

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.23+517.958:537.812

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОТКРЫТЫХ НЕОДНОРОДНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

© 2022 г. Ю. Г. Смирнов, Ю. А. Петрова

Исследованы свойства спектра резонансных частот в задаче о колебаниях объёмных магнитодиэлектрических резонаторов. Доказана теорема о дискретности спектра резонансных частот в задаче о колебаниях в объёмных резонаторах. Задача сведена к анализу системы объёмных сингулярных интегральных уравнений, определяющей голоморфную фредгольмову оператор-функцию спектрального параметра. Решена система уравнений Максвелла в случае пространства с диэлектрическим шаром с помощью сведения её к решению скалярного уравнения для потенциалов Дебая. Получено и исследовано характеристическое уравнение радиально-трёхслойного шара, справедливое при произвольных размерах и проницаемостях слоёв.

DOI: 10.31857/S0374064122090102, EDN: JTGWFC

1. Постановка задачи в общем случае. Рассмотрим задачу об электромагнитных колебаниях магнитодиэлектрических объёмных резонаторов в наиболее общем случае, когда среда в резонаторе является неоднородной и анизотропной, т.е. тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости – это произвольные кусочно-гладкие функции координат.

Пусть Q – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^3 с кусочно-гладкой границей ∂Q .

Рассмотрим следующий класс задач электродинамики. Среда области Q характеризуется тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$, которые представляют собой матрицы-функции размерности 3×3 , а компоненты этих тензоров являются кусочно-дифференцируемыми функциями координат. Точнее, пусть область Q разбивается на конечное число подобластей Q_i с кусочно-гладкими границами ∂Q_i ; $\bar{Q} = \bigcup_i \bar{Q}_i$; $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Будем предполагать, что $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ являются сужениями на Q_i функций, заданных на более широком множестве, т.е. $\hat{\varepsilon}(x) = \hat{\varepsilon}_i(x)$, $\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}_i(x)$ при $x \in Q_i$, $\hat{\varepsilon}_i \in C^3(\bar{B})$, $\hat{\mu}_i \in C^3(\bar{B})$, где B – открытый шар, содержащий Q , $\bar{Q} \subset B$. На ∂Q_i будем определять только предельные значения функций $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ с разных сторон в точках гладкости поверхности.

В $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$ (вне области Q) среда изотропна, а $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 = \text{const}$ и $\hat{\mu} = \mu_0 = \text{const}$.

Сформулируем задачу определения электромагнитных колебаний с временной зависимостью в виде множителя $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота, следующим образом: найти векторные непрерывно дифференцируемые в Q_i и вне \bar{Q} функции электромагнитного поля, которые удовлетворяют в областях гладкости параметров среды уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \hat{\mu} \mathbf{H} \quad (1)$$

и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 r u \right) = 0, \quad r := |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (2)$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ($\text{Im } \varepsilon_0 = 0$, $\text{Im } \mu_0 = 0$, $\text{Re } \varepsilon_0 > 0$, $\text{Re } \mu_0 > 0$), а u – любая из декартовых компонент полей \mathbf{E} или \mathbf{H} .

Далее, функции \mathbf{E} и \mathbf{H} должны быть непрерывными вплоть до границ ∂Q_i (с каждой стороны) на гладких частях поверхностей разрыва проницаемостей ∂Q_i и удовлетворять условию непрерывности тангенциальных компонент полей:

$$[\mathbf{E}_\tau] |_{\partial Q_i} = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau] |_{\partial Q_i} = 0, \quad (3)$$

где запись $[\cdot]|\partial Q_i$ обозначает разность следов с разных сторон ∂Q_i . Здесь τ – касательный вектор к ∂Q_i . Обозначения именно гладких частей границ ∂Q_i будем оговаривать отдельно.

Кроме того, поля \mathbf{E} и \mathbf{H} должны удовлетворять условию ограниченности энергии в любом конечном объёме пространства, т.е. условию

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3). \tag{4}$$

Решения задачи (1)–(4) будем называть *классическими решениями*.

2. Теоремы о фредгольмовости системы интегральных уравнений. Будем рассматривать задачи в анизотропной среде. Они могут быть сведены к системе объёмных сингулярных интегральных уравнений относительно электромагнитного поля в области Q (см. [1]):

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})\mathbf{E}(x) - \text{v.p.} \int_Q ((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y), \text{grad}) \text{grad } G(R) dy - \\ & - k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)G(R) dy - i\omega\mu_0 \int_Q (\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y) \times \text{grad } G(R) dy = 0, \quad x \in Q, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\mu}_r(x) - \hat{I})\mathbf{H}(x) - \text{v.p.} \int_Q ((\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y), \text{grad}) \text{grad } G(R) dy - \\ & - k_0^2 \int_Q (\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y)G(R) dy + i\omega\varepsilon_0 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y) \times \text{grad } G(R) dy = 0, \quad x \in Q, \end{aligned} \tag{6}$$

где v.p. – главное значение интеграла по Коши; $\hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}/\varepsilon_0$; $\hat{\mu}_r = \hat{\mu}/\mu_0$; \hat{I} – единичный тензор; G – функция Грина (фундаментальное решение) для уравнения Гельмгольца:

$$G(R) = \frac{\exp(ik_0R)}{4\pi R}, \tag{7}$$

$R = |x - y|$; $x = (x_1, x_2, x_3)$; $y = (y_1, y_2, y_3)$; \times – обозначение векторного произведения.

Далее будем использовать гильбертово пространство шестимерных вектор-функций $L_2(Q)$ со скалярным произведением, определяемым формулой

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_Q \mathbf{U}(x)\mathbf{V}^*(x) dx.$$

Отметим, что оператор уравнений (5) и (6) определён в пространстве $L_2(Q)$ (см. работы [2, с. 61; 3, с. 138]).

Систему уравнений (5), (6) согласно [2, с. 63] можно записать в эквивалентной форме, т.е. в виде интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(x) - \text{grad div} \int_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y) dy - k_0^2 \int_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y) dy - \\ & - i\omega\mu_0 \text{rot} \int_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y) dy = 0, \quad x \in Q, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}(x) - \text{grad div} \int_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y) dy - k_0^2 \int_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y) dy + \\ & + i\omega\varepsilon_0 \text{rot} \int_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y) dy = 0, \quad x \in Q. \end{aligned} \tag{9}$$

Выражения (8), (9) при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ являются интегральными представлениями и определяют электромагнитное поле вне области Q по найденному значению полей в Q , удовлетворяющих условию излучения, а значит, остаются справедливыми. Однако в этой области интегральные представления полей не будут иметь сингулярности, поскольку $\hat{\varepsilon}_r(x) = \hat{I}$, $\hat{\mu}_r(x) = \hat{I}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$.

Теперь рассмотрим вопрос о фредгольмовости интегральных уравнений. Дадим несколько определений, которые используем в дальнейшем.

Определение 1. Пусть A – линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Тогда оператор A^* , также определённый в H , называется сопряжённым к A , если равенство $(Af, g) = (f, A^*g)$ выполняется для всех $f, g \in H$.

Решения однородного уравнения $Au = 0$ будем называть нулями оператора A . Обозначим размерность подпространства нулей через $n(A)$. Тогда $n(A^*)$ – размерность подпространства нулей сопряжённого оператора A^* . Разность $\text{Ind } A = n(A) - n(A^*)$ называется индексом оператора A .

Определение 2. Если значения $n(A)$ и $n(A^*)$ конечны и индекс линейного оператора A , действующего в гильбертовом пространстве H , равен нулю, то такой оператор называется фредгольмовым.

Рассмотрим сначала интегральное уравнение в анизотропной диэлектрической среде, т.е. в среде с постоянной всюду в \mathbb{R}^3 и равной μ_0 магнитной проницаемостью. Тогда система интегральных уравнений (5), (6) сводится к объёмному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля в области Q :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})\mathbf{E}(x) - \text{v.p.} \int_Q ((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y), \text{grad}) \text{grad } G(R) dy - \\ - k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)G(R) dy = 0, \quad x \in Q. \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 1 [1]. Пусть $\hat{\mu} = \mu_0$ в \mathbb{R}^3 , а тензор-функция $\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I}$ имеет обратную в каждой точке из \overline{Q} . Тогда оператор сингулярного интегрального уравнения (10) фредгольмов в пространстве $L_2(Q)$.

Теперь рассмотрим задачи рассеяния на магнитодиэлектрическом теле, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого являются кусочно-дифференцируемыми функциями координат в Q , а поверхности разрыва параметров удовлетворяют приведённым выше условиям.

Запишем систему сингулярных интегральных уравнений (5), (6) в символическом виде:

$$A(\omega) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{S} & -i\omega\mu_0\hat{F} \\ i\omega\varepsilon_0\hat{F} & \hat{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\mathbf{E} \\ (\hat{\mu}_r - \hat{I})\mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где вид операторов \hat{S} и \hat{F} следует из (5), (6). Очевидно, что оператор \hat{S} является сингулярным оператором в $L_2(Q)$, а оператор \hat{F} – компактным. Здесь $L_2(Q)$ – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом шестимерных вектор-функций.

Рассмотрим следующее уравнение в $L_2(Q)$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\mathbf{E} \\ (\hat{\mu}_r - \hat{I})\mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

По доказанному выше оператор уравнения (12) будет фредгольмовым в $L_2(Q)$, так как система уравнений (12) распадается на два независимых уравнения вида (10). Оператор уравнения (11) также является фредгольмовым оператором в пространстве $L_2(Q)$, так как отличается от оператора уравнения (12) прибавлением к нему компактных операторов \hat{F} . Получаем следующее утверждение.

Теорема 2 [1]. Пусть тензор-функции $\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I}$ и $\hat{\mu}_r(x) - \hat{I}$ имеют обратные в каждой точке из \bar{Q} . Тогда оператор системы сингулярных интегральных уравнений (5), (6) фредгольмов в пространстве $L_2(Q)$.

3. Теорема о дискретности спектра оператор-функции. Рассмотрим оператор-функцию $A(\omega) : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ как функцию комплексной переменной $\omega \in \mathbb{C}$.

Утверждение. На всей комплексной плоскости $\omega \in \mathbb{C}$ оператор-функция $A(\omega) : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ является голоморфной.

Доказательство следует из того, что ядро (7) интегральных операторов \hat{S} и \hat{F} является аналитической функцией параметра ω .

Будем говорить, что в области Q выполнены условия C , если эрмитовы тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_i(x) + \hat{\varepsilon}_i^*(x))/2$ и $(\hat{\mu}_i(x) + \hat{\mu}_i^*(x))/2$ положительно определены, а тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_i(x) + \hat{\varepsilon}_i^*(x))/(2i)$ и $(\hat{\mu}_i(x) + \hat{\mu}_i^*(x))/(2i)$ определены неотрицательно. Символ $*$ обозначает транспонированный тензор с комплексно-сопряжёнными элементами.

Известно, что при выполнении условий C при вещественных ω задача (11) имеет только тривиальное решение (см. [1]). В этом случае оператор-функция $A(\omega) : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ имеет непустое резольвентное множество. Получаем следующий основной результат.

Теорема 3. Пусть выполнены условия C и тензор-функции $\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I}$ и $\hat{\mu}_r(x) - \hat{I}$ имеют обратные в каждой точке из \bar{Q} . Тогда спектр оператор-функции $A(\omega) : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ является дискретным множеством изолированных характеристических чисел конечной алгебраической кратности.

Доказательство следует из теоремы о голоморфной оператор-функции [4, с. 39], утверждения и теоремы 2.

В открытых объёмных магнитоэлектрических резонаторах могут существовать только комплексные резонансные частоты из-за излучения в свободное пространство [5, с. 34; 6, с. 384]. Это значит, что вещественные положительные характеристические числа у оператор-функции $A(\omega) : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ отсутствуют. Все комплексные резонансные частоты имеют отрицательную мнимую часть. Физическая интерпретация комплексных резонансных частот подробно изложена в книге [6, с. 385].

4. Постановка задачи на трёхслойном сферическом резонаторе. Перейдём к частному случаю описанной выше задачи и рассмотрим трёхслойный шар радиуса r_3 , расположенный в изотропной среде (рис. 1). Он представляет собой систему из внутреннего шара радиуса r_1 и сферически симметричных диэлектрических слоёв с постоянными диэлектрическими и магнитными проницаемостями

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1, & r \leq r_1; \\ \varepsilon_2, & r_1 \leq r_2; \\ \varepsilon_3, & r_2 \leq r_3; \\ \varepsilon_4, & r_3 \leq r; \end{cases} \quad \mu(r) = \begin{cases} \mu_1, & r \leq r_1; \\ \mu_2, & r_1 \leq r_2; \\ \mu_3, & r_2 \leq r_3; \\ \mu_4, & r_3 \leq r, \end{cases}$$

где $\varepsilon_j = \varepsilon_{0j}(1 + i\delta_{0j})$, $\mu_j = \mu_{0j}$; ε_{0j} и μ_{0j} ($j = \overline{1,4}$) – относительные диэлектрические и магнитные проницаемости; $\text{tg } \delta_{0j}$ – тангенс угла диэлектрических потерь j -го слоя. На рис. 1 зачёрнен слой, заполняемый исследуемым веществом.

Решение уравнений Максвелла в случае пространства с диэлектрическим шаром можно свести к решению скалярного уравнения для так называемых потенциалов Дебая. В сферической системе координат получим дифференциальные уравнения для электромагнитных потенциалов вида

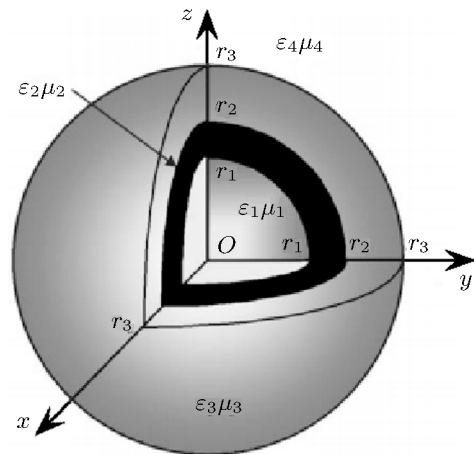


Рис. 1. Геометрия задачи [7].

$$\left(T_j + \frac{\Delta_{\perp}}{r^2}\right)U_j^E(r, \theta, \phi) = 0, \quad \left(T_j + \frac{\Delta_{\perp}}{r^2}\right)U_j^H(r, \theta, \phi) = 0, \tag{13}$$

где

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad T_j = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_j^2.$$

где $\chi_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} k$, $k = \omega/c$, c – скорость света.

Решения уравнений (13) удовлетворяют конечности амплитуд полей колебаний в центре сферы ($r = 0$), отсутствию приходящей и наличию уходящей волны при $r \rightarrow \infty$, непрерывности тангенциальных компонент полей на поверхностях раздела сред.

Функции $U_j^S(r, \theta, \phi)$ представим в виде

$$U_j^S(r, \theta, \phi) = \sum_q R_{j,q}^S(r) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi),$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ – присоединённые полиномы Лежандра первого рода, функции $R_{j,q}^S(r)$ описывают распределение по радиальной координате полей S -типа q -й моды в j -й области. Индекс q содержит индексы m и n , которые обозначают соответственно число вариаций поля по азимутальному углу ϕ , а при $m = 0$ – по полярному углу θ сферической системы координат, связанной с осью Oz .

Соотношения, определяющие компоненты q -й моды E -типа, в сферической системе координат приобретают вид

$$\begin{aligned} H_{q,r}(r, \theta, \phi) &= 0, \quad E_{q,r}(r, \theta, \phi) = \left[\varepsilon(r) \mu(r) k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] U_q^E(r, \theta, \phi), \\ H_{q,\theta}(r, \theta, \phi) &= -\frac{ik\varepsilon(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial U_q^E(r, \theta, \phi)}{\partial \phi}, \quad E_{q,\theta}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_q^E(r, \theta, \phi)}{\partial \theta \partial r}, \\ H_{q,\phi}(r, \theta, \phi) &= \frac{ik\varepsilon(r)}{r} \frac{\partial U_q^E(r, \theta, \phi)}{\partial \theta}, \quad E_{q,\phi}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_q^E(r, \theta, \phi)}{\partial \phi \partial r}, \end{aligned}$$

а для колебаний H -типа имеем

$$\begin{aligned} E_{q,r}(r, \theta, \phi) &= 0, \quad H_{q,r}(r, \theta, \phi) = \left[\varepsilon(r) \mu(r) k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] U_q^H(r, \theta, \phi), \\ E_{q,\theta}(r, \theta, \phi) &= \frac{ik\mu(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial U_q^H(r, \theta, \phi)}{\partial \phi}, \quad H_{q,\theta}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_q^H(r, \theta, \phi)}{\partial \theta \partial r}, \\ E_{q,\phi}(r, \theta, \phi) &= -\frac{ik\mu(r)}{r} \frac{\partial U_q^H(r, \theta, \phi)}{\partial \theta}, \quad H_{q,\phi}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_q^H(r, \theta, \phi)}{\partial \phi \partial r}. \end{aligned}$$

Функции $R_q^S(r)$, определяющие распределение по радиальной координате полей парциальной q -й моды S -типа, описываются соотношениями

$$R_q^S(r) = \begin{cases} A_{q,1}^S j_n(\chi_1 r), & 0 \leq r \leq r_1, \\ A_{q,2}^S j_n(\chi_2 r) + B_{q,2}^S \eta_n(\chi_2 r), & r_1 \leq r \leq r_2, \\ A_{q,3}^S j_n(\chi_3 r) + B_{q,3}^S \eta_n(\chi_3 r), & r_2 \leq r \leq r_3, \\ A_{q,4}^S h_n^{(1)}(\chi_4 r), & r_3 \leq r. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $A_{q,j}^S$, $B_{q,j}^S$ – амплитуды колебаний S -типа в j -й области; $j_n(x)$, $\eta_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции, связанные отношениями вида $z_n(x) = \sqrt{\pi x/2} Z_{n+1/2}(x)$ с цилиндрическими функциями Бесселя $J_{n+1/2}(x)$, Неймана $N_{n+1/2}(x)$ и Ханкеля $H_{n+1/2}^{(1)}(x)$ соответственно.

Граничные условия на j -й поверхности раздела сред выполняются при

$$\zeta_j R_q^S(\chi_j r_j) = \zeta_{j+1} R_q^S(\chi_{j+1} r_j) \quad \text{и} \quad \left. \frac{dR_q^S(\chi_j r)}{dr} \right|_{r=r_j} = \left. \frac{dR_q^S(\chi_{j+1} r)}{dr} \right|_{r=r_j}.$$

Здесь $\zeta_j = \varepsilon_j$ для E -типа и $\zeta_j = \mu_j$ для H -типа колебаний. Пусть указанные равенства выполнены. Введём обозначения $z_{i,j} = z_n$ ($\chi_i r_j$) и получим систему алгебраических уравнений относительно постоянных $A_{q,j}^S, B_{q,j}^S$:

$$\begin{aligned} \zeta_1 A_{q,1}^S j_{1,1} &= \zeta_2 (A_{q,2}^S j_{2,1} + B_{q,2}^S \eta_{2,1}), & \chi_1 A_{q,1}^S j'_{1,1} &= \chi_2 (A_{q,2}^S j'_{2,1} + B_{q,2}^S \eta'_{2,1}), \\ \zeta_2 (A_{q,2}^S j_{2,2} + B_{q,2}^S \eta_{2,2}) &= \zeta_3 (A_{q,3}^S j_{3,2} + B_{q,3}^S \eta_{3,2}), & \chi_2 (A_{q,2}^S j'_{2,2} + B_{q,2}^S \eta'_{2,2}) &= \chi_3 (A_{q,3}^S j'_{3,2} + B_{q,3}^S \eta'_{3,2}), \\ \zeta_3 (A_{q,3}^S j_{3,3} + B_{q,3}^S \eta_{3,3}) &= \zeta_4 A_{q,4}^S h_{4,3}^{(1)}, & \chi_3 (A_{q,3}^S j'_{3,3} + B_{q,3}^S \eta'_{3,3}) &= \chi_4 A_{q,4}^S h_{4,3}^{(1)'} \end{aligned} \quad (15)$$

Штрих у сферических функций обозначает операцию дифференцирования по аргументу.

Все амплитуды в соотношениях (14) определяются через $A_{q,2}^S$ следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{q,2}^S &= -\frac{[j_1 j_2]_1}{[j_1 \eta_2]_1} A_{q,2}^S, & A_{q,3}^S &= \frac{\zeta_2}{\zeta_3} \frac{j_{2,3} [j_1 \eta_2]_1 - \eta_{2,3} [j_1 j_2]_1}{j_{3,2} [h_4 \eta_3]_3 - \eta_{3,2} [h_4 j_3]_3} \frac{[h_4 \eta_3]_3}{[j_1 \eta_2]_1} A_{q,2}^S, \\ B_{q,3}^S &= -\frac{[h_4 j_3]_3}{[h_4 \eta_3]_3} A_{q,3}^S, & A_{q,1}^S &= \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \left[j_{2,1} - \frac{[j_1 j_2]_1}{[j_1 \eta_2]_1} \eta_{2,1} \right] A_{q,2}^S, & A_{q,4}^S &= \frac{\zeta_3}{\zeta_4 h_{4,3}} \left[j_{3,3} - \frac{[h_4 j_3]_3}{[h_4 \eta_3]_3} \eta_{3,3} \right] A_{q,3}^S. \end{aligned}$$

Здесь

$$[f_i g_j]_k = q_i f'_{i,k} g_{j,k} - q_j f_{i,k} g'_{j,k}, \quad q_i = \frac{\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{\zeta_i}.$$

Условие существования нетривиальных решений системы (15) приводит к характеристическому уравнению

$$[h_4 j_3]_3 \times \{ [j_1 \eta_2]_1 [j_2 \eta_3]_2 - [j_1 j_2]_1 [\eta_2 \eta_3]_2 \} = [h_4 \eta_3]_3 \times \{ [j_1 \eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_1 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2 \}. \quad (16)$$

5. Численное исследование характеристического уравнения. Характеристическое уравнение (16) при заданных параметрах структуры определяет комплексные частоты собственных колебаний, т.е. соотношение между волновым числом χ и радиусом r . Моды диэлектрического шара описываются с помощью индексов m, n, q . Индекс q вводится из-за необходимости определения: какому множеству решений соответствует то или иное значение собственной частоты. Индекс показывает число узлов поля, лежащих внутри шара, и прямо пропорционален нулям функции Бесселя этого шара.

Далее численно исследуем структуру, в которой параметры внутреннего шара и внешнего слоя совпадают ($\varepsilon_1 = \varepsilon_3; \mu_1 = \mu_3$), а изучаемое вещество заполняет средний слой. При этом уравнение (16) принимает вид

$$[h_4 j_3]_3 \times \{ [j_3 \eta_2]_1 [j_2 \eta_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 \eta_3]_2 \} = [h_4 \eta_3]_3 \times \{ [j_3 \eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2 \}. \quad (17)$$

Если перенести правую часть равенства (17) влево, то получим дисперсионное уравнение для вычисления собственных значений χ в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\chi) &= [h_4 j_3]_3 \times \{ [j_3 \eta_2]_1 [j_2 \eta_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 \eta_3]_2 \} - \\ &- [h_4 \eta_3]_3 \times \{ [j_3 \eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2 \} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Представим $\chi = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда, взяв вещественную и мнимую части от выражения (18), получим систему вещественных дисперсионных уравнений для определения вещественной и мнимой частей волнового числа χ :

$$\Delta_1(\alpha, \beta) := \text{Re } \Delta(\chi) = 0, \quad \Delta_2(\alpha, \beta) := \text{Im } \Delta(\chi) = 0. \quad (19)$$

Для определения набора (α, β) решим систему уравнений (19) с помощью метода пристрелки (рис. 2).

Разместив обе кривые (решения каждого уравнения в (19)) на одной плоскости, определим их точки пересечения, которые являются решением исходной задачи. Измельчая сетку, можно добиться необходимой точности решений.

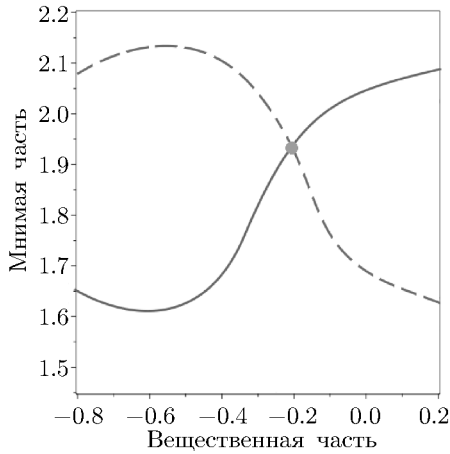


Рис. 2. Численное решение системы (19): сплошная кривая – решение первого уравнения системы (19); штриховая – решение второго уравнения системы (19); точка пересечения кривых является решением системы (19).

темы, собственное значение волнового числа χ). Из графиков видно, что колебаниям E -типа соответствуют меньшие значения волновых чисел, чем колебаниям H -типа. Это прослеживается и в других вычислениях. Модули максимальных значений волнового числа принадлежат решению системы H -типа, когда средний слой заполнен этиловым спиртом.

Для иллюстрации теоретических результатов, полученных выше, приведём численное исследование характеристического уравнения (получены графики зависимости волнового числа χ от круговой частоты ω) с разными значениями относительной диэлектрической проницаемости среднего слоя ε_{02} и толщины $\Delta = r_2 - r_1$.

Параметры, общие для всех расчётов, выбраны следующим образом. Исследуем, помещённую в вакуум структуру с радиусами $r_1 = 3.6$, $r_2 = 3.7$ и $r_3 = 3.9$ см. Магнитная проницаемость всех этих сред равна единице. Внутренний шар и наружный слой изготовлены из фторопласта с параметрами: $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{03} = 2.07$, $\text{tg } \delta_{01} = \text{tg } \delta_{03} = 1.7 \cdot 10^{-4}$. Средний слой заполнялся бензином ($\varepsilon_{02} = 1.88$, $\text{tg } \delta_{02} = 3.3 \cdot 10^{-3}$), воздухом ($\varepsilon_{02} = 1.0$, $\text{tg } \delta_{02} = 0$), этиловым спиртом ($\varepsilon_{02} = 4.1$, $\text{tg } \delta_{02} = 3.05 \cdot 10^{-1}$), трансформаторным маслом ($\varepsilon_{02} = 2.2$, $\text{tg } \delta_{02} = 4.5 \cdot 10^{-2}$) и плавленным кварцем ($\varepsilon_{02} = 3.6$, $\text{tg } \delta_{02} = 1.2 \cdot 10^{-4}$).

Расчёты на рис. 3 выполнены при $\Delta = 0.1$ см (сплошной линией показаны решения первого уравнения в (19), штриховой – второго, точки – приближённое решение системы,

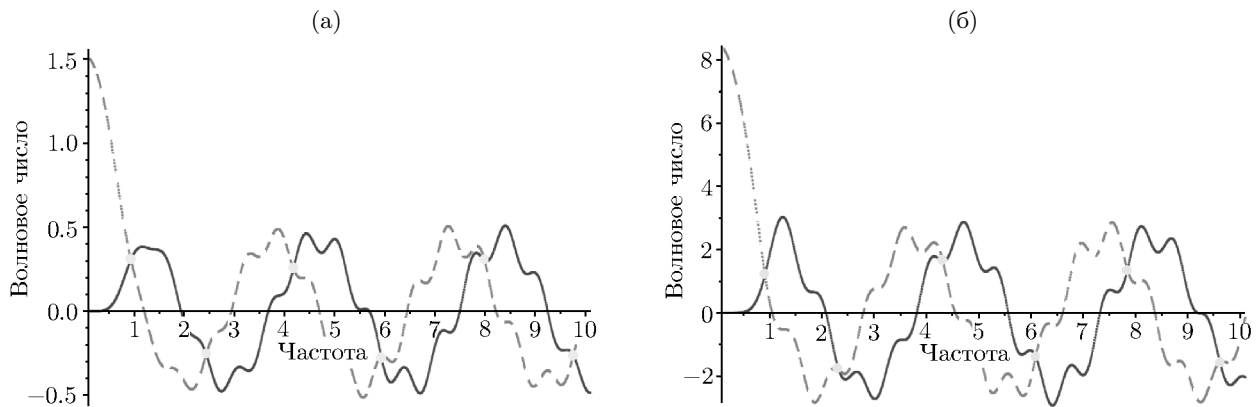


Рис. 3. Численное решение системы (19) для колебаний E - и H -типа. Средний слой заполнен бензином. $\varepsilon_{02} = 1.88$, $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{03} = 2.07$, $\text{tg } \delta_{02} = 3.3 \cdot 10^{-3}$, $\text{tg } \delta_{01} = \text{tg } \delta_{03} = 1.7 \cdot 10^{-4}$, $r_1 = 3.6$, $r_2 = 3.7$, $r_3 = 3.9$.

Предложенный метод нахождения нескольких первых частот для различных материй и размеров среднего слоя трёхслойного шара верен.

На рис. 4 рассмотрен резонатор при заполнении среднего слоя различными диэлектриками. Показана зависимость значений вещественной и мнимой частей решения системы от толщины среднего слоя. На графиках видно, что значения значительно отличаются, что даёт возможность однозначно идентифицировать исследуемые вещества, а значит, и по-новому их исследовать.

Результаты. В работе рассмотрена задача об электромагнитных колебаниях магнито-диэлектрического объёмного резонатора в наиболее общем случае. Исследованы свойства и доказана дискретность спектра резонансных частот. Задача сведена к анализу системы интегро-дифференциальных объёмных сингулярных уравнений по области неоднородности. Доказано, что оператор-функция, определяемая системой интегро-дифференциальных уравнений, является голоморфной функцией спектрального параметра, а при некоторых дополнительных

условиях на тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости – функцией в выбранном пространстве.

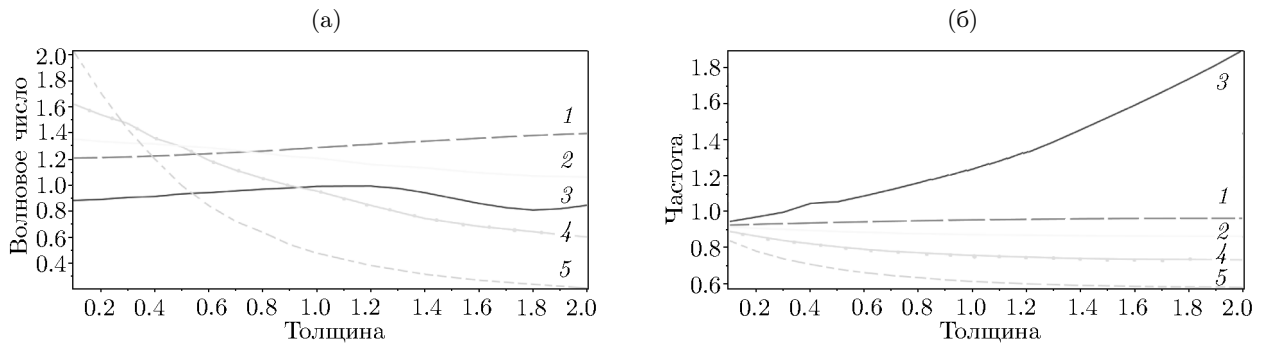


Рис. 4. Зависимости мнимой (а) и вещественной (б) частей решения (19) собственных колебаний H -типа от толщины среднего слоя, заполненного: 1 – бензином, 2 – трансформаторным маслом, 3 – воздухом, 4 – плавленным кварцем, 5 – этиловым спиртом.

Исходная модельная задача сведена к решению скалярного уравнения для потенциалов Дебая. Полученное характеристическое уравнение (16) исследовано для случая, когда параметры структуры внутреннего и внешнего шаров совпадают. Решения этого уравнения позволяют изучить зависимость комплексной диэлектрической проницаемости исследуемого вещества от параметров резонатора при известных его спектральных характеристиках.

Предложен численный метод, основанный на нахождении корней характеристического уравнения с помощью метода пристрелки. Разработан алгоритм в системе компьютерной математики Maple, применённый для исследования структуры среднего слоя, заполненного бензином, воздухом, этиловым спиртом, трансформаторным маслом и плавленным кварцем. Проиллюстрированы зависимости решения системы от частот, а также значений волнового числа/частоты от радиуса. Численные результаты, полученные на основе разработанных в данной работе методов, совпадают с данными, полученными ранее другими методами [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самохин А.Б., Смирнов Ю.Г. Теоремы единственности и существования решения задач рассеивания электромагнитных волн на трёхмерных анизотропных телах в дифференциальной и интегральной постановке // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 1. С. 85–94.
2. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М., 1998.
3. Смирнов Ю.Г., Цупак А.А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М., 2016.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
5. Ильченко М.Е., Взятыйшев В.Ф., Гассанов Л.Г. и др. Диэлектрические резонаторы. М., 1989.
6. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.
7. Суворова О.А., Филиппов Ю.Ф. Трёхслойный шаровой резонатор для измерения диэлектрических проницаемостей веществ // Радиофизика и радиоастрономия. 2007. Т. 12. № 2. С. 214–222.

Пензенский государственный университет,
 Научно-исследовательский центр
 “Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике”,
 г. Пенза

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.
 После доработки 25.04.2022 г.
 Принята к публикации 05.07.2022 г.