ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1294–1296

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.5

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ

© 2022 г. В. В. Крахотко, Г. П. Размыслович

Предложен метод решения задачи апостериорного оценивания начального состояния линейной сингулярно возмущённой динамической системы.

DOI: 10.31857/S0374064122090138, EDN: JTNAYU

Пусть поведение динамической системы на конечном промежутке времени $T=[0,t_1]$ описывается уравнениями

$$\dot{y}=A_1y+A_2z,\quad \mu_0\dot{z}=A_3y+A_4z, \tag{1}$$

где $y\in\mathbb{R}^n$, $z\in\mathbb{R}^m$, A_1, A_2, A_3, A_4 – постоянные матрицы соответствующих размеров, μ_0 – некоторый малый положительный параметр. Будем считать, что матрица A_4 является устойчивой (действительные части всех её собственных значений отрицательны).

Предположим, что начальное состояние $y(0)=y_0$, $z(0)=z_0$ системы (1) неизвестно и принадлежит множеству X_0, которое имеет вид

$$X_0=\{(y_0,z_0):\ y_0\in\mathbb{R}^n,\ \ z_0\in\mathbb{R}^m,\ c_*\leqslant y_0\leqslant c^*,\ \ d_*\leqslant z_0\leqslant d^*\},$$

где c_*, c^* и d_*, d^* – заданные векторы из пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.

Множество X_0 назовём *априорным распределением* начального состояния системы (1).

Далее за поведением системы будем следить с помощью выходных сигналов измерительного устройства

$$w(t)=l_1'y(t)+l_2'z(t)+\chi(t), \tag{2}$$

которое в каждый момент времени $t\in T$ с ошибкой $\chi(t)$ измеряет проекцию состояния $(y(t),z(t))$ системы (1) на направление (l_1,l_2), $l_1\in\mathbb{R}^n$, $l_2\in\mathbb{R}^m$ (символ "штрих"в формуле (2) означает операцию транспонирования). Отметим, что ошибками измерения $\chi(t)$, $t\in T$, могут быть любые кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\chi_*\leqslant\chi(t)\leqslant\chi*,\quad t\in T.$$

Пусть из устройства (2) принят сигнал $w(t)$, $t\in T$, в котором содержится информация о начальном состоянии (y_0,z_0), позволяющая уменьшить исходную неопределённость, т.е. вместо априорного распределения начального состояния, принадлежащего множеству X_0, рассматриваем апостериорное распределение, принадлежащее множеству $X(t_1)$. Оно включает те и только те элементы $(y_0,z_0)\in X_0$, которые способны вместе с некоторыми допустимыми ошибками измерения породить наблюдаемый сигнал $w(t)$, $t\in T$.

Множество $X(t_1)$ в общем случае имеет сложную структуру. Однако в конкретных задачах оптимизации системы (1) достаточно знать лишь определённые числовые характеристики этого множества. Одной из таких важнейших характеристик является его протяжённость в направлении заданного вектора (h_1,h_2), $h_1\in\mathbb{R}^n$, $h_2\in\mathbb{R}^m$, т.е.

$$\max\{h_1'y_0+h_2'z_0\},\quad (y_0,z_0)\in X(t_1). \tag{3}$$

Опишем метод решения задачи (3).

Пусть решение $(y(t), z(t))$, $t \in T$, системы (1) с начальным состоянием $y(0) = y_0$, $x(0) = z_0$ имеет вид

$$y(t) = F_1(t)y_0 + F_2(t)z_0, \quad z(t) = F_3(t)y_0 + F_4(t)z_0,$$

где $F_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, $t \in T$, – матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$\begin{pmatrix} \dot{F}_1 & \dot{F}_2 \\ \dot{F}_3 & \dot{F}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \dfrac{1}{\mu_0}A_3 & \dfrac{1}{\mu_0}A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

причём $\begin{pmatrix} F_1(0) & F_2(0) \\ F_3(0) & F_4(0) \end{pmatrix} = E_{n+m}$.

Тогда задачу (3) можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered} \varphi_0(y_0, z_0) = h_1'y_0 + h_2'z_0 \to \max, \\ b_*(t) \leqslant a_1'(t)y_0 + a_2'(t)z_0 \leqslant b^*(t), \quad t \in T, \\ c_* \leqslant y_0 \leqslant c^*, \quad d_* \leqslant z_0 \leqslant d^*, \end{gathered} \tag{5}$$

где $b_*(t) = w(t) - \chi^*$, $b^*(t) = w(t) - \chi_*$, $a_1'(t) = l_1'F_1(t) + l_2'F_3(t)$, $a_2'(t) = l_1'F_2(t) + l_2'F_4(t)$, $t \in T$.

Задача (5) является линейной полубесконечной экстремальной задачей с конечным числом переменных и континуумом ограничений. Метод решения подобных задач описан в работе [1].

Начальное состояние $(\tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ назовём *решением задачи* (5), если на нём выполняются ограничения и целевая функция достигает максимума. Построение этого состояния $(\tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ является сложной экстремальной задачей.

Отметим, что в общем случае начальное состояние $(\tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ зависит от параметра μ_0 $(\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0(\mu_0),\ \tilde{z}_0 = \tilde{z}_0(\mu_0))$.

Исходя из поставленной задачи и следуя основному принципу асимптотических методов решения таких задач, вместо одной системы (1) с фиксированным значением параметра μ_0 рассматривается семейство систем

$$\dot{y} = A_1y + A_2z, \quad \mu\dot{z} = A_3y + A_4z \tag{6}$$

при $\mu \to 0$.

Тогда задача (5) примет следующий вид:

$$\begin{gathered} \varphi(y_0, z_0) = h_1'y_0 + h_2'z_0 \to \max, \\ b_*(t) \leqslant a_1'(t,\mu)y_0 + a_2'(t,\mu)z_0 \leqslant b^*(t), \quad t \in T, \\ c_* \leqslant y_0 \leqslant c^*, \quad d_* \leqslant z_0 \leqslant d^*, \end{gathered} \tag{7}$$

где $b_*(t) = w(t) - \chi^*$, $b^*(t) = w(t) - \chi_*$, $a_1'(t,\mu) = l_1'F_1(t,\mu) + l_2'F_3(t,\mu)$, $a_2'(t,\mu) = l_1'F_2(t,\mu) + l_2'F_4(t,\mu)$, $t \in T$; $F_i(t,\mu)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, – матрицы соответствующих размерностей, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (4) с заменой в нём параметра μ_0 на μ $(\mu > 0)$.

В данном случае применение метода, описанного в работе [1], вызывает серьёзные трудности, поскольку система дифференциальных уравнений (6) при малом μ является жёсткой (см. [2, с. 11–19]). В связи с этим предлагается использовать метод декомпозиции задачи (7) на две задачи меньшей размерности [3, с. 39–53].

Определение. Вектор $(\bar{y}_0, \bar{z}_0)$, $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\bar{z}_0 \in \mathbb{R}^m$, назовём *решением задачи* (7), если:

1) найдётся число $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \to 0)$ такое, что $|\varphi(\bar{y}_0, \bar{z}_0) - \varphi_0(\tilde{y}_0, \tilde{z}_0)| \leqslant \varepsilon$;

2) $\max\limits_{t \in T}\{a_1'(t,\mu)\bar{y}_0 + a_2'(t,\mu)\vec{z}_0 - b^*(t),\ b_*(t) - a_1'(t,\mu)\bar{y}_0 - a_1'(t,\mu)\bar{z}_0, 0\} = O(\mu)$;

3) $c_* \leqslant \bar{y}_0 \leqslant c^*$, $d_* \leqslant \bar{z}_0 \leqslant d^*$.

Применив метод пограничных функций [3, с. 11–16], получим

$$a_1'(t,\mu)y_0 + a_1'(t,\mu)z_0 = (l_1' - l_2'A_4^{-1}A_3)F_0(t)y_0 + l_2'G(s)A_4^{-1}A_3y_0 + l_2'G(s)z_0 + \eta(t,\mu),$$

где $\max\limits_{t\in T}|\eta(t,\mu)| = O(\mu)$; $F_0(t)$, $t \in T$, $G(s)$, $s = t/\mu$, $s \geqslant 0$, – матричные функции размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, являющиеся решением начальных задач

$$\dot F_0 = (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)F_0, \quad F_0(0) = E_n;$$

$$\frac{dG}{ds} = A_4G, \quad G(0) = E_m. \tag{8}$$

Заметим, что в силу уравнения (8) и того, что матрица A_4 является устойчивой, имеет место оценка $||G(s)|| \leqslant \alpha\exp(-\beta s)$, $s \geqslant 0$, где α, β – некоторые положительные числа. Тогда найдётся число $s^* > 0$ такое, что $||l_2'G(s)|| \leqslant \mu$ при $s \geqslant s^*$.

На первом этапе алгоритма с помощью метода, описанного в статье [1], решается следующая задача:

$$\begin{gathered} h_1'y_0 \to \max, \\ b_*(t) \leqslant (l_1' - l_2'A_4^{-1}A_3)F_0(t)y_0 \leqslant b^*(t), \quad t \in [\mu s^*, t_1], \\ c_* \leqslant y_0 \leqslant c^*. \end{gathered} \tag{9}$$

Отметим, что подобная задача была решена в работе [4].

Второй этап алгоритма состоит в решении задачи

$$\begin{gathered} h_2'z_0 \to \max, \\ b_*(\mu,s) - g(s) \leqslant l_2'G(s)z_0 \leqslant b^*(\mu,s) - g(s), \quad s \in [0, s^*], \\ d_* \leqslant z_0 \leqslant d^*, \end{gathered} \tag{10}$$

где $g(s) = l_2'G(s) = A_4^{-1}\bar y_0 + (l_1' - l_2'A_4^{-1}A_3)\bar y_0$.

Считаем, что решения $\bar y_0$ и $\bar z_0$ задач (9) и (10) соответственно являются невырожденными (см. [1]).

Нетрудно убедиться в том, что вектор $(\bar y_0, \bar z_0)$ есть решение задачи (7).

Пусть τ – текущий момент времени из промежутка T. Предположим, что к этому моменту записан сигнал измерительного устройства $w(t)$, $t \in [0,\tau]$. Устройство, решающее задачу в режиме реального времени, где вместо T берётся $T(\tau) = [0,\tau]$, назовём *оптимальным эстиматором* для системы (1). Алгоритм работы оптимального эстиматора описан в [1], однако в данном случае реализация этого алгоритма затруднена из-за жёсткости интегрирования систем, поэтому имеет смысл ограничиться построением оптимального эстиматора по предложенной выше схеме. Для решения задач вида (9), (10) в режиме реального времени, где вместо значения t_1 берётся $\tau \in [\mu s^*, t_1]$, можно использовать алгоритм, описанный в книге [2, с. 142–200].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габасов Р., Кирилова Ф.М., Костюкова О.И.* Построение оптимальных эстиматоров для линейных динамических систем // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1. 1992. № 2. С. 45–49.
2. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жёстких систем. М., 1979.
3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений. М., 1973.
4. *Крахотко В.В., Размыслович Г.П.* Построение асимптотического решения задачи оптимального наблюдения квазилинейной дифференциально-алгебраической системы // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 264–269.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 26.05.2022 г.
После доработки 05.08.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.