ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 4–14

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.95+517.984

КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ $l(\cdot) - A$ С ОПЕРАТОРОМ ТРИКОМИ A

© 2023 г. Б. Е. Кангужин, Б. Д. Кошанов

Исследуется вопрос единственности решения регулярной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения $l(\cdot) - A$ с оператором Трикоми A. Порядок дифференциального выражения $l(\cdot)$ считается произвольным натуральным числом n, а регулярные краевые условия задаются по временно́й переменной t. Оператор A является порождённым уравнением Трикоми $Av(\cdot) = yv_{xx}(\cdot) + v_{yy}(\cdot)$. Граничные условия для оператора Трикоми задаются условием Дирихле на эллиптической части и дробными производными следами решения вдоль характеристик. Указывается, что данный оператор является самосопряжённым оператором в пространстве $L_2(\Omega)$. Самосопряжённость оператора A гарантирует существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций, если Ω – область, ограниченной кривой Ляпунова и характеристиками волнового уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064123010028, EDN: OBOZON

Введение. Основным вопросом, изучаемым в настоящей статье, является вопрос единственности решения уравнения вида

$$\frac{\partial^n u(x,y;t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\frac{\partial^{n-j} u(x,y;t)}{\partial t^{n-j}} =$$

$$= y\frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial y^2} + f(x,y;t), \quad (x,y)\in\Omega, \quad 0<t<T, \tag{1}$$

с регулярными краевыми условиями по t

$$U_\nu(u(x,y;\cdot)) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}, \quad (x,y)\in\Omega, \tag{2}$$

и с условиями по (x,y)

$$u(x,y;t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4}, \tag{3}$$

$$x^{5/6}D_{0+}^{1/6}(u(\chi_0(x);t)x^{-2/3}) + (1-x)^{5/6}D_{1-}^{1/6}(u(\chi_1(x);t)(1-x)^{-2/3}) = 0, \tag{4}$$

где

$$u(\chi_0(x);t) = u(x, -[3x/2]^{2/3};t), \quad 0\leqslant x\leqslant 1/2,$$

$$u(\chi_1(x);t) = u(x, -[3(1-x)/2]^{2/3};t), \quad 1/2\leqslant x\leqslant 1, \quad 0<t<T.$$

Здесь Ω – конечная двумерная область, ограниченная при $y>0$ кривой Ляпунова σ, оканчивающейся в окрестности точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$ малыми дугами “нормальной кривой”

$$\sigma_0:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4},$$

а при $y<0$ – характеристиками

$$OC:\ x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=0,\quad BC:\ x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=1.$$

Граничные условия задаются с помощью дробных производных Римана–Лиувилля [1, с. 87]

$$D_{0+}^{1/6}g(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{g(t)}{(x-t)^{1/6}}\,dt,\quad D_{1-}^{1/6}g(x)=-\frac{d}{dx}\int\limits_x^1\frac{g(t)}{(t-x)^{1/6}}\,dt.$$

Главная цель настоящей статьи – установить критерий единственности решения задачи (1)–(4). Известны различные способы доказательства единственности. Обычно эффективным средством доказательства единственности является принцип максимума [2, с. 411] и его различные обобщения (принцип Хопфа [3, с. 115] и Зарембы–Жиро [4, с. 85]). Для задачи (1)–(4) указанные принципы не выполняются. Поэтому нам необходим другой, отличный от принципа экстремума, метод.

В работе В.А. Ильина [5] предложен довольно универсальный способ доказательства единственности решения для гиперболических и параболических уравнений при довольно общих ограничениях на область Ω. Смысл требований теоремы В.А. Ильина [5] заключается в том, что эллиптическая часть гиперболического и параболического операторов обладает полной ортогональной системой собственных функций в соответствующем функциональном пространстве.

В данной статье оператор L, соответствующий задаче (1)–(4), представляется в виде разности двух коммутирующих операторов A и B. Единственность решения гарантируется, когда спектры операторов A и B не пересекаются и операторы A и B имеют полные системы корневых элементов в соответствующих функциональных пространствах. При этом не требуется, чтобы оператор B являлся самосопряжённым.

Отметим также работу И.В. Тихонова [6], посвящённую теоремам единственности решений линейных нелокальных задач для абстрактных дифференциальных уравнений. Указанная работа интересна тем, что И.В. Тихонов предложил новый метод доказательства теорем единственности, основанный на “методе частных” для целых функций экспоненциального типа. В статье [7] изучался вопрос единственности решения уравнения теплопроводности с нелокальным условием, выраженным интегралом по времени на фиксированном отрезке. Авторам удалось дать полное описание классов единственности в терминах поведения решений при $|x|\to\infty$. В данной статье метод И.В. Тихонова адаптирован для операторов, дифференциальная часть которых является оператором высокого порядка.

Исследуемый нами класс операторов вида $L=B-A$ относится по терминологии А.А. Дезина [8] к операторам, порождаемым дифференциально-операторными уравнениями. В данной статье исследуется единственность решения задачи (1)–(4) для дифференциально-операторного уравнения.

Вопросы разрешимости дифференциально-операторных уравнений изучались в работах [9–13]. В.В. Шелухин [14, 15] исследовал задачу о прогнозе температуры океана по средним данным за предшествующий период времени, которая также относится к классу дифференциально-операторных уравнений.

1. О спектральных свойствах дифференциального оператора на отрезке. В данном пункте приведены спектральные свойства одномерного дифференциального оператора высшего порядка. В функциональном пространстве $L_2(0,T)$ рассмотрим оператор B, порождённый дифференциальным выражением

$$l(w)\equiv\frac{d^nw}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}w}{dt^{n-1}}+\ldots+p_n(t)w(t),\quad 0<t<T,$$

с регулярными краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha_{kj}w^{(k)}(0)+\beta_{kj}w^{(k)}(T)]=0,\quad j=\overline{1,n},\tag{5}$$

где $p_j(t)\in C^{(n-j)}[0,T]$, $j=\overline{1,n}$.

Напомним, какие краевые условия называются регулярными. Для этого обозначим через S сектор комплексной плоскости ρ – плоскости, определённой неравенствами $0 \leqslant \arg\rho \leqslant \leqslant \pi/n$, и пусть $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$ – все различные корни n-й степени из -1, занумерованные так, что для всех $\rho \in S$ справедливы неравенства

$$\mathrm{Re}\,(\rho\omega_1) \leqslant \mathrm{Re}\,(\rho\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}\,(\rho\omega_n).$$

Известно [16], что краевые условия (5) можно привести к виду

$$U_1(w)=w^{(j_1)}(0)+\sum_{k=0}^{j_1-1}(\alpha_{1,k}w^{(k)}(0)+\beta_{1,k}w^{(k)}(T)),\quad U_2(w)=w^{(j_1)}(T)+\sum_{k=0}^{j_1-1}(\alpha_{2,k}w^{(k)}(0)+\beta_{2,k}w^{(k)}(T)),$$
$$\ldots$$
$$U_{2m-1}(w) = w^{(j_m)}(0) + \sum_{k=0}^{j_m-1}(\alpha_{2m-1,k}w^{(k)}(0) + \beta_{2m-1,k}w^{(k)}(T)),$$
$$U_{2m}(w) = w^{(j_m)}(T) + \sum_{k=0}^{j_m-1}(\alpha_{2m,k}w^{(k)}(0) + \beta_{2m,k}w^{(k)}(T)),$$
$$U_{2m+1}(w) = \alpha_1 w^{(\nu_1)}(0) + \beta_1 w^{(\nu_1)}(T) + \sum_{k=0}^{\nu_1-1}(\alpha_{2m+1,k}w^{(k)}(0) + \beta_{2m+1,k}w^{(k)}(T)),$$
$$\ldots$$
$$U_n(w) = \alpha_r w^{(\nu_r)}(0) + \beta_r w^{(\nu_r)}(T) + \sum_{k=0}^{\nu_r-1}(\alpha_{n,m}w^{(k)}(0) + \beta_{n,m}w^{(k)}(T)),$$

среди чисел j_k и ν_i нет двух одинаковых $(0 \leqslant j_k \leqslant n-1,\ \ k=\overline{1,m};\ \ 0 \leqslant \nu_i \leqslant n-1,\ \ i=\overline{1,r};$ $2m+r=n,\ \ |\alpha_i|+|\beta_i| \neq 0)$.

Регулярность краевых условий определяется различным образом, в зависимости от того будет ли n нечётным или чётным.

Требование I. Предположим, что область определения оператора B задаётся регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями [17, с. 57]. Иначе говоря, в случае нечётного $n = 2p-1$ следующие два определителя отличны от нуля:

$$\theta_0 = \begin{vmatrix} \omega_1^{j_1} & \ldots & \omega_{p-1}^{j_1} & \omega_p^{j_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \omega_{p+1}^{j_1} & \ldots & \omega_n^{j_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{j_m} & \ldots & \omega_{p-1}^{j_m} & \omega_p^{j_m} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \omega_{p+1}^{j_m} & \ldots & \omega_n^{j_m} \\ \alpha_1\omega_1^{\nu_1} & \ldots & \alpha_1\omega_{p-1}^{\nu_1} & \alpha_1\omega_p^{\nu_1} & \beta_1\omega_{p+1}^{\nu_1} & \ldots & \beta_1\omega_n^{1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r\omega_r^{\nu_r} & \ldots & \alpha_r\omega_{p-1}^{\nu_r} & \alpha_r\omega_p^{\nu_r} & \beta_r\omega_{p+1}^{\nu_r} & \ldots & \beta_r\omega_n^{r}\nu_r \end{vmatrix},$$

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} \omega_1^{j_1} & \ldots & \omega_{p-1}^{j_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \omega_p^{j_1} & \omega_{p+1}^{j_1} & \ldots & \omega_n^{j_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{j_m} & \ldots & \omega_{p-1}^{j_m} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \omega_p^{j_m} & \omega_{p+1}^{j_m} & \ldots & \omega_n^{j_m} \\ \alpha_1\omega_1^{\nu_1} & \ldots & \alpha_1\omega_{p-1}^{\nu_1} & \beta_1\omega_p^{\nu_1} & \beta_1\omega_{p+1}^{\nu_1} & \ldots & \beta_1\omega_n^{\nu_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r\omega_r^{\nu_r} & \ldots & \alpha_r\omega_{p-1}^{\nu_r} & \beta_r\omega_p^{\nu_r} & \beta_r\omega_{p+1}^{\nu_r} & \ldots & \beta_r\omega_n^{\nu_r} \end{vmatrix},$$

при этом $i=\overline{1,r},\ \ j=\overline{1,n}$.

Когда же $n = 2p$ чётное, то определители

$$\theta_{-1} = \begin{vmatrix} \omega_1^{j_1} & \ldots & \omega_{p-1}^{j_1} & \omega_p^{j_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \omega_{p+1}^{j_1} & \omega_{p+2}^{j_1} & \ldots & \omega_n^{j_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{j_m} & \ldots & \omega_{p-1}^{j_m} & \omega_p^{j_m} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \omega_{p+1}^{j_m} & \omega_{p+2}^{j_m} & \ldots & \omega_n^{j_m} \\ \alpha_1\omega_1^{\nu_1} & \ldots & \alpha_1\omega_1^{\nu_1} & \alpha_1\omega_p^{\nu_1} & \beta_1\omega_{p+1}^{\nu_1} & \beta_1\omega_{p+2}^{\nu_1} & \ldots & \beta_1\omega_n^{\nu_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r\omega_r^{\nu_r} & \ldots & \alpha_r\omega_{p-1}^{\nu_r} & \alpha_r\omega_p^{\nu_r} & \beta_r\omega_{p+1}^{\nu_r} & \beta_r\omega_{p+2}^{\nu_r} & \ldots & \beta_r\omega_n^{\nu_r} \end{vmatrix},$$

$$\theta_{1} = \begin{vmatrix} \omega_1^{j_1} & \ldots & \omega_{p-1}^{j_1} & 0 & \omega_{p+1}^{j_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \omega_p^{j_1} & 0 & \omega_{p+2}^{j_1} & \ldots & \omega_n^{j_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{j_m} & \ldots & \omega_{p-1}^{j_m} & 0 & \omega_{p+1}^{j_m} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \omega_p^{j_m} & 0 & \omega_{p+2}^{j_m} & \ldots & \omega_n^{j_m} \\ \alpha_1\omega_1^{\nu_1} & \ldots & \alpha_1\omega_{p-1}^{\nu_1} & \beta_1\omega_p^{\nu_1} & \alpha_1\omega_{p+1}^{\nu_1} & \beta_1\omega_{p+2}^{\nu_1} & \ldots & \beta_1\omega_n^{\nu_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r\omega_r^{\nu_r} & \ldots & \alpha_r\omega_{p-1}^{\nu_r} & \beta_r\omega_p^{\nu_r} & \alpha_r\omega_{p+1}^{\nu_r} & \beta_r\omega_{p+2}^{\nu_r} & \ldots & \beta_r\omega_n^{\nu_r} \end{vmatrix}$$

также отличны от нуля.

Введём фундаментальную систему решений $\{w_1(t,\lambda),\ldots,w_n(t,\lambda)\}$ однородного уравнения

$$l(w_s) = \lambda w_s(t,\lambda), \quad 0 < t < T,$$

удовлетворяющих условиям Коши в нуле

$$\frac{d^{(j-1)}}{dt^{(j-1)}} w_s(0,\lambda) = \delta_{j,s}, \quad j = \overline{1,n}, \quad s = \overline{1,n},$$

где $\delta_{j,s}$ – символ Кронекера. Заметим, что все решения $\{w_s(t,\lambda), s = \overline{1,n}\}$ являются целыми функциями от λ.

Обозначим через $\Delta(\lambda)$ характеристический определитель, задаваемый формулой

$$\Delta(\lambda) = \det(U_\nu(w_j)).$$

Нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, с учётом их кратности, представляют собой собственные значения оператора B.

Наконец, для полноты изложения приведём формулу Лагранжа [17].

Пусть $U_1, \ldots, U_n$ – линейно независимые формы переменных $w(0)$, $w'(0), \ldots, w^{(n-1)}(0)$, $w(T)$, $w'(T), \ldots, w^{(n-1)}(T)$. Дополним их какими-нибудь линейными формами $U_{n+1}, \ldots$ $\ldots, U_{2n}$ до линейно независимой системы $2n$ форм $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$. Для любых линейно независимых форм $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ существует единственный набор $2n$ линейных однородных форм

$$V_{2n},\ V_{2n-1},\ \ldots,\ V_1$$

относительно переменных $R(0)$, $R'(0), \ldots, R^{(n-1)}(0)$, $R(T), \ldots, R^{(n-1)}(T)$ для произвольной функций $R(t) \in W_2^n[0,T]$. Тогда формула Лагранжа для любых двух функций $w(t)$ и $R(t)$ из $W_2^n[0,T]$ запишется в виде

$$\int\limits_0^T l(w(t))\overline{R(t)}\,dt - \int\limits_0^T w(t)\overline{l^+(R(t))}\,dt = U_1(w)\overline{V_{2n}(R)} + U_2(w)\overline{V_{2n-1}(R)} + \ldots + U_{2n}(w)\overline{V_1(R)}. \quad (6)$$

Здесь $l^{+}(\cdot)$ – формально сопряжённое дифференциальное выражение к выражению $l(\cdot)$, заданное как

$$l^{+}(R) \equiv (-1)^n \frac{d^n R(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}(p_j(t)R(t)), \quad 0<t<T.$$

Сопряжённый оператор B^* задаётся дифференциальным выражением

$$B^* R(t) = l^{+}(R), \quad 0<t<T,$$

и областью определения

$$D(B^*) = \{R \in W_2^n[0,T] : V_1(R)=0, \quad \ldots, \quad V_n(R)=0\}.$$

В работе [16] вычислены сопряжённые краевые условия:

$$V_n(R) = R^{(n-1-\gamma_1)}(0) + \sum_{k=0}^{n-2-\gamma_1} (\alpha^*_{n,k} R^{(k)}(0) + \beta^*_{n,k} R^{(k)}(T)),$$

$$V_{n-1}(R) = R^{(n-1-\gamma_1)}(T) + \sum_{k=0}^{n-2-\gamma_1} (\alpha^*_{n-1,k} R^{(k)}(0) + \beta^*_{n-1,k} R^{(k)}(T)),$$

$$\ldots$$

$$V_{n-2m}(R) = R^{(n-1-\gamma_m)}(0) + \sum_{k=0}^{n-2-\gamma_m} (\alpha^*_{n-2m,k} R^{(k)}(0) + \beta^*_{n-2m,k} R^{(k)}(T)),$$

$$V_{n-2m+1}(R) = R^{(n-1-\gamma_m)}(T) + \sum_{k=0}^{n-2-\gamma_m} (\alpha^*_{n-2m+1,k} R^{(k)}(0) + \beta^*_{n-2m+1,k} R^{(k)}(T)),$$

$$V_r(R) = \overline{\beta}_1 R^{(n-1-\nu_1)}(0) + \overline{\alpha}_1 R^{(n-1-\nu_1)}(T) + \sum_{k=0}^{n-2-\nu_1} (\alpha^*_{r,k} R^{(k)}(0) + \beta^*_{r,k} R^{(k)}(T)),$$

$$\ldots$$

$$V_1(R) = \overline{\beta}_r R^{(n-1-\nu_r)}(0) + \overline{\alpha}_r R^{(n-1-\nu_r)}(T) + \sum_{k=0}^{n-2-\nu_r} (\alpha^*_{1,k} R^{(k)}(0) + \beta^*_{1,k} R^{(k)}(T)),$$

где числа $\gamma_1, \ \ldots, \ \gamma_m$ определяются из соотношения

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \bigcup \{j_1, \ldots, j_m\} \bigcup \{\nu_1, \ldots, \nu_r\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Введём фундаментальную систему решений $\{R_1(t,\overline{\lambda}), \ \ldots, \ R_n(t,\overline{\lambda})\}$ однородного сопряжённого уравнения

$$l^{+}(R_s) = \overline{\lambda} R_s(t,\overline{\lambda}), \quad 0<t<T, \tag{7}$$

удовлетворяющих условию Коши в нуле

$$\frac{d^{(j-1)}}{dt^{(j-1)}} R_s(0,\overline{\lambda}) = \delta_{j,s}, \quad j=\overline{1,n}, \quad s=\overline{1,n}.$$

Заметим, что все решения $\{R_s(t,\overline{\lambda}), s=\overline{1,n}\}$ являются целыми функциями от $\overline{\lambda}$. Обозначим через $\Delta^*(\overline{\lambda})$ характеристический определитель, задаваемый формулой

$$\Delta^*(\overline{\lambda}) = \det(V_\nu(R_j)). \tag{8}$$

Нули характеристического определителя $\Delta^*(\overline{\lambda})$, с учётом их кратности, представляют собой собственные значения сопряжённого оператора B^*.

Введём также решения однородного сопряжённого уравнения (7) $\tau_s(t,\overline{\lambda})$ при $s=\overline{1,n}$ с неоднородными условиями

$$V_j(\tau_s)=\delta_{j,s}\cdot\Delta^*(\overline{\lambda}),\quad j=\overline{1,n}.$$

Пусть λ_0 – нуль характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ и его кратность равна m_0. Тогда при любом $s=\overline{1,n}$ в упорядоченной строке

$$\left\|\tau_s(t,\overline{\lambda_0}),\frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}\tau_s(t,\overline{\lambda_0}),\ldots,\frac{1}{(m_0-1)!}\frac{\partial^{m_0-1}}{\partial\overline{\lambda}^{m_0-1}}\tau_s(t,\overline{\lambda_0})\right\| \tag{9}$$

первая ненулевая функция представляет собой собственную функцию оператора B^*, а последующие члены строки дают цепочку присоединённых функций, порождённых ею.

В дальнейшем собственные значения оператора B^* будем обозначать через $\overline{\lambda}_\nu$, $\nu\geqslant 1$, а соответствующие собственные и присоединённые функции – через $R_\nu(t)$, $\nu\geqslant 1$.

В работе [16] доказано следующее утверждение.

Теорема A [16]. *Пусть область определения оператора B задаётся регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда область определения сопряжённого оператора B^* также задаётся регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями.*

Нам потребуется также следующее утверждение [17].

Теорема B [17]. *Пусть оператор B порожден регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда система собственных и присоединённых функций оператора B является полной системой в пространстве $L_2(0,T)$.*

Применяя теорему A и теорему B к сопряжённому оператору B^*, можем сформулировать утверждение.

Теорема C. *Пусть выполнено требование I. Тогда система собственных и присоединённых функций оператора B^* полна в пространстве $L_2(0,T)$.*

2. О спектральных свойствах краевой задачи для уравнения Трикоми. В данном пункте приведена самосопряжённая краевая задача для уравнения Трикоми.

Пусть $\Omega\in\mathbb{R}^2$ – конечная область, ограниченная при $y>0$ кривой Ляпунова σ, оканчивающейся в окрестности точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$ малыми дугами “нормальной кривой” σ_0, а при $y<0$ – характеристиками

$$OC:\ x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=0,\quad BC:\ x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=1$$

уравнения

$$Av=yv_{xx}(x,y)+v_{yy}(x,y)=f(x,y). \tag{10}$$

Задача T. Найти в области Ω решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)|_{\sigma_0}=0,\quad \sigma_0:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{9}y^3=\frac{1}{4},$$

$$x^{5/6}D_{0+}^{1/6}(u(\chi_0(x))x^{-2/3})+(1-x)^{5/6}D_{1-}^{1/6}(u(\chi_1(x))(1-x)^{-2/3})=0,$$

где

$$u(\chi_0(x))=u(x,-[3x/2]^{2/3}),\quad 0\leqslant x\leqslant 1/2,$$

$$u(\chi_1(x))=u(x,-[3(1-x)/2]^{2/3}),\quad 1/2\leqslant x\leqslant 1.$$

Оператор, соответствующий краевой задаче T, обозначим через A. Собственные значения оператора A будем нумеровать парой целочисленных индексов η_m. Собственные функции оператора A, соответствующие собственным значениям η_m, обозначим через $v_m(x,y)$.

В работе [18] доказано следующее утверждение.

Теорема K [18]. *Оператор A является самосопряжённым в пространстве $L_2(\Omega)$.*

Как следствие данной теоремы К заключаем, что собственные функции $\{v_m(x,y), m\in\mathbb{N}\}$ оператора A образуют полную систему функций в $L_2(\Omega)$.

3. О единственности решения краевой задачи для уравнения $l(\cdot)-A$ с оператором Трикоми A. Пусть Ω – конечная область из п. 2. В области $Q=\Omega\times(0,T)$ рассмотрим задачу для уравнения (1) с краевыми условиями по t (2) и с условиями (3), (4).

В операторном виде задачу (1)–(4) запишем как

$$Bu = Au(x,y;t)+f(x,y;t), \quad (x,y;t)\in Q. \tag{11}$$

Здесь оператор B действует по переменной t и его свойства приведены в п. 1. Оператор A действует по переменным (x,y) и его спектральные свойства приведены в п. 2.

Докажем критерий единственности решения однородного операторного уравнения (11).

Теорема. *Пусть выполнено требование I. Тогда однородное операторное уравнение*

$$Bu = Au \tag{12}$$

имеет только тривиальное решение $u\in D(B)\bigcap D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma(B)\bigcap\sigma(A)\neq\varnothing,$$

где $\sigma(B)$ и $\sigma(A)$ – спектры операторов B и A соответственно.

Доказательство. Необходимость. Пусть λ_ν – некоторое собственное значение оператора B (с собственной функцией $w_\nu(t)$) и является также собственным значением оператора A, т.е. $\lambda_\nu=\eta_m$ (с собственной функцией $v_m(x,y)$). Тогда функция $u(x,t)=w_\nu(t)v_m(x,y)$ будет нетривиальным решением однородной задачи (12). Необходимость требований теоремы доказана.

Достаточность. Пусть ни одно из собственных значений оператора B $\{\lambda_k, k\geqslant 1\}$ не является собственным значением оператора A. Иначе говоря, число вида $\{\eta_m, m\in\mathbb{N}\}$ не является собственным значением оператора B, т.е. $\Delta(\eta_m)\neq 0$. Покажем, что решение $u(x,y;t)$ однородной краевой задачи (12) тождественно равно нулю в пространстве $L_2(Q)$. Для этого при фиксированном $(x,y)\in\Omega$ и $j=\overline{1,n}$ введём функции

$$F_j(x,y;\overline{\lambda}) = \int\limits_0^T \overline{\tau_j(t,\overline{\lambda})}u(x,y;t)\,dt,$$

представляющее собой целые функций от $\overline{\lambda}$.

Согласно формуле Лагранжа (6) функцию $AF_j(x,y;\overline{\lambda})$ при $j=\overline{1,n}$ можно записать в виде

$$AF_j(x,y;\overline{\lambda}) = \int\limits_0^T \overline{\tau_j(t,\overline{\lambda})}\cdot Au(x,y;t)\,dt = \int\limits_0^T \overline{\tau_j(t,\overline{\lambda})}\cdot Bu(x,y;t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T u(x,y;t)\overline{l^+(\tau_j)}\,dt + U_{n+1}(u)\overline{V_n(\tau_j)}+\ldots+U_{2n}(u)\overline{V_1(\tau_j)} =$$

$$= \lambda\int\limits_0^T u(x,y;t)\overline{\tau_j(t,\overline{\lambda})}\,dt + U_{n+1}(u)\overline{V_n(\tau_j)}+\ldots+U_{2n}(u)\overline{V_1(\tau_j)} =$$

$$= \lambda F_j(x,y;\lambda)+\Delta^*(\overline{\lambda})\cdot U_{2n-j+1}(u). \tag{13}$$

Если λ_0 – нуль характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ кратности m_0, то из соотношений (13) вытекают равенства

$$AF_j(x,y;\overline{\lambda_0}) = \lambda_0 F_j(x,y;\overline{\lambda_0}),$$

$$A\frac{dF_j(x,y;\overline{\lambda_0})}{d\overline{\lambda}} = \lambda_0\frac{dF_j(x,y;\overline{\lambda_0})}{d\overline{\lambda}} + F_j(x,y;\overline{\lambda_0}),$$
$$\ldots$$
$$A\frac{d^{m_0-1}}{d\overline{\lambda}^{m_0-1}}F_j(x,y;\overline{\lambda_0}) = \lambda_0\frac{d^{m_0-1}F_j(x,y;\overline{\lambda_0})}{d\overline{\lambda}^{m_0-1}} + \frac{d^{m_0-2}F_j(x,y;\overline{\lambda_0})}{d\overline{\lambda}^{m_0-2}}.$$

Поскольку $\lambda_0 \overline{\in} \sigma(A)$, то из соотношений (13) вытекают и равенства

$$\frac{d^sF_j(x,y;\overline{\lambda_0})}{d\overline{\lambda}^s} \equiv 0 \quad \text{при} \quad s = \overline{0, m_0-1}.$$

Тогда при $j=\overline{1,n}$ отношения $F_j(x,y;\overline{\lambda})/\Delta^*(\overline{\lambda})$ являются целыми функциями от λ, поскольку в точке $\lambda=\lambda_0$ имеют устранимую особенность.

Теперь переходим ко второму этапу доказательства. Согласно методике работы В.А. Ильина [5] функцию $F_j(x,y;\overline{\lambda})$ умножим скалярно на собственную функцию $v_m(x,y)$:

$$G_{j,m}(\overline{\lambda}) \equiv \int\limits_{\Omega} F_j(x,y;\overline{\lambda})v_m(x,y)\,dx\,dy, \quad m\in\mathbb{N}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Кратности нулей функционала $G_{j,m}(\lambda)$ не меньше кратностей нулей функций $F_j(x,y;\lambda)$. Следовательно, отношения

$$Q_{j,m}(\overline{\lambda}) \equiv \frac{G_{j,m}(\overline{\lambda})}{\Delta^*(\overline{\lambda})}$$

определяют целые функции от $\overline{\lambda}$.

Дальнейший анализ целых функций $Q_{j,m}(\overline{\lambda})$ основан на технике оценок порядка роста и типа целых функций. Заметим, что целая функция $Q_{j,m}(\overline{\lambda})$ не зависит от выбора фундаментальной системы решений однородного уравнения

$$l^+(R(t,\overline{\lambda})) = \overline{\lambda}R(t,\overline{\lambda}), \quad 0<t<T.$$

Обозначим через $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$ все различные корни n-й степени из $(-1)^{n+1}$. Разберём сначала случай нечётного $n=2p-1$.

Пусть ρ – произвольное комплексное число из сектора $S_0=\{\rho\in\mathbb{C}: 0<\arg\rho<\pi/n\}$.

Перенумеруем числа $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$ в следующем порядке:

$$\varepsilon_1=\omega_{i_1}, \quad \varepsilon_2=\omega_{i_2}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n=\omega_{i_n}.$$

Тогда для любого $\rho\in S_0$ выполняются неравенства

$$\mathrm{Re}\,(\rho\varepsilon_1) \leqslant \mathrm{Re}\,(\rho\varepsilon_2) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}\,(\rho\varepsilon_{p-1}) < 0,$$
$$\mathrm{Re}\,(\rho\varepsilon_{p-1}) \leqslant \mathrm{Re}\,(\rho\varepsilon_p) \leqslant \mathrm{Re}\,(\rho\varepsilon_{p+1}),$$
$$0 < \mathrm{Re}\,(\rho\varepsilon_{p+1}) \leqslant \mathrm{Re}\,(\rho\varepsilon_{p+2}) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}\,(\rho\varepsilon_n).$$

Теперь вместо фундаментальной системы решений $\{R_1(t,\rho^n),\ldots,R_n(t,\rho^n)\}$ будем рассматривать фундаментальную систему решений однородного сопряжённого уравнения

$$l^+(R(t,\overline{\lambda})) = \overline{\lambda}R(t,\overline{\lambda}), \quad 0<t<T, \quad \overline{\lambda}=(-\rho)^n.$$

Выберем её согласно теореме 1 из [17, с. 58]:

$$h_1(t,\rho)=e^{\rho\varepsilon_1 t}[1+o(1/\rho)], \quad \ldots, \quad h_n(t,\rho)=e^{\rho\varepsilon_n t}[1+o(1/\rho)], \quad \rho\in S_0, \quad \rho\to\infty. \qquad (14)$$

В результате при любом ρ из сектора S_0 имеем асимптотическое представление характеристического определителя $\widetilde{\Delta}(\rho)$ при $\rho \to \infty$, записанное через фундаментальную систему решений $\{h_1(t,\rho), \ldots, h_n(t,\rho)\}$ (см. [17]).

При $j < p$, $\rho \in S_0$, $\rho \to \infty$, имеем

$$V_n(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_1)}[1], \quad V_{n-1}(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_1)}[0], \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad V_{n-2m+2}(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_m)}[1], \quad V_{n-2m+1}(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_m)}[0], \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad V_r(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\nu_1)}[\overline{\alpha}_1], \quad V_1(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\nu_r)}[\overline{\alpha}_r].$$

Точно также при $j > p$, $\rho \in S_0$, $\rho \to \infty$, имеем

$$V_n(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_1)}e^{\rho\varepsilon_j T}[0], \quad V_{n-1}(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_1)}e^{\rho\varepsilon_j T}[1], \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad V_{n-2m+2}(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_m)}e^{\rho\varepsilon_j T}[0], \quad V_{n-2m+1}(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_m)}e^{\rho\varepsilon_j T}[1], \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad V_r(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\nu_1)}e^{\rho\varepsilon_j T}[\overline{\beta}_1], \quad V_1(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\nu_r)}e^{\rho\varepsilon_j T}[\overline{\beta}_r].$$

Здесь для краткости обозначено $[a] = a + o(1/\rho)$.

Подставим все эти выражения в соотношение (8):

$$\widetilde{\Delta}^*(\overline{\lambda}) = \det(V_\nu(h_j)) = \rho^{\widehat{\alpha}} e^{\rho(\omega_{p+1}+\ldots+\omega_n)T}\Delta_0^*,$$

где $\widehat{\alpha} = 2[n-1-\gamma_1 + \ldots + n-1-\gamma_m] + n-1-\nu_1 + \ldots + n-1-\nu_r$, $\Delta_0^* = [\theta_0^*] + e^{\rho\omega_p}[\theta_1^*]$.

Числа θ_0^* и θ_1^* определяются по сопряжённым формам $\{V_1, \ldots, V_n\}$ и аналогичны числам θ_0 и θ_1, определяемым по формам $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Эти числа отличны от нуля согласно теореме А.

При любом ρ из сектора S_0 асимптотическое представление $\overline{\widetilde{\tau}_1}(t,\rho)$ при $\rho \to \infty$, записанное через фундаментальную систему решений (14), имеет следующий вид:

$$\overline{\widetilde{\tau}_1}(t,\rho) = \frac{1}{(\rho\varepsilon_p)^{(n-1-\gamma_1)}}\rho^{\widehat{\alpha}} e^{\rho(\omega_{p+1}+\ldots+\omega_n)T} e^{\rho\varepsilon_p t}([\xi_0^*]e^{-\rho\varepsilon_p t} + e^{\rho\omega_p(T-t)}[\xi_1^*]),$$

где ξ_0^*, ξ_1^* – некоторые числовые определители. Аналогичные асимптотические представления получаем для $\overline{\widetilde{\tau}_j}(t,\rho)$ при $j > 1$.

Отсюда вытекает, что справедливо равенство

$$Q_1^{k,m}(\overline{\lambda}) = \int\limits_\Omega \biggl(\int\limits_0^T \frac{\overline{\widetilde{\tau}_1}(t,\overline{\lambda})}{\widetilde{\Delta}^*(\rho)} u(x,y;t)\,dt\biggr) v_{k,m}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_\Omega \int\limits_0^T \frac{e^{\rho\varepsilon_p t}([\xi_0^*]e^{-\rho\varepsilon_p t} + e^{\rho\omega_p(T-t)}[\xi_1^*])}{(\rho\varepsilon_p)^{(n-1-\gamma_1)}([\theta_0^*] + e^{\rho\omega_p}[\theta_1^*])} u(x,y;t) v_{k,m}(x,y)\,dt\,dx\,dy.$$

Используя лемму Римана [19, с. 496] в случае $\operatorname{Re}(\rho\varepsilon_p) = \operatorname{Re}(\rho\varepsilon_{p+1}) = 0$, легко получаем, что $\lim\limits_{|\rho|\to\infty} Q_{1,m}(\overline{\lambda}) = 0$, $\rho \in S_0$. Если $\operatorname{Re}(\rho\varepsilon_p) > 0$, то $\operatorname{Re}(\rho\varepsilon_{p+1}) < 0$. Отсюда сразу же следует $\lim\limits_{\rho\to\infty} Q_{1,m}(\overline{\lambda}) = 0$ при $\rho \in S_0$. Таким образом, вдоль всех лучей $\rho \in S_0$ и $\rho \to \infty$ имеем предельное равенство

$$\lim_{\rho\to\infty} Q_{1,m}(\overline{\lambda}) = 0.$$

Аналогичные асимптотические представления получаем для $Q_{j,m}(\overline{\lambda})$ при $j > 1$ и при всех $m = 2, 3, \ldots$

Точно такой же анализ можно провести для сектора $\rho \in S_1$, где $S_1 = \{\rho \in \mathbb{C} : \pi/(2p) < < \arg\rho < \pi/p\}$. Следовательно, по теоремам Фрагмена–Линделёфа и Лиувилля [20, с. 203] для функций конечного порядка получаем, что

$$Q_{j,m}(\overline{\lambda}) \equiv 0 \quad \text{при всех} \quad \overline{\lambda} \in \mathbb{C}.$$

Отсюда для любых $m \in \mathbb{N}$ и любого $j = \overline{1,n}$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} v_m(x,y) F_j(x,y;\overline{\lambda})\, dx\, dy \equiv 0 \quad \text{для любых} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда из полноты системы $\{\, v_m(x,y), m \in \mathbb{N}\,\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$ вытекает, что

$$F_j(x,y;\overline{\lambda}) \equiv 0 \quad \text{для любых} \quad x,y \in \Omega \quad \text{и любого} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Следовательно, имеем

$$\int\limits_0^T \overline{\widetilde{\tau}_j}(t,\overline{\lambda}) u(x,y;t)\, dt \equiv 0 \quad \text{для любых} \quad x,y \in \Omega \quad \text{и любого} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Отсюда вытекает тождество для любых $x,y \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu \geqslant 0$:

$$\frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial \lambda^\nu} \int\limits_0^T \overline{\widetilde{\tau}_j}(t,\overline{\lambda}) u(x,t)\, dt \equiv 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Теперь вместо λ в равенство (15) подставим λ_τ – произвольное собственное значение оператора B. Кратность собственного значения λ_τ считается равной m_τ. Пусть параметр ν в формуле (15) принимает значения 1, 2, ..., $m_\tau - 1$. Тогда в силу (9) из (15) получаем, что при любом фиксированном $(x,y) \in \Omega$ функция $u(x,y;t)$ ортогональна ко всем собственным функциям оператора B^*. Поскольку система собственных функций оператора B^* является полной системой в $L_2(0,T)$, то отсюда вытекает

$$u(x,y;t) \equiv 0 \quad \text{при всех} \quad t \in (0,T), \quad (x,y) \in \Omega.$$

В случае чётного $n = 2p$ утверждение теоремы доказывается аналогично. Таким образом, достаточность теоремы доказана.

Заключение. В данной работе исследован оператор L, представимый в виде разности двух коммутирующих операторов A и B. Оператор B порождается линейным дифференциальным выражением высокого порядка и регулярными двухточечными краевыми условиями на отрезке $[0,T]$. Оператор A соответствует уравнению Трикоми в плоской области, ограниченной кривой Ляпунова и характеристиками волнового уравнения. Рассматриваемый нами оператор A не является полуограниченным и имеет полную ортогональную систему собственных функций в соответствующем функциональном пространстве. При указанном выборе операторов B и A операторное уравнение $Lu = Bu - Au = 0$ имеет тривиальное решение тогда и только тогда, когда спектры операторов B и A не пересекаются.

Обратим внимание на предложенный в настоящей статье метод доказательства теоремы единственности, представляющий собой "гибрид" метода направляющих функционалов М.Г. Крейна [17] и метода В.А. Ильина [5].

Дальнейшее обобщение сформулированного нами результата может развиваться в следующем направлении. Во-первых, в качестве оператора B можно выбрать модельный оператор, порождаемый дифференциальным выражением

$$Bw(t_1,t_2,\ldots,t_q) = \sum_{i=0}^{q} \left(\sum_{k=0}^{n_q} p_{ki}(t_i) \frac{\partial^k w(t_1,t_2,\ldots,t_q)}{\partial t_i^k} \right)$$

на параллелепипеде $(t_1,t_2,\ldots,t_q) \in [0,T_1] \times [0,T_2] \times \ldots \times [0,T_q]$.

Область определения оператора B надо выбрать так, чтобы граничные условия по каждой переменной t_i на отрезке $[0, T_i]$ являлись регулярными в смысле Биркгофа [17].

В качестве оператора A можно выбирать эллиптические операторы, подчинённые условиям С. Агмона [21], которые гарантируют, что оператор A имеет полную систему корневых функций. При указанном выборе операторов B и A наша формулировка критерия единственности сохраняется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проекты AP 14869558, AP 08855402).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam; London; New York, 2006.
2. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
3. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
4. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М., 1959.
5. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. № 2. С. 97–154.
6. *Тихонов И.В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. Математика. 2003. Т. 67. № 2. С. 133–166.
7. *Попов А.Ю., Тихонов И.В.* Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 3. С. 396–405.
8. *Дезин А.А.* Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2000. Т. 229. № 3. С. 3–175.
9. *Grisvard P.* Equations operaationnelles abstraites et problemes aux limites // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 1967. V. 21. № 3. P. 308–347.
10. *Дубинский Ю.А.* Об одной абстрактной теореме и её приложениях к краевым задачам для неклассических уравнений // Мат. сб. 1969. Т. 79 (121). № 1. С. 91–117.
11. *Романко В.К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 1. С. 117–131.
12. *Кожанов А.И., Пинигина Н.Р.* Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Мат. Заметки. 2017. Т. 101. Вып. 3. С. 403–412.
13. *Орынбасаров М.О.* О разрешимости краевых задач для параболического и полипараболического уравнений в нецилиндрической области с негладкими боковыми границами // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 1. С. 151–161.
14. *Шелухин В.В.* Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений // Сибирский мат. журн. 1991. Т. 32. № 2. С. 154–165.
15. *Шелухин В.В.* Задача о прогнозе температуры океана по средним данным за предшествующий период времени // Докл. РАН. 1992. Т. 324. № 4. С. 760–764.
16. *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 82–93.
17. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
18. *Кальменов Т.Ш.* О самосопряжённых краевых задачах для уравнения Трикоми // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 66–75.
19. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 2. М., 1984.
20. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции. М., 1979.
21. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure and Appl. Math. 1962. V. 15. № 2. P. 119–143.

Казахский национальный университет
имени Аль-Фараби, г. Алматы,
Институт математики и математического
моделирования, г. Алматы, Казахстан,
Международный университет информационных
технологий, г. Алматы, Казахстан

Поступила в редакцию 03.04.2022 г.
После доработки 03.04.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.