ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1274–1283

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55

РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛЯХ РЫНКА, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© 2022 г. А. В. Арутюнов, Н. Г. Павлова

Изучен вопрос существования вектор-функций равновесных цен в моделях рынка, описываемых дифференциальными уравнениями. В исследуемых моделях спрос и предложение зависят не только от цен на товары, но и от скоростей изменения цен. Достаточные условия существования равновесия в таких моделях получены как следствия теорем о существовании точек совпадения отображений, действующих из q_0-симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства цен в метрическое пространство приобретаемых наборов товаров.

DOI: 10.31857/S0374064122090114, EDN: JTJTNX

Введение. При моделировании рынка большое значение имеет фактор времени. Известный экономист Фридрих Август фон Хайек в 1936 г. писал: “Ход времени весьма важен для придания понятию равновесия какого-либо смысла. Об этом стоит упомянуть, поскольку многие экономисты оказались, похоже, неспособны найти место для времени в равновесном анализе и потому предположили, что понятие равновесия должно рассматриваться как вневременное. Подобное представление мне кажется лишённым смысла.” Динамические модели “спрос-предложение”, учитывающие фактор времени, более адекватно, чем статические, описывают процессы современного рынка, происходящие в долгосрочные рыночные периоды. С помощью динамических моделей экономических систем решаются многие задачи государственного экономического планирования, многие макро- и микроэкономические задачи маркетинга и др. Особый интерес представляют модели процессов рынка, описываемые дифференциальными уравнениями (динамические модели с непрерывным временем), которые изучались Дж.К. Эвансом, Р.Г.Д. Алленом, Дж.Р. Хиксом, Д. Гейлом, Р. Солоу, П.А. Самуэльсоном и другими (см., например, [1–4]). Важной проблемой при изучении таких моделей является получение условий существования положения равновесия (в случае рынка многих товаров – вектор-функции равновесных цен). До настоящего времени были получены лишь условия существования равновесия в некоторых специальных случаях, в частности, в одномерных моделях или многомерных линейных моделях. Для многомерных нелинейных динамических моделей, учитывающих специфику пространства цен, вопрос существования равновесия до сих пор оставался открытым. Для получения достаточных условий существования равновесия в этих моделях можно применить результаты теории накрывающих отображений, а именно, они могут быть получены как следствие теорем о существовании точек совпадения накрывающего и липшицевого отображений, действующих в абстрактных квазиметрических пространствах (в этом случае вектор-функция равновесных цен рассматривается как точка совпадения отображений спроса и предложения). Этот подход (для статических моделей) уже был применён авторами в статьях [5, 6]. Однако достаточные условия существования равновесных вектор-функций цен в динамических моделях рынка многих товаров в случае, если спрос и предложение зависят от времени и скорости изменения цен, до сих пор не были получены.

В данной работе результаты, полученные в [7–10], используются для вывода достаточных условий существования равновесия в рыночных моделях, которые учитывают влияние фактора времени, а спрос и предложение зависят не только от текущих цен на товары, но и от скорости изменения цен. Ещё одной отличительной чертой настоящей работы является рассмотрение пространства цен как q_0-симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства, что позволяет более точно описать процессы рынка, в отличие от существующих моделей, не учитывающих возможности внешнего (в том числе государственного) регулирования цен.

1. Динамические модели рынка многих товаров. Рассмотрим динамическую модель рынка многих товаров, обобщающую модель Аллена–Эванса.

Пусть на рынке представлено $n \in \mathbb{N}$ товаров, причём i-й товар в момент времени $t \in [t_1, t_2]$, где $t_2 > t_1 \geqslant 0$ заданы, для потребителя имеет цену $p_i = p_i(t) \in [c_{1i}, c_{2i}]$, $i = \overline{1,n}$. Здесь $c_1 = (c_{11}, \ldots, c_{1n})$ и $c_2 = (c_{21}, \ldots, c_{2n})$, $c_{2i} > c_{1i} \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$, – заданные векторы, определяющие естественные ограничения на цены. Кроме того, известны значения цен в момент времени t_1: $p(t_1) = \bar{p} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$.

Предположим также, что заданы числа $q_0, q_1, q_2 \geqslant 1$ и определяющая возможности внешнего регулирования цен функция $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}_+$, $X = [c_{11}, c_{21}] \times \ldots \times [c_{11}, c_{21}]$, удовлетворяющая условиям

$$\rho_X(p; p^*) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad p = p^*, \tag{1}$$

$$\rho_X(p; p^*) \leqslant q_0 \rho_X(p^*; p) \quad \text{для любых} \quad p, p^* \in X, \tag{2}$$

$$\rho_X(p; p^*) \leqslant q_1 \rho_X(p; p^{**}) + q_2 \rho_X(p^{**}; p^*) \quad \text{для всех} \quad p, p^*, p^{**} \in X. \tag{3}$$

Функция ρ_X позволяет учитывать в исследуемой модели специфику пространства цен, в частности, отличие механизмов повышения и понижения цен.

На скорости изменения цен накладываются условия $\dot{p}(t) = (\dot{p}_1(t), \dot{p}_2(t), \ldots, \dot{p}_n(t)) \in P$ для почти всех (п.в.) значений t, где $P \subseteq \mathbb{R}^n$ – заданное замкнутое множество.

Спрос совокупного потребителя описывается отображением

$$D : P \times X \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n, \quad D = D(\dot{p}(t), p(t), t),$$

где $D_i(\dot{p}(t), p(t), t)$, $i = \overline{1,n}$, – объём приобретаемого в момент времени t i-го товара. Предложение совокупного производителя описывается отображением

$$S : P \times X \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n, \quad S = S(\dot{p}(t), p(t), t),$$

где $S_i(\dot{p}(t), p(t), t)$, $i = \overline{1,n}$, – объём произведённого и предлагаемого в момент времени t на рынке i-го товара.

Отображения предложения S и спроса D предполагаются непрерывными по t, кроме того, отображение предложения предполагается накрывающим по первому аргументу и липшицевым по второму, отображение спроса – липшицевым по первому и второму аргументу.

Под динамической моделью "спрос–предложение" с непрерывным временем будем понимать набор

$$\sigma = (D(\dot{p}(t), p(t), t), S(\dot{p}(t), p(t), t), t_1, t_2, \bar{p}, P, c_1, c_2, q_0, q_1, q_2). \tag{4}$$

Определим полное метрическое (как обычно, под *полным метрическим пространством* понимаем метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства) пространство $AC_\infty([t_1, t_2], \bar{p}, P)$ абсолютно непрерывных функций $p : [t_1, t_2] \to X$ таких, что $\dot{p} \in L_\infty([t_1, t_2], P)$, $p(t_1) = \bar{p}$, с метрикой

$$\rho_{AC_\infty([t_1,t_2],\bar{p},P)}(p, p^*) = \rho_{L_\infty([t_1,t_2]),P)}(\dot{p}, \dot{p}^*).$$

Определение 1. Пусть $\delta \in (0, t_2 - t_1)$. *Положением равновесия* в модели (4), отвечающим значению δ, называется абсолютно непрерывная функция $p^\delta : [t_1, t_1 + \delta] \to \mathbb{R}^n$, производная которой существенно ограничена и для которой выполняются условия

$$p(t_1) = \bar{p} := (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n),$$

$$D(\dot{p}(t), p(t), t) = S(\dot{p}(t), p(t), t), \quad \dot{p} \in P \quad \text{для любого} \quad t \in [t_1, t_1 + \delta].$$

Для получения достаточных условий существования положения равновесия в моделях рынка будем рассматривать равновесие как точку совпадения соответствующих отображений спроса и предложения, действующих из q_0-симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства цен в метрическое пространство приобретаемых наборов товаров.

2. Формализация задачи и вспомогательные результаты. Для описания пространства цен необходимо следующее

Определение 2 [10]. Пусть заданы множество X и числа $q_0, q_1, q_2 \geqslant 1$. Функция $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая условию (1) (аксиома тождества), условию (2) (аксиома q_0-симметрии) и условию (3) ((q_1, q_2) – обобщённое неравенство треугольника), называется *q_0-симметрической (q_1, q_2)-квазиметрикой*, а пара (X, ρ_X) – *q_0-симметрическим (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством.*

Пространства такого типа являются объектами интенсивного исследования (см., например, работы [10–14]) и имеют широкое применение в теории оптимизации и аппроксимации, выпуклом анализе и в различных прикладных областях. В настоящей статье описание пространства цен как q_0-симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства позволяет построить модель, более точно описывающую процессы рынка и учитывающую специфику пространства цен на товары.

Фиксируем числа $q_0, q_1, q_2 \geqslant 1$. Рассмотрим q_0-симметрическое (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ_X) и метрическое пространство (Y, ρ_Y). Относительно функции ρ_Y подразумеваем выполненными обычные аксиомы метрики. Введём в рассмотрение множества

$$B_X(x, r) = \{\bar{x} \in X : \rho_X(x, \bar{x}) \leqslant r\}, \quad B_Y(y, r) = \{\bar{y} \in Y : \rho_Y(y, \bar{y}) \leqslant r\},$$

которые будем называть шарами радиуса r с центром в точке x и с центром в точке y соответственно. Отметим, что шар $B_Y(y, r) \subseteq Y$ является замкнутым, а шар $B_X(x, r) \subseteq X$ замкнутым множеством может не быть (относительно топологии на X, порождаемой функцией ρ_X).

Будем говорить, что последовательность $\{x_i\}$ q_0-симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, ρ_X) сходится к $x_0 \in X$, если $\lim\limits_{i\to\infty} \rho_X(x_0, x_i) = 0$. Последовательность $\{x_i\}$ будем называть *фундаментальной последовательностью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех натуральных чисел m и n таких, что $n > m > N$, выполняется неравенство $\rho_X(x_m, x_n) < \varepsilon$. Как обычно, под полнотой пространства (X, ρ_X) будем понимать сходимость любой фундаментальной последовательности к элементу этого пространства. Отметим, что в полном q_0-симметрическом (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве предел фундаментальной последовательности может быть не единственным.

В теории неявных уравнений (как алгебраических, так и дифференциальных), к решению которых сводится задача поиска положений рыночного равновесия, большую роль играют накрывающие и липшицевы отображения.

Определение 3. Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *α-накрывающим*, если

$$B_Y(\Psi(x), \alpha r) \subseteq \Psi(B_X(x, r)) \quad \text{для любого} \quad r \geqslant 0, \quad x \in X.$$

Определение 4. Пусть задано $\beta > 0$. Отображение $\Phi : X \to Y$ называется *β-липшицевым*, если

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leqslant \beta \rho_X(x_1, x_2) \quad \text{для всех} \quad x_1, x_2 \in X.$$

Определение 5. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *замкнутым*, если для любых последовательностей $\{x_i\} \subset X$, $\{y_i\} \subset Y$, сходящихся к точкам x_0 и y_0 соответственно, и таких, что $(x_i, y_i) \in \operatorname{gph} \Psi = \{(x, y) \in X \times Y : y = \Psi(x)\}$ для всех $i \in \mathbb{N}$, выполняется условие $(x_0, y_0) \in \operatorname{gph} \Psi$.

Пусть заданы отображения $\Psi, \Phi : X \to Y$ и числа $\alpha > \beta \geqslant 0$.

В статье [10] получена теорема, содержащая условия, гарантирующие существование точки совпадения у отображений, действующих в квазиметрических пространствах. Для её формулировки введём следующие обозначения:

$$S(\theta, 0) = 0, \quad S(\theta, n) = \frac{1 - \theta^n}{1 - \theta}, \quad \theta \in [0, 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$m_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : q_2 \beta^j < \alpha^j\},$$

а в предположении, что $q_0^2\beta < \alpha$, определим число

$$n_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : q_1(q_0^2\beta)^j < \alpha^j\}.$$

Теорема 1 (о существовании точек совпадения) [10]. *Предположим, что q_0-симметрическое $(q1, q2)$-квазиметрическое пространство (X, ρ_X) является полным. Пусть отображение Ψ является α-накрывающим и замкнутым, а отображение Φ – липшицевым с константой $\beta < \alpha$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in X$. Тогда у отображений Ψ и Φ существует такая точка совпадения ξ, что имеет место оценка*

$$\varliminf_{\eta\to\xi} \rho_X(x_0, \eta) \leqslant \frac{q_1^2\alpha^{m_0-1}S(q_2\beta/\alpha, m_0-1) + q_1(q_2\beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2\beta^{m_0}}\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Если выполняется дополнительное условие $q_0^2\beta < \alpha$, то имеют место оценки

$$\rho_X(\xi, x_0) \leqslant q_0q_2^2\frac{q_2\alpha^{n_0-1}S(q_1q_0^2\beta/\alpha, n_0-1) + (q_1q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1(q_0^2\beta)^{n_0}}\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)),$$

$$\varliminf_{\eta\to\xi} \rho_X(\eta, x_0) \leqslant q_0q_2\frac{q_2\alpha^{n_0-1}S(q_1q_0^2\beta/\alpha, n_0-1) + (q_1q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1(q_0^2\beta)^{n_0}}\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Применим эту теорему для получения условий разрешимости уравнения вида $F(x, x) = y$ относительно x. Для этого сформулируем следующее

Определение 6 [8]. Пусть заданы число $\alpha > 0$ и множества $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *условно α-накрывающим относительно множеств U и V*, если для любых $u \in U$ и $r > 0$ таких, что $B_X(u, r) \subseteq U$, имеет место включение

$$\Psi(B_X(u, r)) \supseteq B_Y(\Psi(u), \alpha r) \bigcap V \bigcap \Psi(U).$$

Пусть заданы полное q_0-симметрическое (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ_X), метрическое пространство (Y, ρ_Y), отображение $F : X \times X \to Y$, числа $\alpha > \beta \geqslant 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ и точка $\hat{x} \in X$. Положим

$$R_{\min} = \min\{R_1, R_2\}, \quad \hat{y} = F(\hat{x}, \hat{x}),$$

$$r(y) = \gamma(n_0)\rho_Y(y, \hat{y}), \quad \gamma(n_0) = q_0q_2^2\frac{q_2\alpha^{n_0-1}S(q_1q_0^2\beta/\alpha, n_0-1) + (q_1q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1(q_0^2\beta)^{n_0}},$$

$$\hat{U}(y) = B_X(\hat{x}, r(y)) \quad \text{для любого} \quad y \in Y. \tag{5}$$

Следующая теорема, обобщающая теорему 1 из [9] на случай квазиметрических пространств, даёт достаточные условия для разрешимости уравнения $F(x, x) = y$ относительно x.

Теорема 2. *Предположим, что при любом $x_2 \in U = B_X(\hat{x}, R_1)$ отображение $F(\,\cdot\,, x_2)$ является условно α-накрывающим относительно шаров U, $V(x_2) = B_Y(F(\hat{x}, x_2), \alpha R_2)$, а при любом $x_1 \in U$ отображение $F(x_1, \cdot)$ удовлетворяет на множестве U условию Липшица с константой β такой, что $q_1q_0^2\beta < \alpha$.*

Предположим также, что для всех $y \in B_Y(\hat{y}, \alpha R_2)$ и для всех сходящихся последовательностей $u_i \to u$, $u_i, u \in U$, из равенства $\lim\limits_{i\to\infty} F(u_i, u) = y$ следует равенство $F(u, u) = y$.

Тогда для любого $y \in Y$, для которого выполняются следующие условия:

$$\rho_Y(y, \hat{y}) \leqslant \frac{1}{\gamma(n_0)}R_{\min}, \tag{6}$$

$$y \in \bigcap_{x_2\in\hat{U}(y)} F(U, x_2), \tag{7}$$

существует решение $x \in U$ *уравнения* $F(x,x)=y$, *удовлетворяющее оценке*

$$\rho_X(x,\hat{x}) \leqslant r(y) = \gamma(n_0)\rho_Y(y,\hat{y}).$$

Доказательство. Из условий (5) и (6) следует, что для всех $y \in Y$ справедливо неравенство $r(y) \leqslant R_1$ и, значит, $\hat{U}(y) = B_X(\hat{x}, r(y)) \subseteq U = B_X(\hat{x}, R_1)$.

Далее, в силу условной α-накрываемости отображения $F(\,\cdot\,,x_2)$ относительно шаров U и $V(x_2)$ и включения (7) получаем, что для любого $y \in Y$ существует точка $\xi \in X$ такая, что

$$F(\xi,\hat{x}) = y, \quad \rho_X(\hat{x},\xi) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(\hat{y},y). \tag{8}$$

Также в силу условной α-накрываемости отображения $F(\,\cdot\,,x_2)$ относительно шаров U и $V(x_2)$ и включения (7) имеем, что для любых $y \in Y$ и $\xi \in S(y)$, где множество $S(y)$ состоит из точек $\xi \in \hat{U}(y)$, для которых найдутся точки $x_2 \in U(y)$ такие, что $F(\xi,x_2)=y$ и $\rho(\xi,x_2) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(y,F(y,y))$, существует точка $\hat{\xi} \in X$ такая, что выполняются условия

$$F(\hat{\xi},\xi) = y, \quad \rho_X(\xi,\hat{\xi}) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(F(\xi,\xi),y). \tag{9}$$

Для нахождения решения уравнения $F(x,x)=y$ (для всех y, удовлетворяющих условиям теоремы) применим метод итераций. Для этого построим следующую последовательность $\{u_i\}$.

Положим $u_0 = \hat{x}$. В силу условия (8) существует элемент $u_1 \in X$ такой, что $F(u_1,u_0)=y$ и

$$\rho_X(u_0,u_1) \leqslant \frac{1}{\alpha}\rho_Y(\hat{y},y) = \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}r(y) \leqslant r(y).$$

Следовательно, $u_1 \in S(y) \subseteq \hat{U}(y)$.

В силу условия (9) существует $u_2 \in X$, что $F(u_2,u_1)=y$ и

$$\rho_X(u_1,u_2) \leqslant \frac{1}{\alpha}\rho_Y(F(u_1,u_1),y) = \frac{1}{\alpha}\rho_Y(F(u_1,u_1),F(u_1,u_0)).$$

По условию теоремы при любом $x_1 \in U$ отображение $F(x_1,\cdot\,)$ удовлетворяет на множестве U условию Липшица с константой β, следовательно

$$\rho_X(u_1,u_2) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\rho_X(u_1,u_0) \leqslant \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}\,\frac{q_0\beta}{\alpha}r(y),$$

откуда получим неравенства

$$\rho_X(u_0,u_2) \leqslant q_1\rho_X(u_0,u_1) + q_2\rho_X(u_1,u_2) \leqslant \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}\left(q_1 + \frac{q_0q_2\beta}{\alpha}\right)r(y) \leqslant r(y),$$

а, значит, $u_2 \in S(y) \subseteq \hat{U}(y)$.

Следуя указанному алгоритму, построим последовательно элементы u_3, u_4, … На i-м шаге получим элемент $u_i \in S(y) \subseteq \hat{U}(y)$ такой, что $F(u_i,u_{i-1})=y$ и справедлива оценка

$$\rho_X(u_{i-1},u_i) \leqslant \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}\,\frac{q_0^{i+1}\beta^{i+1}}{\alpha^{i+1}}r(y). \tag{10}$$

Отсюда следует, что

$$\rho_X(u_{i-1},u_0) \leqslant \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}\left((1-q_2)q_1^{i+1} + q_2q_1^{i+1}\left(q_1 - \frac{q_0^{i+2}\beta^{i+2}}{\alpha^{i+2}}\right)\left(q_1 - \frac{q_0\beta}{\alpha}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha\gamma(n_0)}\left(q_1^{i+1} + q_2q_1^{i+1}\left(S\left(\frac{q_0\beta}{q_1\alpha}; i+2\right) - 1\right)\right) \leqslant r(y).$$

Таким образом, $u_i \in S(y) \subseteq \hat{U}(y)$. Кроме того, в силу (11) расстояния между построенными последовательными элементами u_{i-1} и u_i оценивается соответствующими членами убывающей геометрической прогрессии, последовательность $\{u_i\} \subset \hat{U}(y)$ является фундаментальной. Тогда в силу полноты пространства X существует (возможно, не единственный) элемент $x \in \hat{U}(y)$, являющийся пределом этой последовательности.

Далее, имеем

$$\rho_Y(F(u_i,x),y) = \rho_Y(F(u_i,x),F(u_i,u_{i-1})) \leqslant \beta\rho_X(x,u_{i-1}) \to 0, \quad i \to \infty.$$

Из последнего выражения следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Вопрос о существовании положения равновесия в модели рынка (4) в настоящей статье сводится к вопросу существования локального решения дифференциального уравнения.

Рассмотрим задачу Коши для не разрешённого относительно производной дифференциального уравнения, содержащего дополнительные ограничения на производную искомой функции

$$f(\dot{x},x,t) = 0, \quad \dot{x} \in P, \quad t \in [t_1,t_2], \tag{11}$$

$$x(a) = \hat{x}, \tag{12}$$

где $P \subseteq \mathbb{R}^n$ – заданное замкнутое множество, $\hat{x} \in X$.

Будем предполагать, что функция $f : P \times X \times [t_1,t_2] \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

1) $f(\,\cdot\,,\cdot\,,t)$ непрерывна для п.в. $t \in [t_1,t_2]$;

2) $f(\xi,x,\cdot\,)$ измерима для всех $(\xi,x) \in P \times X$;

3) для любого $\rho > 0$ найдётся такое число M, что для любых $(\xi,x) \in P \times X$, удовлетворяющих неравенству $||(\xi,x)||_{AC_\infty} \leqslant \rho$, и для п.в. $t \in [t_1,t_2]$ имеет место оценка $|f(\xi,x,t)| \leqslant M$.

Пусть $\delta \in (0,t_2-t_1)$. *Решением задачи Коши* (12), (13), соответствующим значению δ, на отрезке $[t_1,t_1+\delta]$ будем называть абсолютно непрерывную функцию $x^\delta : [t_1,t_1+\delta] \to X$, производная которой существенно ограничена, для неё справедливо равенство (13), а для п.в. $t \in [t_1,t_1+\delta]$ выполняется условие (12).

Следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 3 из работы [9] на случай квазиметрических пространств, содержит условия, гарантирующие существование локального решения задачи Коши (12), (13).

Теорема 3 (о существовании локальных решений дифференциального уравнения). *Предположим, что существуют числа $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $\nu > 0$, $\delta \in (0,t_2-t_1]$ и функция $u_0 \in L_\infty([t_1,t_2],P)$ такие, что выполняются следующие условия:*

1) существует число $\alpha > 0$ такое, что для п.в. $t \in [t_1,t_1+\delta]$ и всех $x \in B_X(\bar{x},\nu)$ отображение $f(\,\cdot\,,p,t) : P \to \mathbb{R}^m$ является условно α-накрывающим относительно шаров

$$U(t) = B_P(u_0(t),R_1), \quad V(x,t) = B_{\mathbb{R}^m}(f(u_0(t),x,t),\alpha R_2);$$

2) для п.в. $t \in [t_1,t_1+\delta]$ и всех $x \in B_X(\bar{x},\nu)$ выполнено включение $0 \in f(U(t),x,t)$;

3) существует неотрицательное число $L < \dfrac{\delta\alpha}{q_1q_0^2}$ такое, что для всех $x,\tilde{x} \in B_X(\bar{x},\nu)$, для всех функций $u \in U(t)$ и для п.в. $t \in [t_1,t_1+\delta]$ выполняется неравенство

$$|f(u,x,t) - f(u,\tilde{x},t)| \leqslant L\rho_X(x,\tilde{x});$$

4) выполняется неравенство $r_0 < R_{\min} = \min\{R_1,R_2\}$, где

$$r_0 := \alpha^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[t_1,t_1+\delta]} |f(u_0(t),\bar{x},t)|.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta_\varepsilon \in (0,\delta]$ и соответствующее решение

$$x^{\delta_\varepsilon} \in AC_\infty([t_1,t_1+\delta_\varepsilon],\bar{x},P)$$

задачи (11), (12) такие, что выполняется неравенство $\rho_{L_\infty([t_1,t_1+\delta_\varepsilon],\Omega)}(\dot{x}^{\delta_\varepsilon},u_0^{\delta_\varepsilon}) < r_0+\varepsilon$, где $u_0^{\delta_\varepsilon}$ – сужение функции u_0 на отрезок $[t_1,t_1+\delta_\varepsilon]$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из работы [9] и основано на применении теоремы 2 к отображению

$$F : L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], P) \times L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], P) \to L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], \mathbb{R}^m),$$

определяемому через оператор Немыцкого:

$$F(z_1, z_2) = N_f(z_1, Cz_2),$$

$$(N_f(z, x))(t) = f(z(t), x(t), t), \quad (Cz)(t) = \hat{x} + \int\limits_a^t z(s)ds.$$

Теорема доказана.

3. Основной результат. В следующей теореме сформулированы достаточные условия существования равновесия в динамической модели рынка (4).

Теорема 4. *Предположим, что существуют числа* $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $\nu > 0$, $\delta \in (0, t_2 - t_1]$ *и функция* $u_0 \in L_\infty([t_1, t_2], P)$ *такие, что выполняются следующие условия:*

1) существует число $\alpha > 0$ *такое, что для п.в.* $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ *и всех* $p \in B_{\mathbb{R}^n}(\bar{p}, \nu)$ *отображение* $S(\,\cdot\,, p, t) : P \to \mathbb{R}^n_+$ *является условно* α*-накрывающим относительно шаров*

$$U(t) = B_P(u_0(t), R_1), \quad V(p, t) = B_{\mathbb{R}^n_+}(S(u_0(t), p, t), \alpha R_2);$$

2) существует число $\beta > 0$ $(\beta < \alpha)$ *такое, что*

$$\max_{i=\overline{1,n}} |D_i(u, p, t) - D_i(\tilde{u}, p, t)| \leqslant \beta \max_{i=\overline{1,n}} |u_i - \tilde{u}_i|$$

для всех $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$, $u, \tilde{u} \in P$ *и для п.в.* $t \in [t_1, t_1 + \delta]$;

3) для п.в. $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ *и всех* $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$ *справедливо условие*

$$0 \in S(U(t), p, t) - D(U(t), p, t);$$

4) существуют числа $0 \leqslant L_S, L_D < \delta\alpha/(q_1 q_0^2)$ *такие, что для всех* $p, \tilde{p} \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$, *для всех* $u \in U(t)$ *и для п.в.* $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ *выполняются неравенства*

$$\max_{i=\overline{1,n}} |S_i(u, p, t) - S_i(u, \tilde{p}, t)| \leqslant L_S \max_{i=\overline{1,n}} |p_i - \tilde{p}_i|,$$

$$\max_{i=\overline{1,n}} |D_i(u, p, t) - D_i(u, \tilde{p}, t)| \leqslant L_D \max_{i=\overline{1,n}} |p_i - \tilde{p}_i|;$$

5) выполняется неравенство $r_0 < R_{\min}$, *где*

$$r_0 := (\alpha - \beta)^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_1, t_1 + \delta]} \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(u_0(t), \bar{p}, t) - D_i(u_0(t), \bar{p}, t)|.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существуют число* $\delta_\varepsilon \in (0, \delta]$ *и вектор-функция равновесных цен*

$$p^{\delta_\varepsilon} \in AC_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], \bar{p}, P)$$

в модели (4) такие, что $\rho_{L_\infty([t_1, t_1+\delta_\varepsilon], P)}\big(\dot{p}^{\delta_\varepsilon}, u_0^{\delta_\varepsilon}\big) < r_0 + \varepsilon$, *где* $u_0^{\delta_\varepsilon}$ *– сужение функции* u_0 *на отрезок* $[t_1, t_1 + \delta_\varepsilon]$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Psi : P \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(\dot{p}(t), p(t), t) = S(\dot{p}(t), p(t), t) - D(\dot{p}(t), p(t), t).$$

Для всех $t \in [t_1, t_1+\delta_\varepsilon] \subseteq [t_1, t_1+\delta]$ задача

$$D(\dot p(t), p(t), t) = S(\dot p(t), p(t), t), \quad p(t_1) = \bar p$$

равносильна уравнению $F(x,x) = y$ относительно x (скорости изменения цен), где

$$F : L_\infty([t_1, t_1+\delta_\varepsilon], P) \times L_\infty([t_1, t_1+\delta_\varepsilon], P) \to L_\infty([t_1, t_1+\delta_\varepsilon], \mathbb{R}^n_+),$$

$$F(z_1, z_2) = N_f(z_1, Cz_2), \quad (Cz_2)(t) = \bar p + \int\limits_{t_0}^{t} z(s)ds,$$

$$N_f : AC_\infty([t_1, t_1+\delta_\varepsilon], \bar p, P) \times L_\infty([t_1, t_1+\delta_\varepsilon], P) \to L_\infty([t_1, t_1+\delta_\varepsilon], \mathbb{R}^n_+),$$
$$(N_f(z,x))(t) = \Psi(\dot p(t), p(t), t).$$

Из условий 1), 2) и теоремы 1 из [7] следует, что существуют положительные числа α, β $(\alpha > \beta)$ такие, что для п.в. $t \in [t_1, t_1+\delta]$ и всех $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar p, \nu)$ отображение Ψ является условно $(\alpha-\beta)$-накрывающим относительно шаров $U(t)$ и $V(p,t)$. Кроме того, из условия 4) следует, что существует такое число $L \geqslant 0$, что справедливо неравенство

$$\max_{i=\overline{1,n}} |\Psi_i(u,p,t) - \Psi_i(u,\tilde p,t)| \leqslant L \max_{i=\overline{1,n}} |p_i - \tilde p_i|$$

для всех $p, \tilde p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar p, \nu)$, для всех функций $u \in U(t)$ и для п.в. $t \in [t_1, t_1+\delta]$.

Из условия 3) следует, что $0 \in \Psi(U(t), p, t)$ для п.в. $t \in [t_1, t_1+\delta]$ и всех $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar p, \nu)$.

Из условия 5) имеем оценку

$$r_0 := (\alpha-\beta)^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[t_1,t_1+\delta]} \max_{i=\overline{1,n}} |\Psi_i(u_0(t), \bar p, t)| < R_{\min}.$$

Наконец, применив теорему 3 из статьи [9] к отображению Ψ, получим утверждение настоящей теоремы. Теорема доказана.

4. Пример, иллюстрирующий основной результат. Рассмотрим модель типа (4), которая обобщает хорошо известную модель Аллена–Эванса:

$$\sigma = (a, b, \gamma, \bar p, c_1, c_2, d_1, d_2, t_1, t_2, q_0, q_1, q_2), \tag{13}$$

в которой спрос и предложение определяются формулами

$$D_i(\dot p, p, t) = a_i + b_i p_j (\dot p_i p_i)^{-1}, \quad S_i(\dot p, p, t) = \gamma_i \dot p_i p_i (\dot p_j p_j)^{-1},$$

где $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $t \in [t_1, t_2]$, а a_i, b_i, γ_i, $i = 1, 2$, – заданные положительные параметры модели.

В рассматриваемой модели приняты следующие естественные ограничения на цены и скорости изменения цен:

$$p_i(t) \in [c_{1i}, c_{2i}], \quad \dot p_i(t) \in [d_{1i}, d_{2i}], \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

где $c_{2i} > c_{1i} > 0$, $d_{2i} > d_{1i}$. В начальный момент времени t_1 цены на товары, присутствующие на рынке, определяются вектором

$$\bar p := (p_1(t_1), p_2(t_1)) = (\bar p_1, \bar p_2), \quad \bar p_i \in [c_{1i}, c_{2i}], \quad i = 1, 2. \tag{15}$$

Предложение. *Предположим, что модель (13) удовлетворяет условиям (15) и (16). Пусть также параметры этой модели удовлетворяют условию*

$$q_1 q_0^2 \max_{\substack{i,j=1,2\\ i\neq j}} b_i c_{2i} c_{1j}^{-1} < |\min_{i=1,2} d_{1i}|^3 \max_{\substack{i,j=1,2\\ i\neq j}} \gamma_i c_{2j} c_{1i}^{-1}.$$

Тогда существует вектор-функция равновесных цен $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ *такая, что*

$$p_i(t) \in [c_{i1}, c_{i2}], \quad \dot{p}_i(t) \in [d_{1i}, d_{2i}], \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Применив теорему Милютина о возмущениях накрывающих отображений из работы [15], получим оценку константы накрывания α отображения $S(\,\cdot\,, p, t) : P \to \mathbb{R}^n_+$, где $P = [d_{11}, d_{21}] \times [d_{12}, d_{22}]$:

$$\alpha \leqslant |\min_{i=1,2} d_{1i}|^3 \max_{\substack{i,j=1,2\\ i\neq j}} \gamma_i c_{j2} c_{i1}^{-1}.$$

Далее, получив для отображения $D(\,\cdot\,, p, t) : P \to \mathbb{R}^n_+$ оценку константы Липшица

$$\beta \geqslant \max_{\substack{i,j=1,2\\ i\neq j}} b_i c_{2i} c_{1j}^{-1}$$

и применив теорему 4, получим утверждение предложения.

С помощью теоремы 4 можно получить достаточные условия (в виде легко проверяемых условий на параметры модели) существования положения равновесия и в других динамических моделях рынка, например, в моделях, где предложение описывается нелинейной динамической моделью "затраты–выпуск" (см. [16, 17]), а спрос описывается динамической моделью, обобщающей модель Стоуна.

Заключение. Результаты теории накрывающих и липшицевых отображений, действующих в квазиметрических пространствах, позволяют исследовать модели рынка на предмет существования в них положения равновесия. Для этого в настоящей статье получены достаточные условия разрешимости уравнения $F(x, x) = y$ относительно x для q_0-симметрических (q_1, q_2)-квазиметрических пространств, а также достаточные условия существования локального решения дифференциального уравнения.

Теоремы 2 и 3 получены Арутюновым А.В. при поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00863). Теорема 4 получена Павловой Н.Г. при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание 075-00337-20-03, проект 0714-2020-0005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Evans G.C.* Mathematical Introduction to Economics. New York, 1930.
2. *Hicks J.* Value and Capital. Oxford, 1939.
3. *Samuelson P.A.* Economics: an Introductory Analysis. New York, 1948.
4. *Allen R.G.D.* Mathematical Economics. London; New York, 1960.
5. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г.* Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2013. Т. 53. № 2. С. 225–237.
6. *Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А.* Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Мат. моделирование. 2016. Т. 28. № 3. С. 3–22.
7. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48. Вып. 1. С. 89–93.
8. *Arutyunov A.V., Avakov E.R., Zhukovskiy S.E.* Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points // SIAM J. Optim. 2015. V. 25. № 2. P. 807–828.
9. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешённым относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
10. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* Точки совпадения многозначных отображений в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. Накрывающие отображения и точки совпадения // Докл. РАН. 2017. Т. 476. № 2. С. 129–132.
11. *Wilson W.A.* On quasi-metric spaces // Amer. J. Math. 1931. V. 53. № 3. P. 675–684.

12. *Бахтин И.А.* Принцип сжатых отображений в почти метрических пространствах // Функц. анализ. 1989. Вып. 30. С. 26–37.
13. *Czerwik S.* Contraction mappings in b-metric spaces // Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis. 1993. V. 1. P. 5–11.
14. *Cvetković M., Karapinar E., Rakocević V.* Some fixed point results on quasi-b-metric-like spaces // J. Inequal. Appl. 2015. V. 374. P. 1–17.
15. *Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33. Вып. 6 (204). С. 85–148.
16. *Павлова Н.Г.* Исследование открытой динамической модели Леонтьева с непрерывным временем как линейной динамической системы с управлением // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 111–116.
17. *Pavlova N.G.* Necessary conditions for closedness of the technology set in dynamical Leontief model // Proc. 11th Int. Conf. Management of Large-Scale System Development (MLSD). Moscow, 2018. P. 510–514.

Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 05.06.2022 г.
После доработки 05.06.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.