

УДК 519.633

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА ТРЁХТОЧЕЧНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2022 г. П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань, Д. Пылак

Для гиперболо-параболического уравнения с постоянными коэффициентами изучены устойчивые компактные разностные схемы с весами $4+2$ и $4+4$ порядков аппроксимации. Полученные результаты обобщены на случай уравнения с переменным коэффициентом, квазилинейного и многомерного уравнений. Получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сильных нормах. Показано, что приведённые в работе тестовые численные расчёты согласуются с теоретическими выводами.

DOI: 10.31857/S0374064122090126, EDN: JTMPGG

Введение. Уравнения гиперболо-параболического типа, например, уравнения электромагнитного поля, зависящие от свойств среды, описывают многие важные физические процессы. Если среда однородна, то в случае её малой проводимости напряжённости электрического и магнитного полей удовлетворяют волновому уравнению, в случае же сравнительно большой проводимости упомянутые величины удовлетворяют уравнению теплопроводности [1, с. 440–444]. При описании некоторых физических процессов термодинамики в кристаллических телах, в пористых средах используется математическая модель Каттанео, включающая уравнения гиперболо-параболического типа (см. [2]). Физический и математический смысл сопряжения уравнения гиперболического и параболического типов описывается, например, в работах [3, с. 256; 4–9].

Для приближённого решения нестационарных задач математической физики такого типа наиболее часто использовались разностные или конечно-элементные аппроксимации [3]. В настоящее время наибольший интерес представляет построение компактных схем [2, 10, 11]. Под *компактными схемами* мы понимаем разностные схемы повышенных порядков аппроксимации, записанные на стандартных для данного уравнения шаблонах.

Основополагающими работами по компактным вычислительным методам порядка аппроксимации $4+2$ (четвёртый порядок по пространственной переменной и второй по временной) для параболических и гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами являются работы 50-летней давности А.А. Самарского [12] и А.Н. Валиуллина и В.И. Паасона [13].

В настоящее время компактные разностные схемы не только построены для новых классов уравнений математической физики типа уравнений Фишера, Клейна–Гордона, но и обобщены на квазилинейные уравнения [14–16].

Данная работа посвящена построению и исследованию компактных разностных схем $4+2$ и $4+4$ порядков точности для гиперболо-параболического уравнения с постоянными коэффициентами. С использованием метода энергетических неравенств получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сеточных нормах $L_2(\omega_h)$, $W_2^1(\omega_h)$, $C(\bar{\omega}_h)$ или $L_\infty(\omega_h)$. Кроме того, полученные результаты обобщаются на случаи уравнения с переменным коэффициентом, квазилинейного и многомерного уравнений, приводятся результаты тестовых расчётов, подтверждающих повышенный порядок точности разностных схем на стандартных шаблонах. В работе используются обозначения из [3, 17].

1. Математическая модель и её свойства. В области

$$\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}, \quad \bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T], \quad \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma, \quad \Omega = \{0 < x < l\},$$

требуется найти непрерывную функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую в \bar{Q}_T следующей начально-краевой задаче:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 u) = Lu + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \in (0, T]. \quad (3)$$

Здесь

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \rho_1 > 0, \quad \rho_2 \geq 0, \quad k > 0.$$

1.1. Закон сохранения энергии для однородной дифференциальной задачи. Закон сохранения энергии является одним из фундаментальных законов природы, установленных эмпирически. Как правило, они присущи гиперболическим уравнениям. Например, известные уравнения газовой динамики выводятся из соответствующих физических законов сохранения массы, импульса и энергии. Для параболических уравнений чаще используется понятие невозрастания энергии, чем закон сохранения. Тем не менее и в этом случае они также существуют, хотя может быть и не являются очевидными (см. статьи [18, 19]). Пусть $H = L_2(0, l)$ – действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярными произведением и нормой

$$(u, v) = \int_0^l u(x)v(x) dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Неограниченный самосопряжённый положительно-определённый линейный оператор с областью определения [20]

$$D(A) = \overset{\circ}{W}_2^1(0, l) \cap W_2^2(0, l),$$

плотной в $L_2(0, l)$, задаётся формулой

$$A(v) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad k(x) \in C^1[0, l], \quad 0 < k_1 \leq k(x) \leq k_2.$$

Оператор A отображает множество $D(A)$ на $L_2(0, l)$. Выражение $(v, u)_A = (Av, u)$, $u, v \in D(A)$ удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Пополняя $D(A)$ по норме $\|u\|_A = (u, u)_A^{1/2}$, получаем так называемое энергетическое пространство $H_A \subset H$.

Введём также пространство Лебега $L_2(0, t; H)$ [21, с. 383]. Функция $u(t)$ отображает интервал $(0, t) \subset \mathbb{R}$ в пространство H со скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_{L_2(0, t; H)} = \int_0^t (u(\xi), v(\xi)) d\xi, \quad \|u\|_{L_2(0, t; H)} = (u, u)_{L_2(0, t; H)}^{1/2}.$$

Пусть функция $E(t)$ задана энергетическим соотношением

$$E(t) = 2\rho_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(0, t; H)}^2 + \rho_2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(0, l)}^2 + \|u\|_A^2.$$

Заметим, что при $t = 0$ значение функции $E(0)$ определяется лишь через заданные начальные условия задачи (1)–(3):

$$E(0) = \rho_2 \|\bar{u}_0\|_{L_2(0, l)}^2 + \|u_0\|_A^2.$$

Теорема 1. Для решения однородной задачи (1)–(3) при

$$f(x, t) = 0 \quad \text{и} \quad \mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$$

имеет место закон сохранения

$$E(t) = E(0). \tag{4}$$

Доказательство данного утверждения является тривиальным. Действительно, умножив уравнение (1) скалярно в $L_2(0, l)$ на $2\partial u/\partial t$ и применив формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$2\rho_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(0,l)}^2 + \frac{d}{dt} \left(\rho_2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(0,l)}^2 + \|u\|_A^2 \right) = 0.$$

Интегрируя последнее соотношение на отрезке $[0, t]$, приходим к соотношению (4). Теорема доказана.

1.2. Устойчивость решения задачи по начальным данным и правой части. Понятие устойчивости является составной частью понятия корректности дифференциальной задачи и в общем случае означает непрерывную зависимость решения от входных данных φ , т.е. существование такой постоянной $\rho > 0$, не зависящей от решения и входных данных, что для всех $\varphi, \tilde{\varphi}$ из некоторого допустимого множества выполняется оценка

$$\|\tilde{u} - u\|_1 \leq \rho \|\tilde{\varphi} - \varphi\|_2,$$

где $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ – некоторые нормы, \tilde{u} – решение той же задачи с возмущёнными входными данными $\tilde{\varphi}$.

Наиболее часто в качестве константы ρ выбирается одна из величин: $\rho = 1$ или $\rho = e^{cT}$, $c = \text{const} > 0$. В первом случае имеет место глобальная устойчивость при любом $t \in [0, \infty)$, во-втором – лишь до конечного момента времени.

Оценки глобальной устойчивости решения задачи вида (1)–(3), по-видимому, впервые получены в работе [22].

В данном пункте исследуется устойчивость решения задачи при неоднородных граничных условиях при условии, что это решение существует, единственно и обладает в области $\overline{Q_T}$ всеми необходимыми непрерывными производными.

Теорема 2. Решение задачи (1)–(3) устойчиво по начальным данным, правой части, и для всех t имеет место априорная оценка

$$\rho_2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{u} - u) \right\|_{L_2(0,l)}^2 + \|\tilde{u}(t) - u(t)\|_A^2 \leq \rho_2 \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{L_2(0,l)}^2 + \int_0^t \|\tilde{f}(t) - f(0)\|^2 dt. \tag{5}$$

Оценка (5) получается с помощью применения стандартной техники метода энергетических неравенств.

2. Гиперболо-параболическое уравнение с постоянными коэффициентами.

2.1. Постановка задачи и разностная схема. В области $\overline{Q_T}$ рассмотрим начально-краевую задачу (1)–(3) с постоянными коэффициентами ρ_1, ρ_2, k .

На равномерной сетке узлов $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in \overline{Q_T}\}$, где $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, h = l/N\} = \omega_h \cup \{0, l\}$ и $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N_0, \tau = T/N_0\} = \omega_\tau \cup \{0\}$, заменим дифференциальную задачу разностной схемой с весами

$$\rho_1 y_{\bar{t}t} + \rho_1 \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}\bar{x}} + \rho_2 y_{\bar{t}} + \rho_2 \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}\bar{x}\bar{x}} = k y_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma,\sigma)} + \varphi, \quad (x, t) \in \omega, \tag{6}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_i(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{7}$$

$$y(0, t + \tau) = \mu_1(t + \tau), \quad y(l, t + \tau) = \mu_2(t + \tau), \quad t \in \omega_\tau, \tag{8}$$

где

$$v = v(x_i, t_n) = v_i^n, \quad \hat{v} = v_i^{n+1}, \quad \check{v} = v_i^{n-1}, \quad v_{i\pm 1} = v_{i\pm 1}^n,$$

$$v_{\bar{t}t} = \frac{\hat{v} - 2v + \check{v}}{\tau^2}, \quad v_{\bar{t}} = \frac{\hat{v} - \check{v}}{2\tau}, \quad v_{\bar{x}x} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2},$$

$$v^{(\sigma, \sigma)} = \sigma \hat{v} + (1 - 2\sigma)v + \sigma \check{v} = v + \sigma \tau^2 v_{\bar{t}t}, \quad \sigma \geq 0, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x},$$

$$u_1(x) = \bar{u}_0 + \frac{\tau}{2\rho_1} [ku_0'' - \rho_2 \bar{u}_0 + f(x, 0)].$$

Пользуясь разложениями (см. [17, гл. II; 23, гл. VII])

$$v_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + O(h^4), \quad v_{\bar{t}t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + O(\tau^4), \quad v_{\bar{t}} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + O(\tau^4),$$

невязку

$$\Psi = -\rho_1 u_{\bar{t}t} - \frac{h^2}{12} \rho_1 u_{\bar{t}\bar{x}x} - \rho_2 u_{\bar{t}} - \frac{h^2}{12} \rho_2 u_{\bar{t}\bar{x}x} + k u_{\bar{x}x}^{(\sigma, \sigma)} + \varphi$$

разностного уравнения (6) можно записать в виде

$$\Psi = \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \right) + O(h^4 + \tau^2),$$

откуда следует

$$\|\Psi\| \leq M(h^4 + \tau^2), \quad M = \text{const} > 0. \tag{9}$$

Аналогично для погрешности аппроксимации второго начального условия в (7) имеет место оценка

$$\|\dot{\Psi}\| = \|u_1 - u_1^0\| \leq M_1 \tau^2, \quad M_1 = \text{const} > 0. \tag{10}$$

2.2. Устойчивость по начальным данным и правой части. Для исследования этих вопросов нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма [17, гл. II]. *Для всякой функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке*

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad x_0 = 0, \quad x_N = l\}$$

и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, справедливы оценки

$$\lambda_1 \|y\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \lambda_{N-1} \|y\|^2,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \geq \frac{8}{l^2} \quad \text{и} \quad \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l} < \frac{4}{h^2}.$$

Заметим, что выражение

$$Q^n = \rho_1 \|y_{\bar{t}}\|^2 + c_1 \tau^2 \|y_{\bar{t}\bar{x}}\|^2 + \frac{k}{2} (\|y_{\bar{x}}\|^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}\|^2),$$

где $c_1 = \sigma - 1/2 - \rho_1 h^2 / (12\tau^2)$, при выполнении условия

$$\sigma \geq \frac{1}{2} + \rho_1 \frac{h^2}{12\tau^2} \tag{11}$$

неотрицательно.

С учётом выражения

$$y^{(\sigma, \sigma)} = \frac{\hat{y} + \check{y}}{2} + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 y_{\bar{t}t}$$

разностную схему (6) можно представить в виде

$$\rho_1 y_{\bar{t}t} - \left(\sigma - \frac{1}{2} - \rho_1 \frac{h^2}{12\tau^2} \right) \tau^2 y_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}x} + \rho_2 y_{\bar{t}} + \rho_2 \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}\bar{x}x} = k \frac{\hat{y}_{\bar{x}x} + \check{y}_{\bar{x}x}}{2} + \varphi. \tag{12}$$

Умножая (12) скалярно на $2\tau y_{\bar{t}}$ и применяя первую разностную формулу Грина и лемму, получаем следующие оценки:

$$2\tau(y_{\bar{t}}, \rho_1 y_{\bar{t}t}) = \rho_1 \tau \left(y_t + y_{\bar{t}}, \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau} \right) = \rho_1 \|y_t\|^2 - \rho_1 \|y_{\bar{t}}\|^2, \tag{13}$$

$$-2\tau \left(y_{\bar{t}}, \left(\sigma - \frac{1}{2} - \rho_1 \frac{h^2}{12\tau^2} \right) \tau^2 y_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}x} \right) = \left(\sigma - \frac{1}{2} - \rho_1 \frac{h^2}{12\tau^2} \right) \tau^2 (\|y_{\bar{t}\bar{x}}\|^2 - \|y_{\bar{t}\bar{x}}\|^2), \tag{14}$$

$$2\tau(y_{\bar{t}}, \rho_2 y_{\bar{t}}) = 2\rho_2 \tau \|y_{\bar{t}}\|^2, \tag{15}$$

$$2\tau \left(y_{\bar{t}}, \rho_2 \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}\bar{x}x} \right) = -\rho_2 \frac{\tau h^2}{6} \|y_{\bar{t}\bar{x}}\|^2 \geq -\rho_2 \frac{2\tau}{3} \|y_{\bar{t}}\|^2, \tag{16}$$

$$2\tau \left(y_{\bar{t}}, k \frac{\hat{y}_{\bar{x}x} + \check{y}_{\bar{x}x}}{2} \right) = \frac{k}{2} (\hat{y} - \check{y}, \hat{y}_{\bar{x}x} + \check{y}_{\bar{x}x}) = -\frac{k}{2} (\|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 + \|y_{\bar{x}}\|^2) + \frac{k}{2} (\|y_{\bar{x}}\|^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}\|^2), \tag{17}$$

$$2\tau(y_{\bar{t}}, \varphi) \leq \tau \rho_2 \|y_{\bar{t}}\|^2 + \frac{\tau}{\rho_2} \|\varphi\|^2. \tag{18}$$

Из (12)–(18) приходим к соотношению

$$\frac{\rho_2}{3} \tau \|y_{\bar{t}}\|^2 + Q^{n+1} \leq Q^n + \frac{\tau}{\rho_2} \|\varphi^n\|^2,$$

или

$$Q^{n+1} \leq Q^n + \frac{\tau}{\rho_2} \|\varphi^n\|^2.$$

Тем самым доказана

Теорема 3. Пусть выполнено условие (11). Тогда разностная схема (6)–(8) абсолютно устойчива по начальным данным, правой части, и для её решения имеет место априорная оценка

$$Q^{n+1} \leq Q^1 + \frac{\tau}{\rho_2} \sum_{k=1}^n \|\varphi^k\|^2. \tag{19}$$

2.3. Сходимость разностной схемы. Подставив $z + u$ в (6)–(8) вместо y , где u – решение задачи (1)–(3), получаем для погрешности z задачу

$$\rho_1 z_{\bar{t}t} + \rho_1 \frac{h^2}{12} z_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}x} + \rho_2 z_{\bar{t}} + \rho_2 \frac{h^2}{12} z_{\bar{t}\bar{x}x} = k z_{\bar{x}x}^{(\sigma, \sigma)} + \Psi, \quad (x, t) \in \omega,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad z_t(x, 0) = \dot{\Psi}, \quad x \in \omega_h,$$

$$z(0, t + \tau) = 0, \quad z(l, t + \tau) = 0, \quad t \in \omega_\tau.$$

Имеет место следующая

Теорема 4. Пусть выполнено условие (11). Тогда решение разностной схемы (6)–(8) сходится к точному решению дифференциальной задачи (1)–(3) и имеет место оценка

$$\max_{t_n \in \bar{\omega}_\tau} \|y^n - u^n\|_C \leq M_2 (h^4 + \tau^2), \quad M_2 = \text{const} > 0.$$

Доказательство. Применим теорему 3 для оценки погрешности метода. Тогда из оценок (9), (10), неравенства (19) и из неравенства теоремы вложения [17, гл. II]

$$\|y\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|y_{\bar{x}}\|$$

получим следующую оценку:

$$\|y^n - u^n\|_C \leq \sqrt{\frac{l}{2k}} \left\{ \sqrt{\rho_1} \|\dot{\Psi}\| + \tau \sqrt{c_1 + \frac{k}{2}} \|\dot{\Psi}_{\bar{x}}\| + \sqrt{\frac{T}{\rho_2}} \max_{t \in \omega_\tau} \|\Psi(t)\| \right\} \leq M_2(h^4 + \tau^2).$$

Следовательно, разностное решение сходится к точному решению с четвёртым порядком по пространству и вторым по времени. Теорема доказана.

Замечание 1. Заменяя разностное уравнение (6) уравнением

$$\left(\rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} \right) y_{\bar{t}t} + \rho_2 y_i + \rho_2 \left(\frac{h^2}{12} - \frac{k \tau^2}{\rho_1 12} \right) y_{i\bar{x}x} = k y_{\bar{x}x}^{(\bar{\sigma}, \bar{\sigma})} + \varphi \tag{20}$$

и аппроксимацию второго начального условия в (7) разностным уравнением

$$y_t(x, 0) = u_1(x) = \left(1 - \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{6} - \frac{\tau^3}{24} \right) \bar{u}_0(x) + \left(\frac{\tau}{2} - \frac{\tau^2}{6} + \frac{\tau^3}{24} \right) u_0'' + \left(\frac{\tau^2}{6} - \frac{\tau^3}{12} \right) \bar{u}_0'' + \frac{\tau^3}{24} u_0^{(4)} + \left(\frac{\tau}{2} - \frac{\tau^2}{6} + \frac{\tau^3}{24} \right) f(x, 0) + \left(\frac{\tau^2}{6} - \frac{\tau^3}{24} \right) \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) + \frac{\tau^3}{24} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)(x, 0), \quad x \in \omega_h, \tag{21}$$

где

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{\rho_1 h^2}{k \tau^2} \right), \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x} + \frac{\tau^2}{12} f_{\bar{t}t} + \frac{\rho_2 \tau^2}{\rho_1 12} f_t,$$

получаем схему с четвёртым порядком аппроксимации $\Psi = O(h^4 + \tau^4)$. Легко доказать, что разностная схема (20) с разностными условиями (7), (8), (21) устойчива при $\gamma = a\tau/h = 1$, $a = \sqrt{k}/\sqrt{\rho_1}$, т.е. при $\tau = (\sqrt{\rho_1}/\sqrt{k})h$. Отсюда следует, что если число $\rho_1 = 0$ (остаётся только параболическое уравнение), то устойчивость есть только при $\tau = 0$. Таким образом, схема четвёртого порядка аппроксимации для параболического уравнения всегда неустойчива.

Замечание 2. Далее обобщаем компактные разностные схемы 4+2 порядка аппроксимации на другие случаи гипербола-параболического уравнения, такие как уравнение с переменным коэффициентом, квазилинейные и многомерные уравнения.

а. Уравнение с переменным коэффициентом. Рассмотрим дифференциальную задачу (1)–(3) с переменным коэффициентом $k(x, t) \geq k_1 > 0$. На равномерной сетке $\bar{\omega}$ следующая разностная схема аппроксимирует исходную задачу с порядком погрешности $O(h^4 + \tau^2)$:

$$\rho_1 y_{\bar{t}t} + \rho_1 \frac{h^2}{12} \Lambda(qy_{\bar{t}t}) + \rho_2 y_i + \rho_2 \frac{h^2}{12} \Lambda(qy_i) = \Lambda y^{(\sigma, \sigma)} + \varphi, \quad (x, t) \in \omega,$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h,$$

$$y(0, t + \tau) = \mu_1(t + \tau), \quad y(l, t + \tau) = \mu_2(t + \tau), \quad t \in \omega_\tau,$$

где

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x, \quad a = a(x, t) = 6[q(x - h, t) + 4q(x - h/2, t) + q(x, t)]^{-1}, \quad q = \frac{1}{k},$$

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12} \Lambda(qf), \quad u_1(x) = \bar{u}_0(x) + \frac{\tau}{2\rho_1} ([k(x, 0)u_0'(x)]' - \rho_2 \bar{u}_0(x) + f(x, 0)).$$

б. *Квазилинейное уравнение.* В области \overline{Q}_T для квазилинейного гиперβολо-параболического уравнения

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = L\phi(u) + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \tag{22}$$

рассмотрим начально-краевую задачу (2), (3) с условием $\phi'_u = k(u) \geq k_1 > 0$. Здесь $Lv = \partial^2 v / \partial x^2$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 \geq 0$.

На сетке узлов $\overline{\omega}$ напишем для дифференциальной задачи (22), (2), (3) следующую компактную разностную схему с весами:

$$\rho_1 y_{\bar{t}t} + \rho_1 \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}\bar{x}x} + \rho_2 y_{\bar{t}} + \rho_2 \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}\bar{x}x} = (\phi(y))_{\bar{x}x}^{(\sigma, \sigma)} + \varphi, \quad (x, t) \in \omega, \tag{23}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{24}$$

$$y(0, t + \tau) = \mu_1(t + \tau), \quad y(l, t + \tau) = \mu_2(t + \tau), \quad t \in \omega_\tau, \tag{25}$$

где

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x},$$

$$u_1(x) = \overline{u}_0(x) + \frac{\tau}{2\rho_1} [L\phi(u_0(x)) - \rho_2 \overline{u}_0(x) + f(x, 0)].$$

Аналогично случаю с постоянными коэффициентами нетрудно показать, что для погрешности аппроксимации разностной схемы (23)–(25) имеют место оценки

$$\|\Psi\| \leq M_1(h^4 + \tau^2), \quad \|\dot{\Psi}\| \leq M_2\tau^2, \quad M_1, M_2 - \text{положительные константы.}$$

Для реализации этой схемы необходимо использовать итерационный метод Ньютона.

в. *Многомерные уравнения.* Пусть $\overline{G} = \{x = (x_1, \dots, x_p), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\}$ является p -мерным прямоугольным параллелепипедом с границей Γ , т.е. $\overline{G} = G \cup \Gamma$. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leq t \leq T]$ для многомерного гиперβολо-параболического уравнения

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u + f(x, t), \quad x \in G, \quad t \in (0, T], \tag{26}$$

рассмотрим смешанную задачу

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \overline{u}_0(x), \quad x \in G, \tag{27}$$

$$u(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T], \tag{28}$$

где

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right),$$

k_α – положительные постоянные, $\alpha = \overline{1, p}$.

В параллелепипеде \overline{G} построим разностную сетку $\overline{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p), i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\} = \omega_h \cup \gamma_h$ и равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, N_0}, \tau N_0 = T\}$. Сетка $\overline{\omega}_h$ равномерна по каждой из пространственных переменных. Здесь $\gamma_h = \{x_i \in \Gamma\}$ – множество узлов сетки $\overline{\omega}_h$, которые принадлежат границе Γ . На построенной сетке $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ исходную задачу (26)–(28) аппроксимируем компактной разностной схемой

$$\begin{aligned} & \rho_1 y_{\bar{t}t} + \rho_1 \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha y_{\bar{t}t} + \rho_2 y_{\bar{t}} + \rho_2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha y_{\bar{t}} = \\ & = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y^{(\sigma, \sigma)} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y^{(\sigma, \sigma)} + \varphi, \quad (x, t) \in \omega, \end{aligned} \tag{29}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{30}$$

$$y(x, t + \tau) = \mu(x, t + \tau), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \tag{31}$$

где

$$\Lambda_\alpha y = k_\alpha y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \varphi = f + \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha f, \quad u_1(x) = \bar{u}_0(x) + \frac{\tau}{2\rho_1} \left[\sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u_0(x) - \rho_2 \bar{u}_0(x) + f(x, 0) \right].$$

Легко показать, также как и в рассмотренных выше случаях, что разностная схема (29)–(31) аппроксимирует исходную задачу (26)–(28) с четвёртым порядком относительно пространственных переменных и со вторым относительно временной, т.е.

$$\|\Psi\| \leq M_1(|h|^4 + \tau^2), \quad \|\dot{\Psi}\| \leq M_2\tau^2, \quad |h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2},$$

M_1, M_2 – положительные константы.

Компактные разностные схемы 4+2 порядка аппроксимации для уравнения с переменным коэффициентом и квазилинейного уравнения в многомерном случае строятся так же, как и в работах [15, 16].

3. Тестовые расчёты. В этом пункте приводятся результаты численных расчётов при решении начально-краевой задачи (1)–(3) для гиперболо-параболического уравнения с постоянными коэффициентами. Начальные и краевые условия, правая часть уравнения определяются из точного решения

$$u(x, t) = e^{t+x} + e^{t-x}.$$

Здесь параметры задачи выбираются следующими: $\rho_1 = \rho_2 = 1/2, k = 1, l = T = 1$.

Через $\|z\|_{L_\infty}$ и $\|z\|_{L_2}$ обозначим в нормах $L_\infty = C$ и L_2 погрешность метода, полученную на последнем временном слое $t_n = T$:

$$\|z\|_{L_\infty} = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i - u_i|, \quad \|z\|_{L_2} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h |y_i - u_i|^2 \right)^{1/2}.$$

На рисунке численное решение и погрешность получены при $\sigma = 1, h = 0.025$ и $\tau = 0.03125$.

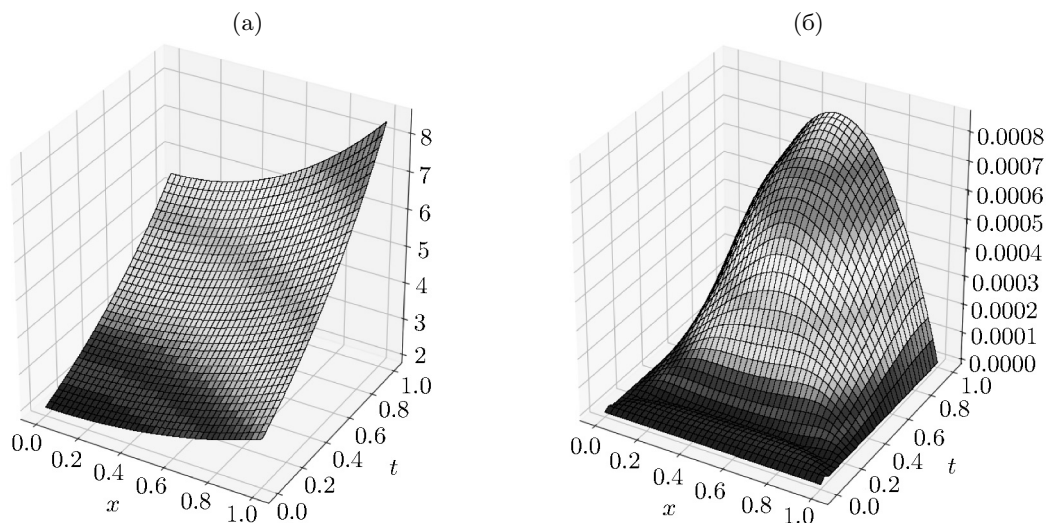


Рисунок. Численное решение (а) и погрешность (б) метода.

Порядок скорости сходимости по пространственной (p^h) и временной (p^τ) переменным определяется по следующим формулам:

$$p^h = \log_2 \frac{\|z(2h, \tau)\|}{\|z(h, \tau)\|}, \quad p^\tau = \log_2 \frac{\|z(h, 2\tau)\|}{\|z(h, \tau)\|}. \quad (32)$$

Полученные результаты расчётов представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Скорость сходимости по временному направлению ($h = 0.0005$)

$\tau = 0.125$	$\ z\ _{L_\infty}$	$p_{L_\infty}^\tau$	$\ z\ _{L_2}$	$p_{L_2}^\tau$
τ	1.35E-02	–	9.69E-03	–
$\tau/2^1$	3.12E-03	2.11653	2.32E-03	2.06053
$\tau/2^2$	7.75E-04	2.00861	5.63E-04	2.04528
$\tau/2^3$	1.93E-04	2.00648	1.39E-04	2.01826
$\tau/2^4$	4.81E-05	2.00472	3.45E-05	2.00731
$\tau/2^5$	1.20E-05	2.00222	8.62E-06	2.00325

Таблица 2. Скорость сходимости по пространственному направлению

$h = 0.01$	$\tau = 0.1$	$\ z\ _{L_\infty}$	$p_{L_\infty}^h$	$\ z\ _{L_2}$	$p_{L_2}^h$
h	τ	8.58E-03	–	6.14E-03	–
$h/2^1$	$\tau/4^1$	4.95E-04	4.1163	3.58E-04	4.0992
$h/2^2$	$\tau/4^2$	3.07E-05	4.00832	2.21E-05	4.019
$h/2^3$	$\tau/4^3$	1.92E-06	4.00279	1.38E-06	4.00361
$h/2^4$	$\tau/4^4$	1.20E-07	3.99829	8.62E-08	3.99816
$h/2^5$	$\tau/4^5$	8.07E-09	3.89302	5.80E-09	3.89234

При рассмотрении порядка скорости сходимости по τ (табл. 1) в расчётах учитывалось выполнение неравенства $h^4 \leq \tau^2$, в результате чего можно было применять второе правило Рунге (32).

Так как разностное решение сходится к точному решению с четвёртым порядком по h и вторым по τ , то при рассмотрении порядка скорости сходимости по пространственному значению (табл. 2) шаги h и τ либо уменьшаются в два и четыре раза соответственно, либо выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $h^4 \geq \tau^2$. Тогда можно применить первое правило Рунге (32).

Значения порядка p , представленные в табл. 2, близки к четвёртому. Это означает, что построенная схема имеет четвёртый порядок точности по пространственной переменной.

Таким образом, проведённые тестовые расчёты согласуются с теоретическими выводами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Equations of Mathematical Physics. Dover; New York, 1990.
2. *Huang Ya., Yin Zh.* The compact finite difference method of two-dimensional Cattaneo model // J. Funct. Spaces. 2020. V. 1. P. 1–12.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998.
4. *Золнина Л.А.* О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 991–1001.
5. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Лемешевский С.В., Матус П.П.* Разностные схемы для задачи о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39. № 4. С. 954–962.
6. *Korzyuk V.I., Lemeshvskii S.V., Matus P.P.* Conjugation problem about jointly separate flow of viscoelastic and viscous fluids in the plane duct // Math. Model. Anal. 1999. V. 4. № 1. P. 114–123.
7. *Корзюк В.И., Лемешевский С.В., Матус П.П.* Задача сопряжения о совместно-раздельном течении вязкоупругой и вязкой жидкостей в плоской трубе // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 2. С. 5–8.

8. Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Об одной явной схеме для решения задач фильтрации // Мат. моделирование. 2010. Т. 22. № 4. Р. 99–109.
9. Брагов В.Н. О смешанной задаче для одного класса гипербола-параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 2. С. 273–276.
10. *Vong S.W., Pang H.K., Jin X.Q.* A high-order difference scheme for the generalized Cattaneo equation // East Asian J. Appl. Math. 2012. V. 2. № 2. P. 170–184.
11. *Zhao X., Sun Z.Z.* Compact Crank–Nicolson schemes for a class of fractional Cattaneo equation in inhomogeneous medium // J. Sci. Comput. 2015. V. 62. № 3. P. 747–771.
12. Самарский А.А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 5. С. 812–840.
13. Валиуллин А.Н., Паасонен В.И. Экономичные разностные схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения колебаний // Численные методы механики сплошной среды. 1970. Т. 1. № 1. С. 17–30.
14. Матус П.П., Утебаев Б.Д. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений // Мат. моделирование. 2021. Т. 33. № 4. С. 60–78.
15. Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань. Компактные разностные схемы на трёхточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 963–975.
16. Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань. Компактные разностные схемы для многомерного уравнения Клейна–Гордона // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 120–138.
17. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1989.
18. *Lapinska-Chrzczonowicz M., Matus P.* Exact difference scheme and difference scheme of higher order of approximation for a convection–diffusion equation. I // Ann. UMCS. Informatica AI. 2013. V. 13. № 1. P. 37–51.
19. Матус П.П., Чурбанова Н.Г., Щадинский Д.А. О роли законов сохранения и входных данных при возникновении режимов с обострением в квазилинейных многомерных параболических уравнениях с нелинейным источником и их аппроксимациях // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 981–989.
20. Иванович Б.С., Матус П.П. Коэффициентная устойчивость дифференциально-операторных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 10. С. 1371–1377.
21. *Wloka J.* Partial Differential Equations. Cambridge, 1987.
22. *Jovanovic B., Lemeshevsky S., Matus P.* On the stability of differential-operator equations and operator-difference schemes as $t \rightarrow \infty$ // Comput. Meth. Appl. Math. 2002. V. 2. № 2. P. 153–170.
23. Валиуллин А.Н. Схемы повышенной точности для задач математической физики. Новосибирск, 1973.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Католический университет имени Иоанна-Павла II,
г. Люблин, Польша,
Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.
После доработки 22.05.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.