)$$

где

$$\tilde{\zeta}(y) = \zeta(y) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} - 1 \right) \frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y} \varsigma(s) ds.$$

Здесь $\varsigma(y) = O^*(1/\sqrt{y})$ при $y \rightarrow +0$ и $\varsigma(+\infty) = 0$. Отметим также, что общий случай уравнения (9) с параметром рассматривался автором в статье [8].

Уравнение (7) аналогично уравнению, к которому была сведена задача в работе [1], однако (и это отличие весьма существенно) в данном случае интегральный оператор – не сжимающий. Далее покажем, что уравнение (7) однозначно разрешимо.

Выразив искомую функцию через решение уравнения (7) из соотношения (5):

$$U(p) = (|p|(U(0)W(p) + e^{i\lambda p}F^+(p) + e^{-i\lambda p}F^+(-p)) - U(0)\cos(\lambda p))/(|p| - 1),$$

получим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи – условие на спектр:

$$W(1) + 2\operatorname{Re}(e^{i\lambda}F^+(1)/U(0)) = \cos \lambda. \quad (10)$$

Теперь стандартным образом продолжим уравнение (9) на всю вещественную ось, обозначив $k(y) = \exp(-\lambda|y|)/y$, $-\infty < y < +\infty$, и положим $\varsigma_+(y) = \varsigma(y)$, $\varsigma_-(y) = 0$, $\tilde{\zeta}_+(y) = \tilde{\zeta}(y)$ при $y > 0$, $\varsigma_+(y) = \tilde{\zeta}_+(y) = 0$ при $y < 0$. В результате получим

$$\varsigma_+(y) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(s+y) \varsigma_+(s) ds = \varsigma_-(s) + \tilde{\zeta}_+(y), \quad -\infty < y < +\infty. \quad (11)$$

Введём обозначения

$$\Sigma^\pm(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipy} \varsigma_\pm(y) dy, \quad Z^\pm(p) = \int_0^{+\infty} e^{ipy} \tilde{\zeta}_\pm(y) dy, \quad -\infty < p < +\infty.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipy} k(y) dy = 2i \operatorname{arctg} \frac{p}{\lambda} = \ln \frac{\lambda + ip}{\lambda - ip},$$

то уравнение (11) в образах Фурье будет иметь вид

$$\Sigma^+(p) + \frac{2i}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{p}{\lambda} \Sigma^+(-p) = \Sigma^-(p) + Z^+(p), \quad -\infty < p < +\infty. \quad (12)$$

Определим следующую функцию:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Sigma^+(z) - Z^+(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \frac{1}{\pi} \ln \frac{\lambda - iz}{\lambda + iz} \Sigma^+(-z) + \Sigma^-(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

тогда в силу (12)

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-i\infty}^{-i\lambda} \Sigma^+(-t) \frac{dt}{t - z}$$

или

$$\Sigma^+(z) - Z^+(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{i\lambda}^{+i\infty} \Sigma^+(t) \frac{dt}{t + z}.$$

В результате получим уравнение относительно функции Σ^+ :

$$\Sigma^+(i\lambda y) + \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \Sigma^+(i\lambda s) \frac{ds}{s + y} = Z^+(i\lambda y), \quad 1 < y < +\infty,$$

или

$$\Sigma^+(i\lambda e^x) + \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \Sigma^+(i\lambda e^t) \frac{e^{(t-x)/2} dt}{2 \operatorname{ch}((x-t)/2)} = Z^+(i\lambda e^x), \quad 0 < x < +\infty. \quad (13)$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$. Введём функции

$$H^+(p) = \int_0^{+\infty} e^{(ip+\varepsilon)x} \Sigma^+(i\lambda e^x) dx, \quad G^+(p) = \int_0^{+\infty} e^{(ip+\varepsilon)x} Z^+(i\lambda e^x) dx,$$

далее продолжим уравнение (13) стандартным образом на всю вещественную ось и перейдём к образам Фурье:

$$(1 + \Omega(p))H^+(p) = H^-(p) + G^+(p), \quad -\infty < p < +\infty,$$

где

$$\Omega(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\varepsilon-1/2+ip)s} ds}{2 \operatorname{ch}(s/2)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi(p + i(1/2 - \varepsilon)))}.$$

В силу соотношений

$$\operatorname{Re} \Omega(p) = \frac{\operatorname{ch}(\pi p) \sin(\pi \varepsilon)}{\operatorname{sh}^2(\pi p) + \cos^2(\pi \varepsilon)} > 0, \quad \operatorname{Im} \Omega(p) = -\frac{\operatorname{sh}(\pi p) \cos(\pi \varepsilon)}{\operatorname{sh}^2(\pi p) + \cos^2(\pi \varepsilon)}$$

индекс данной задачи сопряжения в рассматриваемом классе решений равен нулю, поэтому задача однозначно разрешима.

Факторизуем коэффициент задачи сопряжения следующим образом:

$$\frac{1}{1 + \Omega(p)} = \frac{E^+(p)}{E^-(p)},$$

где

$$E^+(p) = \frac{\Gamma^2(3/4 - \varepsilon/2 - ip/2)}{\Gamma(1 - \varepsilon/2 - ip/2)\Gamma(1/2 - \varepsilon/2 - ip/2)}, \quad E^-(p) = \frac{\Gamma(\varepsilon/2 + ip/2)\Gamma(1/2 + \varepsilon/2 + ip/2)}{\Gamma^2(1/4 + \varepsilon/2 + ip/2)},$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. Тогда

$$\frac{H^+(p)}{E^+(p)} - \frac{H^-(p)}{E^-(p)} = \frac{G^+(p)}{E^-(p)}$$

и решение примет вид

$$H^+(z) = \frac{E^+(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^+(t)/E^+(t)}{1 + \Omega(t)} \frac{dt}{t - z},$$

$$e^{\varepsilon x} \Sigma^+(i\lambda e^x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} dp \frac{E^+(p)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^+(t)/E^+(t)}{1 + \Omega(t)} \frac{dt}{t - p}, \quad x > 0.$$

Вычислим теперь интегралы с помощью вычетов. Внутренний интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^+(t)/E^+(t)}{1 + \Omega(t)} \frac{dt}{t - p} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln s + b_m}{1/2 + \varepsilon + 2m + ip} + \frac{1}{(1/2 + \varepsilon + 2m + ip)^2} \right) \frac{Z^+(i\lambda s) ds}{s^{3/2+2m}},$$

где

$$a_m = \frac{\Gamma(5/4 + m)\Gamma(3/4 + m)}{(m!\pi)^2}, \quad b_m = \frac{\Gamma'(1 + m)}{\Gamma(1 + m)} - \frac{\Gamma'(3/4 + m)}{2\Gamma(3/4 + m)} - \frac{\Gamma'(5/4 + m)}{2\Gamma(5/4 + m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что $a_m > 0$. Покажем, что и коэффициент b_m положителен. Действительно,

$$b_m = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \ln \frac{\Gamma^2(1+x)}{\Gamma(3/4+x)\Gamma(5/4+x)} \right)_{x=m}, \quad \frac{d}{dx} \frac{\Gamma^2(1+x)}{\Gamma(3/4+x)\Gamma(5/4+x)} = \frac{Q(x)}{B^2(3/4+x, 1/4)},$$

$$Q(x) = B(3/4+x, 1/4) \frac{d}{dx} B(1+x, 1/4) - B(1+x, 1/4) \frac{d}{dx} B(3/4+x, 1/4) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 t^{x-1/4} s^x \ln \frac{s}{t} (1-t)^{-3/4} (1-s)^{-3/4} ds dt = \iint_{0 < t < s < 1} \frac{(ts)^{x-1/4} (s^{1/4} - t^{1/4}) \ln(s/t)}{((1-t)(1-s))^{3/4}} ds dt > 0.$$

Внешний интеграл равен ($y > 1$)

$$\Sigma^+(i\lambda y) = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_m a_k}{y^{3/2+2k}} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(m+k+1)^3} + \frac{\ln s + b_m + \ln y + b_k}{(m+k+1)^2} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{(\ln s + b_m)(\ln y + b_k)}{m+k+1} \right) \frac{Z^+(i\lambda s) ds}{s^{3/2+2m}}.$$

Возвращаясь к исходным функциям, получаем решение уравнения (9):

$$\varsigma(y) = \tilde{\zeta}(y) + \int_0^{+\infty} \Xi(y, t) \tilde{\zeta}(t) dt, \quad 0 < y < +\infty,$$

здесь

$$\Xi(y, t) = \frac{\lambda}{\pi} \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \Omega(\tau, s) e^{-\lambda(\tau y + st)} d\tau ds,$$

$$\Omega(\tau, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_m a_k}{s^{3/2+2m} \tau^{3/2+2k}} (A_{mk} + B_{mk} \ln s + B_{km} \ln \tau + C_{mk} \ln s \ln \tau),$$

$$A_{mk} = \frac{1}{(m+k+1)^3} + \frac{b_m + b_k}{(m+k+1)^2} + 2 \frac{b_m b_k}{m+k+1},$$

$$B_{mk} = \frac{1}{(m+k+1)^2} + \frac{2b_k}{m+k+1}, \quad C_{mk} = \frac{2}{m+k+1}.$$

Очевидно, что все эти коэффициенты положительны.

Таким образом, уравнение (7) принимает вид

$$\varsigma(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} - 1 \right) K(y, s) \varsigma(s) ds = \zeta(y) + \int_0^{+\infty} \Xi(y, t) \zeta(t) dt, \quad 0 < y < +\infty, \quad (14)$$

где

$$K(y, s) = \frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y} + \int_0^{+\infty} \Xi(y, t) \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{s+t} dt.$$

Рассмотрим банахово пространство $\tilde{C}$, состоящее из функций вида $f(x) = g(x)/\sqrt{x}$, где $g(x) \in C[0, +\infty)$, с нормой $\|f\|_{\tilde{C}} = \max_{0 < x < +\infty} |\sqrt{x}f(x)|$. Покажем, что интегральный оператор в левой части (14) является сжимающим в этом пространстве. В самом деле, в силу (8) существует такая константа $C_0 > 0$, что справедлива оценка

$$\left| \frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} - 1 \right| \leq \frac{s|\ln s|}{C_0 + s|\ln s|}, \quad 0 < s < +\infty. \quad (15)$$

В силу (15) справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{s}} \left| \frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} - 1 \right| K(y, s) ds \leq I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{\sqrt{y}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{s}|\ln s|}{C_0 + s|\ln s|} \frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y} ds \leq \frac{C'_1}{\pi\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} \frac{|\ln s|}{\sqrt{s}} e^{-\lambda s} ds \leq C_1 \frac{\ln \lambda}{\lambda},$$

$$I_2 \leq \frac{\lambda\sqrt{y}}{\pi^2} \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} |\Omega(\tau, \xi)| e^{-\lambda\tau y} K_2(\xi) d\tau d\xi,$$

$$K_2(\xi) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{s}|\ln s|}{C_0 + s|\ln s|} \frac{e^{-\lambda(s+(1+\xi)t)}}{s+t} ds dt.$$

Так как

$$\begin{aligned} K_2(\xi) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{s} |\ln s|}{C_0 + s |\ln s|} \frac{e^{-\lambda(s+v)}}{(1+\xi)s+v} ds dv = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda U} dU \int_0^U \frac{\sqrt{V} |\ln V|}{C_0 + V |\ln V|} \frac{dV}{U + \xi V} \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda U} h(U) dU, \\ h(U) &= \frac{1}{U} \int_0^U \frac{\sqrt{V} |\ln V| dV}{C_0 + V |\ln V|} \sim C_2' \sqrt{U} \ln \frac{1}{U}, \quad U \rightarrow +0, \end{aligned}$$

то $K_2(\xi) \leq C_2'' \lambda^{-3/2} \ln \lambda$, и для I_2 справедлива оценка

$$I_2 \leq C_2'' \frac{\ln \lambda}{\lambda} \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} |\Omega(\tau, \xi)| \sqrt{\lambda \tau y} e^{-\lambda \tau y} \frac{d\tau d\xi}{\sqrt{\tau}} \leq C_2''' \frac{\ln \lambda}{\lambda} \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} |\Omega(\tau, \xi)| \frac{d\tau d\xi}{\sqrt{\tau}} \leq C_2 \frac{\ln \lambda}{\lambda}.$$

Таким образом, норма интегрального оператора из соотношения (14) оценивается как $O(\lambda^{-1} \ln \lambda)$. Следовательно,

$$F^+(iy) = e^{\lambda y} X_0^-(-iy) \left(\zeta(y) + \int_0^{+\infty} \Xi(y, t) \zeta(t) dt \right) \left(1 + O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) \right), \quad 0 < y < +\infty.$$

Изучим условие (10). Продолжив полученное решение аналитически в верхнюю полуплоскость, получим

$$\frac{F^+(1)}{U(0)} = \frac{X_0^-(-1)}{\pi^2} (J_1 - J_2 + J_3 - J_4) \left(1 + O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) \right),$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \pi \int_0^{+\infty} \frac{1 + e^{-2\lambda s}}{2s X_0^+(is)} \frac{ds}{s-i}, \quad J_2 = \pi \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda s} W(is)}{s X_0^+(is)} \frac{ds}{s-i}, \\ J_3 &= \lambda \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 + e^{-2\lambda s}}{2s X_0^+(is)} \frac{ds dt}{s+t} \int_0^{+\infty} \int_2^{+\infty} \Omega(\tau+1, \xi-1) e^{i\lambda \tau} e^{-\lambda \xi t} d\tau d\xi, \\ J_4 &= \lambda \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda s} W(is)}{s X_0^+(is)} \frac{ds dt}{s+t} \int_0^{+\infty} \int_2^{+\infty} \Omega(\tau+1, \xi-1) e^{i\lambda \tau} e^{-\lambda \xi t} d\tau d\xi. \end{aligned}$$

В силу свойства (8) для канонической функции существует такая константа $C_{00} > 0$, что

$$\left| \frac{1}{s X_0^+(is)} - \frac{1}{\sqrt{s}} \right| \leq \frac{\sqrt{s} |\ln s|}{C_{00} + s |\ln s|}, \quad 0 < s < +\infty. \quad (16)$$

Представим первый интеграл в виде $J_1 = J_{11} + J_{12} + J_{13}$, где

$$J_{11} = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{ds/(s-i)}{s X_0^+(is)} = \text{const}, \quad J_{12} = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda s}}{\sqrt{s}} \frac{ds}{s-i} = \frac{i\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\lambda}} + O(\lambda^{-3/2}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$J_{13} = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{s X_0^+(is)} - \frac{1}{\sqrt{s}} \right) \frac{e^{-2\lambda s} ds}{s-i}.$$

Из неравенства (16) следует, что

$$|J_{13}| \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{s} |\ln s|}{\sqrt{s^2 + 1}} e^{-2\lambda s} ds = O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{3/2}}\right).$$

Таким образом, $J_1 = J_{11} + O(1/\sqrt{\lambda})$.

Второй интеграл представим в виде $J_2 = J_{21} + J_{22}$, где

$$J_{21} = \pi \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda s} W(is) ds}{\sqrt{s}(s-i)} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} J_{211}(t) \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad J_{211}(t) = \int_0^2 \left(\ln \frac{1}{x(2-x)} \right) \frac{\sqrt{x} dx}{t-ix},$$

$$J_{22} = \frac{\lambda}{2} \int_0^2 \ln \frac{1}{x(2-x)} dx \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{sX_0^+(is)} - \frac{1}{\sqrt{s}} \right) \frac{e^{-\lambda sx} ds}{s-i}.$$

Так как

$$\begin{aligned} J_{211}(t) &= i \int_0^2 \left(\ln \frac{1}{x(2-x)} \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int_0^2 \left(\ln \frac{1}{x(2-x)} \right) \frac{it}{t-ix} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= 8i\sqrt{2} \ln \frac{e}{2} - i\sqrt{t} \left(\ln \frac{1}{t} \int_0^{1/t} \frac{\sqrt{2}}{1-2iy} \frac{dy}{\sqrt{y}} + \int_0^{1/t} \ln \left(\frac{1}{4y} \right) \frac{\sqrt{2}}{1-2iy} \frac{dy}{\sqrt{y}} + \int_0^{1/t} \ln \left(\frac{1}{1-ty} \right) \frac{\sqrt{2}}{1-2iy} \frac{dy}{\sqrt{y}} \right) = \\ &= 8i\sqrt{2} \ln \frac{e}{2} - \pi i^{3/2} \sqrt{t} \ln \frac{1}{2t} + \sqrt{t} \frac{\pi^2 i^{5/2}}{2} + O\left(t \ln \frac{1}{t}\right), \quad t \rightarrow +0, \end{aligned}$$

то

$$J_{21} = 4i\sqrt{2\pi\lambda} \ln \frac{e}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{i}} \ln \lambda + O(1).$$

Далее, в силу (16)

$$|J_{22}| \leq \frac{\lambda}{2} \int_0^2 \ln \frac{1}{x(2-x)} dx \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{s} |\ln s|}{C_{00} + s |\ln s| \sqrt{s^2 + 1}} \frac{e^{-\lambda sx} ds}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} J_{221}(t) dt,$$

где

$$J_{221}(t) = \int_0^2 \frac{\sqrt{t} |\ln(t/x)|}{C_{00}x + t |\ln(t/x)|} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t^2 + x^2}} \ln \frac{1}{x(2-x)} dx.$$

Так как

$$J_{221}(t) = \int_0^{2/t} \frac{|\ln y|}{C_{00}y + |\ln y|} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+y^2}} \ln \frac{1}{ty(2-ty)} dy = O\left(\ln \frac{1}{t}\right), \quad t \rightarrow +0,$$

то

$$|J_{22}| \leq \frac{\lambda}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} O\left(\ln \frac{1}{t}\right) dt = O(\ln \lambda).$$

Таким образом, $J_2 = 4i\sqrt{2\pi\lambda} \ln(e/2) + O(\ln \lambda)$.

Третий интеграл запишем в виде $J_3 = J_{31} + J_{32}$, где

$$J_{31} = \lambda \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 + e^{-2\lambda s}}{2\sqrt{s}} \frac{ds dt}{s+t} \int_0^{+\infty} \int_2^{+\infty} \Omega(\tau+1, \xi-1) e^{i\lambda\tau} e^{-\lambda\xi t} d\tau d\xi,$$

$$J_{32} = \lambda \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 + e^{-2\lambda s}}{2} \left(\frac{1}{sX_0^+(is)} - \frac{1}{\sqrt{s}} \right) \frac{ds dt}{s+t} \int_0^{+\infty} \int_2^{+\infty} \Omega(\tau+1, \xi-1) e^{i\lambda\tau} e^{-\lambda\xi t} d\tau d\xi.$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$J_{31} = \frac{\sqrt{\pi\lambda}}{2} \int_0^{+\infty} \int_2^{+\infty} \Omega(\tau+1, \xi-1) e^{i\lambda\tau} \left(\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\xi/2-1}}{\sqrt{\xi-2}} + \frac{\pi}{\sqrt{\xi}} \right) d\tau d\xi = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Аналогично с помощью (16) оценивается и J_{32} , откуда следует, что $J_3 = O(1/\sqrt{\lambda})$.

Четвёртый интеграл представим в виде $J_4 = J_{41} + J_{42}$, где

$$J_{41} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\lambda\tau} d\tau \int_2^{+\infty} \Omega(\tau+1, \xi-1) d\xi \int_0^2 \ln \frac{1}{2x-x^2} dx \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda(sx+\xi t)}}{\sqrt{s}} \frac{ds dt}{s+t},$$

$$J_{42} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\lambda\tau} d\tau \int_2^{+\infty} \Omega(\tau+1, \xi-1) d\xi \int_0^2 \ln \frac{1}{2x-x^2} dx \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{sX_0^+(is)} - \frac{1}{\sqrt{s}} \right) e^{-\lambda sx} e^{-\lambda\xi t} \frac{ds dt}{s+t}.$$

Тогда

$$J_{41} = \frac{\lambda^2}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{i\lambda\tau} d\tau \int_2^{+\infty} \Omega(\tau+1, \xi-1) d\xi \int_0^2 \sqrt{x} \ln \frac{1}{2x-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} du \int_{-u}^u \frac{dv/\sqrt{u+v}}{(\xi+x)u + (\xi-x)v} =$$

$$= \frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{i\lambda\tau} \rho_1(\tau) d\tau = i\rho_1(0) \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

здесь

$$\rho_1(\tau) = \int_0^{+\infty} \Omega(\tau+1, \xi+1) d\xi \int_0^2 \ln \frac{1}{2\eta-\eta^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi+\eta}{2-\eta}} \frac{d\eta}{\sqrt{\xi+\eta}},$$

$$\rho_1(0) = \int_0^{+\infty} \Omega(1, \xi+1) d\xi \int_0^2 \ln \frac{1}{2\eta-\eta^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi+\eta}{2-\eta}} \frac{d\eta}{\sqrt{\xi+\eta}} > 0$$

в силу отмеченных выше свойств функции $\Omega(\tau, s)$.

Далее,

$$J_{42} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_0^{+\infty+i0} e^{i\lambda\tau} \rho_2(\tau) d\tau = \frac{i\lambda}{2\pi} \rho_2(0) + \frac{i\lambda}{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho_2'(\tau) e^{i\lambda\tau} d\tau = \frac{i\lambda}{2\pi} \rho_2(0) + \dots,$$

где

$$\rho_2(\tau) = \int_2^{+\infty} \Omega(\tau+1, \xi-1) d\xi \int_0^2 \ln \frac{1}{2x-x^2} dx \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{sX_0^+(is)} - \frac{1}{\sqrt{s}} \right) e^{-\lambda sx} e^{-\lambda\xi t} \frac{ds dt}{s+t}.$$

В силу неравенства (16) значение

$$\rho_2(0) = \int_2^{+\infty} \Omega(1, \xi - 1) d\xi \int_0^2 \ln \frac{1}{2x - x^2} dx \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{sX_0^+(is)} - \frac{1}{\sqrt{s}} \right) e^{-\lambda sx} e^{-\lambda \xi t} \frac{ds dt}{s+t}$$

оценивается следующим образом:

$$|\rho_2(0)| \leq \int_2^{+\infty} \Omega(1, \xi - 1) d\xi \int_0^2 J_{421}(\xi, x) \ln \frac{1}{2x - x^2} dx,$$

где

$$\begin{aligned} J_{421}(\xi, x) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{s} |\ln s|}{C_{00} + s |\ln s|} e^{-\lambda(sx + \xi t)} \frac{ds dt}{s+t} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{ux} |\ln(u/x)|}{C_{00}x + u |\ln(u/x)|} \frac{e^{-\lambda(u+v)} dudv}{\xi u + xv} = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} dy \int_0^{y/x} \frac{|\ln t|}{C_{00} + t |\ln t|} \frac{\sqrt{t} dt}{y + (\xi - x)t} \leq \frac{1}{\xi - x} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} dy \int_0^{+\infty} \frac{|\ln t|}{C_{00} + t |\ln t|} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{C_{42}/\lambda}{\xi - x}, \end{aligned}$$

поэтому

$$|\rho_2(0)| \leq \frac{C_{42}}{\lambda} \int_2^{+\infty} \Omega(1, \xi - 1) d\xi \int_0^2 \ln \frac{1}{2x - x^2} \frac{dx}{\xi - x} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Таким образом, $J_{42} = O(1)$ и $J_4 = i\rho_1(0)\sqrt{\lambda/\pi} + O(1)$.

В результате окончательно имеем

$$\frac{F^+(1)}{U(0)} = \frac{X_0^-(-1)}{i\pi^{5/2}} \sqrt{\lambda} \left(4\pi\sqrt{2} \ln \frac{e}{2} + \rho_1(0) + O\left(\frac{\ln \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \right).$$

Так как

$$W(1) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 \cos(\lambda x) \ln \frac{1}{1 - x^2} dx = \sin \lambda \frac{\ln \lambda}{\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right),$$

то условие (10) определяет асимптотическое поведение собственных значений, отвечающих чётным собственным функциям:

$$\lambda_n^{(1)} = \pi n + \theta_1 + O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\theta_1 = \text{const}$.

2°. Искомая функция нечётная: $u(x) = -u(-x)$. Положим

$$v(x) = - \int_x^1 u(t) dt.$$

Очевидно, что $v(x)$ – чётная функция, определённая на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Проинтегрировав уравнение (1) по частям, получим

$$u(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(t) dt}{t - x}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Общая схема дальнейших рассуждений почти такая же, как в п. 1°. Продолжим это уравнение на всю вещественную прямую, доопределив функции $u(x)$ и $v(x)$ нулём вне отрезка $[-1, 1]$:

$$u(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(t) dt}{t-x} + f_+(x-1) - f_+(-x-1), \quad -\infty < x < +\infty,$$

где функция $f_+(x)$ определяется по формуле (4) и $f_+(x) = O(x^{-1})$ при $x \rightarrow +\infty$ в силу чётности функции $v(x)$.

Обозначив

$$U(p) = \int_{-1}^1 e^{i\lambda p x} u(x) dx, \quad U(0) = 0, \quad \int_{-1}^1 e^{i\lambda p x} v(x) dx = -\frac{U(p)}{i\lambda p},$$

перейдём в последнем уравнении к образам Фурье:

$$\left(1 - \frac{1}{|p|}\right) U(p) = e^{i\lambda p} F^+(p) - e^{-i\lambda p} F^+(-p).$$

Коэффициент $D(p)$ и каноническая функция $X(z)$ такие же, что и в п. 1°. Определим функцию $\Phi(z)$ по правилу

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - 1}{z^2} \frac{e^{i\lambda z} U(z)}{X_0^+(z)} - \left(1 + \frac{1}{z \operatorname{sgn} \operatorname{Re} z}\right) \frac{e^{2i\lambda z} F^+(z)}{X_0^+(z)}, & \operatorname{Im} z > 0, \\ -\frac{F^+(-z)}{X_0^-(z)}, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Аналогично рассуждениям п. 1° имеем

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{e^{2i\lambda t} F^+(t)}{t X_0^+(t)} \frac{dt}{t-z};$$

так как в нижней полуплоскости $F^+(-z) = -X^-(z)\Phi(z)$, то в верхней полуплоскости

$$F^+(z) = -\frac{X^-(-z)}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{e^{2i\lambda t} F^+(t)}{t X_0^+(t)} \frac{dt}{t+z};$$

из соотношения

$$U(p) = |p| \frac{e^{i\lambda p} F^+(p) - e^{-i\lambda p} F^+(-p)}{|p| - 1}$$

вытекает условие на спектр:

$$\operatorname{Im}(e^{i\lambda} F^+(1)) = 0. \quad (17)$$

Таким образом, на верхней мнимой полуоси $z = iy$, $0 < y < +\infty$, получаем уравнение относительно функции $\varsigma(y) = e^{-\lambda y} F^+(iy)/X_0^-(-iy)$:

$$\varsigma(y) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{X_0^-(-is)}{s X_0^+(is)} \frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y} \varsigma(s) ds = 0,$$

которое аналогично п. 1° запишем в виде

$$\varsigma(y) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y} \varsigma(s) ds = \tilde{\zeta}(y), \quad (18)$$

где

$$\tilde{\zeta}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{X_0^-(-is)}{sX_0^+(is)} - 1 \right) \frac{e^{-\lambda(s+y)}}{s+y} \varsigma(s) ds.$$

Сохранив обозначения из п. 1°, приходим к уравнениям

$$\varsigma_+(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(s+y) \varsigma_+(s) ds = \varsigma_-(s) + \tilde{\zeta}_+(y), \quad -\infty < y < +\infty;$$

$$\Sigma^+(p) - \frac{2i}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{p}{\lambda} \Sigma^+(-p) = \Sigma^-(p) + Z^+(p), \quad -\infty < p < +\infty.$$

Определим теперь функцию

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Sigma^+(z) - Z^+(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \frac{1}{\pi} \ln \frac{\lambda + iz}{\lambda - iz} \Sigma^+(-z) + \Sigma^-(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

тогда

$$\Sigma^+(z) = Z^+(z) + \frac{1}{\pi} \int_{i\lambda}^{+i\infty} \Sigma^+(t) \frac{dt}{t+z},$$

и получим задачу сопряжения

$$(1 - \Omega(p))H^+(p) = H^-(p) + G^+(p), \quad -\infty < p < +\infty,$$

индекс которой, в отличие от п. 1°, равен единице.

Факторизуем коэффициент задачи сопряжения

$$\frac{1}{1 - \Omega(p)} = \frac{E^+(p)}{E^-(p)},$$

где

$$E^+(p) = \frac{\Gamma^2(1/4 - \varepsilon/2 - ip/2)}{\Gamma(1 - \varepsilon/2 - ip/2)\Gamma(1/2 - \varepsilon/2 - ip/2)}, \quad E^-(p) = -\frac{\Gamma(\varepsilon/2 + ip/2)\Gamma(1/2 + \varepsilon/2 + ip/2)}{\Gamma^2(3/4 + \varepsilon/2 + ip/2)}.$$

У однородной задачи сопряжения существует нетривиальное решение $E(z)$, исчезающее на бесконечности, а общее решение неоднородной задачи сопряжения имеет вид

$$H^+(z) = CE^+(z) + \frac{E^+(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^+(t)/E^+(t)}{1 - \Omega(t)} \frac{dt}{t-z},$$

здесь C – произвольная постоянная, которую в дальнейшем будем считать действительной.

Соответственно,

$$e^{\varepsilon x} \Sigma_0^+(i\lambda e^x) = \frac{!}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} E^+(p) dp,$$

$$e^{\varepsilon x} \Sigma^+(i\lambda e^x) = e^{\varepsilon x} \Sigma_0^+(i\lambda e^x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} dp \frac{E^+(p)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^+(t)/E^+(t)}{1 - \Omega(t)} \frac{dt}{t-p}, \quad x > 0.$$

Вычислив интегралы, получим решение уравнения (18):

$$\begin{aligned}\varsigma(y) &= \varsigma_0(y) + \tilde{\zeta}(y) + \int_0^{+\infty} \Xi(y, t) \tilde{\zeta}(t) dt, \\ \varsigma_0(y) &= \frac{\lambda}{\pi} 2C \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \int_1^{+\infty} e^{-\lambda y s} \frac{\ln s + \tilde{b}_k}{s^{2k+1/2}} ds, \quad \Xi(y, t) = \frac{\lambda}{\pi} \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \Omega(\tau, s) e^{-\lambda(\tau y + st)} d\tau ds, \\ \Omega(\tau, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{a}_m \tilde{a}_k}{s^{5/2+2m} \tau^{1/2+2k}} (A_{mk} + B_{mk} \ln s + B'_{km} \ln \tau + C_{mk} \ln s \ln \tau), \\ A_{mk} &= \frac{1}{(m+k+1)^3} + \frac{\hat{b}_m + \tilde{b}_k}{(m+k+1)^2} + 2 \frac{\hat{b}_m \tilde{b}_k}{m+k+1}, \\ B_{mk} &= \frac{1}{(m+k+1)^2} + \frac{2\tilde{b}_k}{m+k+1}, \quad B'_{km} = \frac{1}{(m+k+1)^2} + \frac{2\hat{b}_m}{m+k+1}, \quad C_{mk} = \frac{2}{m+k+1}, \\ \tilde{a}_k &= \frac{\Gamma(1/4+k)\Gamma(3/4+k)}{(k!\pi)^2}, \quad \tilde{b}_k = \frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)} - \frac{\Gamma'(1/4+k)}{2\Gamma(1/4+k)} - \frac{\Gamma'(3/4+k)}{2\Gamma(3/4+k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \hat{a}_m &= \frac{\Gamma(5/4+m)\Gamma(7/4+m)}{(m!\pi)^2}, \quad \hat{b}_m = \frac{\Gamma'(1+m)}{\Gamma(1+m)} - \frac{\Gamma'(5/4+m)}{2\Gamma(5/4+m)} - \frac{\Gamma'(7/4+m)}{2\Gamma(7/4+m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Рассмотрим банахово пространство $\hat{C}$, состоящее из функций вида $f(x) = g(x)(1 + |\ln x|)/\sqrt{x}$, где $g(x) \in C[0, +\infty)$, с нормой $\|f\|_{\hat{C}} = \max_{0 < x < +\infty} |\sqrt{x}f(x)/(1 + |\ln x|)|$. Аналогично п. 1° доказывается, что интегральный оператор в выражении для $\tilde{\zeta}(y)$ в условии (17) является сжимающим в этом пространстве, и его норма оценивается как $O(\lambda^{-1} \ln^3 \lambda)$. Следовательно,

$$F^+(iy) = e^{\lambda y} X_0^-(-iy) \zeta_0(y) \left(1 + O\left(\frac{\ln^3 \lambda}{\lambda}\right)\right), \quad 0 < y < +\infty,$$

а условие (17) принимает вид

$$\operatorname{Im} \left(i e^{i\lambda} X_0^-(-1) \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \tilde{b}_k \right) \left(1 + O\left(\frac{\ln^3 \lambda}{\lambda}\right)\right) = 0.$$

Покажем, что $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \tilde{b}_k > 0$. В самом деле, достаточно заметить, что при $x > 0$

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) = \frac{1}{x} + \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) > \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

откуда следует оценка $\tilde{b}_k > b_k$.

Таким образом, получаем асимптотическое поведение собственных значений, отвечающих нечётным собственным функциям:

$$\lambda_n^{(2)} = \pi n + \theta_2 + O\left(\frac{\ln^3 n}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\theta_2 = \text{const}$.

Автор признателен Е.И. Моисееву за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-18006 Болг-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ukai S.* Asymptotic distribution of eigenvalues of the kernel in the Kirkwood–Riseman integral equation // J. of Math. Physics. 1971. V. 12. № 1. P. 83–92.
2. *Пальцев Б.В.* Уравнения свертки на конечном интервале для одного класса символов, имеющих степенную асимптотику на бесконечности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44. № 2. С. 322–394.
3. *Пальцев Б.В.* Асимптотика спектра интегральных операторов свёртки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67. № 4. С. 67–154.
4. *Сахнович Л.А.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35. № 4. С. 69–129.
5. *Полосин А.А.* О спектре и собственных функциях оператора свёртки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 9. С. 1180–1194.
6. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
7. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.
8. *Полосин А.А.* О решении одного сингулярного интегрального уравнения // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 710–714.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 27.05.2022 г.
После доработки 25.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.