ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 15–29

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4+517.968.7

СВОЙСТВА ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НИХ

© 2023 г. В. Ф. Чистяков, Е. В. Чистякова

Рассматриваются системы интегро-дифференциальных уравнений высокого порядка с тождественно вырожденной в области определения матрицей перед старшей производной искомой вектор-функции. Приведены критерии разрешимости таких систем уравнений и начальных задач для них, примеры, иллюстрирующие теоретические результаты.

DOI: 10.31857/S037406412301003X, EDN: OBSWYK

1. Введение и постановка задачи. При моделировании природных и технических процессов в настоящее время часто встречаются системы, включающие в себя взаимосвязанные обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) различных порядков и алгебраические уравнения (см., например, [1–4]). Совокупность взаимосвязанных ОДУ и алгебраических уравнений можно записать в виде системы ОДУ с вырожденной матрицей в области определения при старшей производной искомой вектор-функции. В линейном случае эти уравнения имеют вид равенств

$$\Lambda_k x := \sum_{i=0}^{k} A_i(t)x^{(i)}(t) = f(t), \quad t \in T = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1, \tag{1}$$

где $A_i(t)$ – $(n \times n)$-матрицы, $x(t)$ и $f(t)$ – искомая и известная вектор-функции, $x^{(i)}(t) = (d/dt)^i x(t)$, $x^{(0)}(t) = x(t)$, и выполнено соотношение

$$\det A_k(t) = 0 \quad \text{для любого} \quad t \in T. \tag{2}$$

Если моделируемый процесс обладает последействием, то система может включать интегральные уравнения (ИУ) Вольтерры и Фредгольма первого и второго рода, и её можно представить в виде системы интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ)

$$(\Lambda_k + V + \lambda\Phi)y := \sum_{i=0}^{k} A_i(t)y^{(i)}(t) + \int_{\alpha}^{t} \mathcal{K}(t,s)y(s)\,ds + \lambda\int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)y(s)\,ds = f(t), \quad t \in T, \tag{3}$$

где λ – скалярный параметр (возможно комплексный), $\mathcal{K}(t,s)$, $K(t,s)$ – $(n \times n)$-матрицы, определённые в области $T \times T$, $y(t)$ – искомая вектор-функция.

Предполагается, что начальные условия для систем (1), (3) задаются в виде равенств

$$P_x x(\alpha) = a_x, \quad P_y y(\alpha) = b_y, \tag{4}$$

где P_x, P_y – заданные $(q \times nk)$-матрицы полного ранга, $q \leqslant nk$, a_x, b_y – заданные векторы, $x = (x^{\mathrm{т}}, (x^{(1)})^{\mathrm{т}}, \ldots, (x^{(k-1)})^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$, $y = (y^{\mathrm{т}}, (y^{(1)})^{\mathrm{т}}, \ldots, (y^{(k-1)})^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$, $^{\mathrm{т}}$ – транспонирование.

Задачи (1), (3), (4) при $P_x, P_y = E_{nk}$ совпадают с задачами Коши, когда заданы

$$x(\alpha) = a = (a_0^{\mathrm{т}}, a_1^{\mathrm{т}}, \ldots, a_{k-1}^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}, \quad y(\alpha) = b = (b_0^{\mathrm{т}}, b_1^{\mathrm{т}}, \ldots, b_{k-1}^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}},$$

где E_{nk} – единичная матрица размерности nk, a_i, b_i – заданные векторы из $\mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, k-1}$.

Системы вида (1), удовлетворяющие условию (2), называют в настоящее время *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ) [1]. Используются также термины "дескрипторные системы" [4], "алгебро-дифференциальные системы" (АДС) [5], "сингулярные системы" [6]. Выражения вида (3) с условием (2) авторы называют "вырожденными системами ИДУ" или "ДАУ с возмущениями в виде операторов Вольтерры" [7].

Под *решениями* систем (1), (3) понимаются любые вектор-функции $x(t), y(t) \in C^k(T)$, которые обращают системы в тождество на отрезке T при подстановке. Если вектор-функции $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяют условиям (4), то они являются решениями задач (1), (3), (4).

Замечание 1. Очевидно, что для существования решений задач Коши для систем (1), (3) необходимо (но не всегда достаточно) выполнение критерия Кронекера–Капелли в точке $t = \alpha$ для векторов $x^{(k)}(\alpha)$, $y^{(k)}(\alpha)$, а именно:

$$\operatorname{rank} A_k(\alpha) = \operatorname{rank}(A_k(\alpha) \mid f(\alpha) - \bar{a}),$$

$$\operatorname{rank} A_k(\alpha) = \operatorname{rank}\left(A_k(\alpha) \mid f(\alpha) - \bar{b} - \lambda \int\limits_{\alpha}^{\beta} K(\alpha, s)\varsigma(s)\, ds\right),$$

где $\bar{a} = \sum_{i=0}^{k-1} A_i(\alpha)a_i$, $\bar{b} = \sum_{i=0}^{k-1} A_i(\alpha)b_i$, $\varsigma(s)$ – некоторая вектор-функция.

Итак, для разрешимости задач Коши необходимо, чтобы начальные векторы a_i, b_i принадлежали некоторым многообразиям $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y \subset \mathbb{R}^{kn}$. Более того, для разрешимости задачи Коши для системы (3) необходима разрешимость системы интегральных уравнений первого рода с вырожденным ядром вида

$$\lambda \int\limits_{\alpha}^{\beta} L_2 K(\alpha, s)\varsigma(s)\, ds = L_2[f(\alpha) - \bar{b}],$$

неособенная матрица $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ обладает свойством $LA_k(\alpha) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$, блок L_2 имеет размерность $[n - r] \times n$, $r = \operatorname{rank} A_k(\alpha)$.

Матрицы P_x, P_y в формулах (4) выбираются проекторами начальных данных на $\mathcal{R}_x$ и $\mathcal{R}_y$ соответственно. В школе Г.А. Свиридюка условия вида (4) называют *условиями Шоуолтера–Сидорова* [8]. Для ДАУ условия в форме (4) ввёл Ю.Е. Бояринцев [9].

К началу 1990-х гг. было установлено, что формула обращения оператора ДАУ первого порядка Λ_1 при достаточно гладких входных данных для некоторых классов линейных ДАУ содержит интегро-дифференциальный оператор (ИДО) с тождественно вырожденной матрицей на отрезке T при старшей производной и вырожденным ядром $\mathcal{K}(t, s)$ [6, с. 12]. Оказалось, что такой ИДО можно трактовать как левый обратный оператор к оператору Λ_1. Это стало дополнительным стимулом для изучения вырожденных систем ИДУ [10].

В монографии [2] построена теория вырожденных систем ИДУ с аналитическими входными данными и получены условия сходимости разностного метода первого порядка. В рамках этого подхода в школе Ю.Е. Бояринцева был получен ряд результатов о разрешимости систем ИДУ, построен и обоснован ряд численных методов решения начальных и краевых задач, включая нелинейный случай [11–16]. Утверждения о свойствах вырожденных систем ИДУ со слабой особенностью в ядре доказаны в статье [17]. С начала 2000-х гг. в этой области начинают активно работать и зарубежные математики (см., например, [18–20] и приведённую в них библиографию).

2. Вспомогательные определения и утверждения.

Определение 1 (см., например, [5]). *Полуобратной матрицей* к $(m \times n)$-матрице $M(t)$, $t \in T$, называется $(n \times m)$-матрица $M^-(t)$, удовлетворяющая для любых $t \in T$ уравнению $M(t)M^-(t)M(t) = M(t)$.

Полуобратная матрица определена для любого $t \in T$ и любой $(m \times n)$-матрицы $M(t)$ [5]. Если матрица $M(t)$ – квадратная и неособенная, то $M^{-1}(t) = M^{-}(t)$. Матрица $M^{-}(t)$ определена в общем случае неединственным образом (ее частным случаем является псевдообратная матрица $M^{+}(t)$).

Лемма 1 (см., например, [5, с. 35]). *Пусть задана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $M(t)\chi = f(t)$, $t \in T$. Тогда:*

1) если $M(t) \in C^{j}(T)$, $j \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\operatorname{rank} M(t) = r = \mathrm{const}$ для любого $t \in T$, то существует матрица $M^{-}(t) \in C^{j}(T)$. Если $\operatorname{rank} M(t) \neq \mathrm{const}$, $t \in T$, то хотя бы один элемент любой матрицы $M^{-}(t)$ имеет разрыв второго рода на отрезке T;

2) СЛАУ разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\Pi(t)f(t) = 0, \quad t \in T,$$

и все её решения представимы в виде

$$\chi = M^{-}(t)f(t) + \tilde{\Pi}(t)\omega(t), \quad t \in T,$$

где $\Pi(t) = [E_m - M(t)M^{-}(t)]$, $\tilde{\Pi}(t) = [E_n - M(t)M^{-}(t)]$ – проекторы на ядро и образ матрицы $M(t)$ соответственно, $\omega(t)$ – произвольная вектор-функция;

3) СЛАУ имеет постоянные решения χ тогда и только тогда, когда

$$f(t) = M(t)\mathcal{C}^{-}\theta, \quad \mathcal{C} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} M^{\mathrm{T}}(s)M(s)\,ds, \quad \theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} M^{\mathrm{T}}(s)f(s)\,ds,$$

и все её решения представимы в виде

$$\chi = \mathcal{C}^{-}\theta + (E_n - \mathcal{C}^{-}\mathcal{C})c \quad \textit{для любого} \quad c \in \mathbb{R}^{n}.$$

Ниже нам потребуются некоторые сведения о системах ИУ Фредгольма первого рода

$$\hat{\Phi}\varsigma := \int\limits_{\alpha}^{\beta} \hat{K}(t,s)\varsigma(s)\,ds = f(t), \quad t \in T, \tag{5}$$

где $\hat{K}(t,s)$ – $(m \times n)$-матрица, определённая в области $T \times T$, $\varsigma \equiv \varsigma(t)$ – искомая вектор-функция.

Определение 2. Ядро $\hat{K}(t,s) = \|k_{ij}(t,s)\|_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$ интегральных уравнений (5) называется *вырожденным*, если все его элементы можно представить в виде конечной суммы произведений вида $k_{ij}(t,s) = \sum_{\nu=1}^{n_{ij}} a_{\nu,ij}(t)b_{\nu,ij}(s)$.

Лемма 2 [15]. *Любое матричное вырожденное ядро $\hat{K}(t,s)$ разложимо на произведение матриц $M(t)$ и $L(s)$ размерностей $(m\times\mu)$ и $(\mu\times m)$ соответственно, где $\mu \leqslant nm\max n_{ij}$.*

Пример 1. В одномерном случае, когда $\hat{K}(t,s) = \sum_{\nu=1}^{i} a_{\nu}(t)b_{\nu}(s)$, $i \in \mathbb{N}$, можно принять $M(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_i(t))$ и $L(s) = (b_1(s), b_2(s), \ldots, b_i(s))^{\mathrm{T}}$. Например, для ядра $K(t,s) = (t-s)^{i}$ возможно представление $K(t,s) = (C_i^0 t^i, \ldots, C_i^{i-1}t, C_i^i \cdot 1)(1, -s, \ldots, (-s)^i)^{\mathrm{T}}$, где $C_i^j = i!/(j!(i-j)!)$ – биномиальные коэффициенты.

На основе леммы 1 и представления вырожденного ядра в виде произведения $\hat{K}(t,s) = M(t)L(s)$ в работе [15] доказано следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть в системе (5) ядро $\hat{K}(t,s)$ вырожденное и $M(t)$, $L(s)$ – матрицы из леммы 2. Тогда для разрешимости системы (5) необходимо и достаточно выполнения условий:*

1) $f(t) = M(t)\mathcal{C}^{-}\theta$;

2) $\chi = \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{C}}^{-}\chi$, *в которых* $\mathcal{C}=\int_\alpha^\beta M^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(s)M(s)\,ds$, $\tilde{\mathcal{C}}=\int_\alpha^\beta L(s)L^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(s)\,ds$, $\theta=\int_\alpha^\beta M^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(s)f(s)\,ds$, $\chi=\mathcal{C}^-\theta+(E_\mu-\mathcal{C}^-\mathcal{C})c$, c *– произвольный вектор из* $\mathbb{R}^\mu$.

Более того, все решения системы описываются формулой

$$\varsigma(t)=\bar\varsigma(t)+\xi(t)=L^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(t)\tilde{\mathcal{C}}^-\chi+(I-\Phi_0)w,$$

где $\Phi_0 w=\int_\alpha^\beta K_0(t,s)w(s)\,ds$, $K_0(t,s)=L^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(t)\tilde{\mathcal{C}}^-L(s)$, I *– единичный оператор,* $w\equiv w(t)$ *– произвольная вектор-функция, которая обладает свойством* $b=\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{C}}^-b$, $b=\int_\alpha^\beta L(s)w(s)\,ds$.

Замечание 2. Обратим внимание, что проверка условий леммы 3 существенно упрощается, если $\det\tilde{\mathcal{C}}\neq 0$. Тогда при выполненном условии 1) система (5) имеет решения при произвольных значениях вектора χ и произвольных вектор-функциях $w(t)$. Однородная система (5) $\hat\Phi\varsigma=0$ имеет ненулевое ядро $\varsigma=(I-\Phi_0)w$.

Отметим ещё одно полезное соотношение. Из формулы Лейбница для дифференцирования произведений вытекает равенство

$$\mathrm{d}_i[MF]=\mathcal{M}_i[M]\mathrm{d}_i[F], \tag{6}$$

где $M\equiv M(t)$, $F\equiv F(t)$ – некоторые матрицы подходящей размерности из $C^i(T)$,

$$\mathrm{d}_i[M]=\begin{pmatrix}M\\(d/dt)M\\ \vdots\\(d/dt)^iM\end{pmatrix},\quad \mathcal{M}_i[M]=\begin{pmatrix}C_0^0M & 0 & \dots & 0\\ C_1^0M^{(1)} & C_1^1M & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_i^0M^{(i)} & C_i^1M^{(i-1)} & \dots & C_i^iM\end{pmatrix}.$$

3. Сведения из теории линейных ДАУ. Введём следующие понятия.

Определение 3. Пространство решений (ПР) однородного ДАУ (1) *конечномерно*, если все произведения $\tilde X_d(t)c$, где $\tilde X_d(t)$ – $(n\times d)$-матрица из $C^k(T)$, c – вектор произвольных постоянных, являются решениями ДАУ, и на отрезке T нет других решений. Минимально возможное значение целочисленного параметра d называется *размерностью* ПР системы (1). ПР однородного ДАУ (1) *бесконечномерно*, если оно содержит бесконечное количество линейно-независимых решений.

Выделим класс линейных ДАУ, наиболее близких по свойствам к системам ОДУ в нормальной форме (форме Коши).

Определение 4. Система (1) *имеет решение типа Коши* на отрезке T, если она разрешима для любой вектор-функции $f(t)\in C^{kn}(T)$ и её решения представимы в виде линейной комбинации

$$x(t,c)=X_d(t)c+\psi(t), \tag{7}$$

где $X_d(t)$ – $(n\times d)$-матрица из $C^k(T)$ со свойством $\operatorname{rank}\mathrm{d}_{k-1}[X_d(t)]=d$ для любого $t\in T$, $\mathrm{d}_{k-1}[.]$ – оператор из формул (6), c – вектор произвольных постоянных, $\psi(t)$ – вектор-функция со свойством $\Lambda_k\psi(t)=f(t)$, $t\in T$, и на любом подотрезке $T_0=[\alpha_0,\beta_0]\subseteq T$ нет решений, отличных от $x(t,c)$.

Пример 2. Рассмотрим однородное ДАУ

$$\bar\Lambda_1 x:=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\dot x+\begin{pmatrix}1&2\gamma\\1&2\end{pmatrix}x=0,\quad t\in T=[1,2],$$

где γ – параметр. Для любого $\gamma\neq 1$ в определениях 3, 4 имеем, что $d=0$. Если $\gamma=1$, то в качестве базиса ПР можно взять вектор-функции $\phi_j(t)=(2t^j,-t^j)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}$, $j\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Из вида базиса следует, что $\dim\ker\bar\Lambda_1=\infty$, и одну из компонент решения можно взять в виде произвольной вектор-функции из $C^1(T)$.

Определение 5. Если существуют операторы

$$\Omega_l=\sum_{j=0}^{l}L_j(t)(d/dt)^j,\quad \Omega_r=\sum_{j=0}^{r}R_j(t)(d/dt)^j,$$

где $L_j(t)$, $R_j(t)$ – $(n\times n)$-матрицы из $C(T)$, обладающие свойствами

$$\Omega_l\circ\Lambda_k\upsilon=\tilde\Lambda_k\upsilon,\quad \Lambda_k\circ\Omega_r\upsilon=\check\Lambda_k\upsilon\quad \text{для любой}\quad \upsilon\equiv\upsilon(t)\in C^{\nu+k}(T),$$

$\tilde\Lambda_k\upsilon=\sum_{i=0}^k\tilde A_i(t)\upsilon^{(i)}(t)$, $\check\Lambda_k\upsilon=\sum_{i=0}^k\check A_i(t)\upsilon^{(i)}(t)$, $\nu=\{l$ или $r\}$, $\tilde A_i(t)$, $\check A_i(t)$ – некоторые $(n\times\times n)$-матрицы из $C(T)$, $\det\tilde A_k(t)\neq0$, $\det\check A_k(t)\neq0$ для любого $t\in T$, то они называются *левым и правым регуляризирующими операторами* (ЛРО и ПРО) для системы (1), а наименьшие возможные l, r называются её *индексами* (левым и правым).

Замечание 3. Ниже принимается, что индекс оператора Λ_k со свойством $\det A_k(t)\neq0$ при всех $t\in T$ равен нулю.

Пример 3. Рассмотрим ДАУ

$$\Lambda_1x=\begin{pmatrix}-2t & 1\\ -2t^2 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=f=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix},\quad t\in T=[-1,1]. \tag{8}$$

Умножив ДАУ на матрицу $L(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -t & 1\end{pmatrix}$ и выразив компоненту x_1 через x_2, систему расщепляем на дифференциальное и алгебраическое уравнения

$$(\gamma-2)t\dot x_1(t)+2\gamma x_1(t)=\tilde f_1,\quad x_2(t)=\gamma t x_1(t)+\tilde f_2,\quad t\in T, \tag{9}$$

где $\tilde f_1=2f_1+t\dot f_1-\dot f_2$, $\tilde f_2=f_2(t)-tf_1(t)$. При $\gamma=2$ видим, что решение системы (8) типа Коши существует, $d=0$, индекс $l=2$, и при любых $f\in C^2(T)$ выполняется равенство

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\hat\Lambda_1f=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ t & 0\end{pmatrix}f+\begin{pmatrix}t/4 & -1/4\\ t^2/2 & -t/2\end{pmatrix}\dot f.$$

В качестве ЛРО можно принять оператор $\Omega_2=(d/dt)\hat\Lambda_1$.

При $\gamma=1$ однородная система (8) имеет семейство решений из определения 3:

$$\tilde X_d(t)c=\begin{pmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t)\\ t\phi_1(t) & t\phi_2(t)\end{pmatrix}c,\quad c=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\in\mathbb R^2,$$

где $\phi_1(t)=\{0,t\in T_1;t^2,t\in T_2\}$, $\phi_2(t)=\{t^2,t\in T_1;0,t\in T_2\}$, $T_1=[-1,0]$, $T_2=(0,1]$. Через точку $(x_1(0),x_2(0))^{\mathrm T}=0$ проходит бесконечное число решений.

Если подотрезок $T_0=[\alpha_0,\beta_0]\subset T$ обладает свойством $0\notin T_0$, то ДАУ (8) при $\gamma=1$ на T_0 имеет решение типа Коши, где $d=1$, индекс $l=1$. В качестве ЛРО можно принять оператор $\Omega_1=\operatorname{diag}\{1,(d/dt)\}L(t)$. С использованием формул (9) решение можно записать в явной форме.

Введём понятия и приведём утверждения, позволяющие вычислить индекс ДАУ и коэффициенты ЛРО.

Определение 6. Совокупность самой системы (1) и её производных до порядка i включительно $\mathrm d_i[\Lambda_kx-f]=0$, $t\in T$, где $\mathrm d_i[.]$ – оператор из формул (6), называется *i-продолженной системой* (1).

С использованием формул (6) i-продолженную систему запишем в виде соотношений

$$D_i[\mathbf A]x_{i+k}=\sum_{j=0}^k(O_j,\mathcal M_i[A_j],\tilde O_j)x_{i+k}=(B_i,\Gamma_i[\mathbf A])x_{i+k}=\mathrm d_i[f(t)], \tag{10}$$

где $\mathbf A=(A_k(t),A_{k-1}(t),\ldots,A_0(t))$, матрица $D_i[\mathbf A]$ имеет размерность $[n_i\times(i+k+1)n]$, нулевые матрицы O_j, $\tilde O_j$ имеют размерности $[n_i\times jn]$, $[n_i\times(k-j)n]$, $n_i=n(i+1)$, $j=\overline{0,k}$, соответственно, $x_{i+k}=\mathrm d_{i+k}[x]$, $B_i\equiv B_i(t)$ – блок размерности $[n_i\times kn]$, $\Gamma_i[\mathbf A]$ – блочно-треугольная квадратная матрица с блоками $A_k(t)$ на диагонали.

Далее нам потребуется сводка следующих результатов: теоремы 1, 2 и леммы 4, 5 из работы [7] и леммы 4.1–4.3 из работы [5]. Для того чтобы сформулировать эти утверждения в более компактном виде, ослабим требования на гладкость входных данных.

Теорема 1. *Пусть в ДАУ (1):* $A_i(t) \in C^{2m}(T)$, $i = \overline{0,k}$, $f(t) \in C^m(T)$, $m = kn$. *Тогда три условия на систему (1) на отрезке* T *эквивалентны:*

1) на T *определено решение типа Коши;*

2) на T *определён ЛРО;*

3) на T *определён ПРО.*

Следствие 1. *Пусть для произведения операторов* $\Lambda_\nu = \prod_{j=1}^{i} \Lambda_{k_j}$, $t \in T$, *определён ЛРО. Тогда для каждого сомножителя* Λ_{k_j}, $j = \overline{1,i}$, $t \in T$, *определён свой ЛРО.*

Более того, если для каждого оператора Λ_{k_j}, $j = \overline{1,i}$, $t \in T$, определён ЛРО, то для оператора произведения Λ_ν определён ЛРО.

Следствие 2. *Пусть оператор* Λ_{k_1}, $t \in T$, *является ЛРО для оператора* Λ_{k_2}, $t \in T$. *Тогда начальная задача* $\Lambda_{k_1} v = 0$, $t \in T$, $v^{(j)}(\alpha) = 0$, $j = \overline{0, k_1 - 1}$, *имеет на отрезке* T *только нулевое решение.*

Следствие 3. *Пусть для каждого оператора* Λ_{k_j}, $j = \overline{1,i}$, $t \in T$, *с матрицами-коэффициентами из* $C^\infty(T)$ *определён ЛРО. Тогда для произведения* $\Lambda_\nu = \prod_{j=1}^{i} \Lambda_{k_j}$, $t \in T$, *справедливо равенство* $d_\nu = \sum_{j=0}^{i} d_j$, *где* d_ν, d_j *– размерности ПР операторов* Λ_ν *и* Λ_{k_j}, $t \in T$, *из формулы (7).*

Замечание 4. Утверждение, эквивалентное следствию 3, впервые доказано при аналитических входных данных для ДАУ первого порядка в статье [21].

К сожалению, нет пока общей формулы, кроме некоторых частных случаев (см. ниже лемму 4), позволяющей вычислить индекс произведения произвольных операторов ДАУ по их индексам. Индекс произведения может меняться в широких пределах, например,

$$[E_n - (d/dt)N]^j = E_n - (d/dt)jN, \quad [E_n - (d/dt)N] \circ [E_n + (d/dt)N] = E_n,$$

где N – постоянная матрица со свойством $N^2 = 0$, оператор $E_n \pm (d/dt)jN$, $j \in \mathbb{N}$, имеет индекс 2.

Теорема 2. *Пусть в ДАУ (1) выполнены условия теоремы 1 и левый индекс ДАУ равен* l. *Тогда:*

1) правый и левый индексы ДАУ равны и справедливы неравенства $0 \leqslant l \leqslant kn$;

2) в формуле (7) вектор-функция имеет вид

$$\psi(t) = \int\limits_\alpha^t K(t,s)f(s)\,ds + \sum_{j=0}^{l-k} C_j(t) f^{(j)}(t), \quad l \geqslant k, \quad \psi(t) = \int\limits_\alpha^t K(t,s)f(s)\,ds, \quad l < k, \tag{11}$$

где $K(t,s)$, $C_j(t)$ *– некоторые* $(n \times n)$*-матрицы,* $t \in T$, $(t,s) \in T \times T$.

Замечание 5. Способы вычисления индекса (левого) и матричных коэффициентов ЛРО можно найти, например, в статье [7]. При вычислении ПРО нужно решать ДАУ с матрицами коэффициентов в качестве искомых величин [22]. Поэтому этот метод приведения ДАУ к нормальной форме в настоящее время представляет только теоретический интерес.

Лемма 4. *Пусть входные данные операторов* Λ_{k_j}, $t \in T$, $j = \overline{1,i}$, *обладают достаточной гладкостью. Тогда:*

1) индекс оператора $\Lambda_{k+j} = (d/dt)^j \Lambda_k$, $t \in T$, *равен индексу* Λ_k, $t \in T$, *при любом* $j = \mathbb{N}$;

2) если индексы сомножителей Λ_{k_j}, $t \in T$, *не превосходят единицы, то индекс оператора* $\Lambda_\omega = \prod_{j=1}^{i} \Lambda_{k_j}$, $t \in T$, *не превосходит* i;

3) если индексы сомножителей Λ_{k_j}, $t \in T$, *не превосходят* k_j, *то индекс оператора* $\Lambda_\nu = \prod_{j=1}^{i} \Lambda_{k_j}$, $t \in T$, *не превосходит* ν. *Более того, индекс произведения* $(\prod_{j=1}^{i} \Lambda_{k_j}) \circ \Lambda_k$ *не превосходит индекса оператора* Λ_k.

Доказательства следствий вытекают из вида формулы обращения (11), в которой при выполнении условия $l \leqslant k$ отсутствуют операторы $C_j(t)(d/dt)^j$, $j \geqslant 1$.

Замечание 6. Если ДАУ (1) имеет решение типа Коши, то сохраняются важнейшие свойства линейных систем ОДУ в нормальной форме: 1) множества решений на отрезках T и $T_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset T$ совпадают (отсутствует “память”); 2) если через заданную точку $(b \in \mathbb{R}^{kn},\ t_* \in T)$ проходит решение ДАУ, то оно единственно на T, так как решение системы $\check{X}_{k-1}(t_*)c = b - \check{\psi}_{k-1}(t_*)$ относительно вектора c единственно: $\operatorname{rank}\check{X}_{k-1}(t_*) = d < kn$ для любого $t_* \in T$, где $\check{X}_{k-1}(t_*) = \mathrm{d}_{k-1}[X_d(t)]$, $\check{\psi} = \mathrm{d}_{k-1}[\psi(t)]$.

Это и обусловило появление термина “решение типа Коши”.

Лемма 5. *Начальная задача (1), (4) в условиях теоремы 1 разрешима тогда и только тогда, когда для некоторого вектора $c \in \mathbb{R}^{nk}$ выполнены соотношения*

$$\operatorname{rank} G_{l-1} = (\operatorname{rank} G_{l-1} \mid h - g), \tag{12}$$

где $G_{\varrho-1} = \Gamma_{l-1}[\mathbf{A}]|_{t=\alpha}$, $h = d_{l-1}[f(t)]|_{t=\alpha}$, $g = B_{l-1}(\alpha)[P_x^- a_x + (E_{nk} - P_x^- P_x)c]$.

Более того, если вектор g вычисляется единственным образом, то решение начальной задачи единственно.

Рассмотрим задачу Коши, где $P_x = E_{nk}$, $a_x = a$. Формула (12) является необходимым и достаточным условием выполнения равенства $D_{l-1}[\mathbf{A}]\mathrm{d}_{k+l-1}[x] = \mathrm{d}_{l-1}[f]$ в точке $t = \alpha$. Согласно разбиению матрицы $D_{l-1}[\mathbf{A}]$ в формуле (10) это равенство эквивалентно разрешимости СЛАУ $G_{l-1}\mathcal{Z} = h - B_{l-1}(\alpha)a$, $\mathcal{Z} = \mathrm{d}_{l-1}[x^{(k)}]|_{t=\alpha}$.

Если ввести вектор-функции $z^{(i)}(t) = (d/dt)^i[\Lambda_k x - f]$, $t \in T$, $i = \overline{0, l-1}$, то они в силу сказанного выше удовлетворяют условиям $z^{(i)}(\alpha) = 0$. Начальная задача

$$\Omega_l z = 0, \quad t \in T, \quad z^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i = \overline{0, l-1},$$

где Ω_l – ЛРО для системы (1), имеет согласно следствию 2 только одно решение $z \equiv z(t) = [\Lambda_k x - f] = 0$. ДАУ $\Lambda_k x = f$ имеет решение типа Коши. СЛАУ $\hat{X}_{k-1}(\alpha)\chi = a - \hat{\psi}_{k-1}(\alpha)$, где $\hat{X}_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[X_d]$, $\hat{\psi}_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[\psi]$, имеет единственное решение χ. Для завершения доказательства необходимо применить лемму 1, из которой следует, что все начальные векторы принадлежат многообразию $P_x^- a_x + (E_2 - P_x^- P_x)c$, где вектор c пробегает все значения из $\mathbb{R}^{nk}$.

Пример 4. Рассмотрим начальную задачу

$$\bar{\Lambda}_1 x = \bar{A}_1\dot{x} + \bar{A}_0 x = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\dot{x} + \begin{pmatrix} 2+\gamma & 1 \\ 4+4\gamma & 4 \end{pmatrix}x = \begin{pmatrix} (2+\gamma)e^t + 5e^{2t} \\ (4+4\gamma)e^t + 12e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, 1], \tag{13}$$

$$P_x x(\alpha) = (1, 2)x(0) = a_x = 3.$$

Если $\gamma \neq 0$, то индекс ДАУ $l = 1$, размерность ПР $d = 1$, в качестве ЛРО можно принять оператор

$$\Omega_1 = \operatorname{diag}\{1, (d/dt)\}L, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы и векторы в формуле (12) имеют вид $G_0 = \bar{A}_1$, $B_0 = \bar{A}_0$,

$$P_x^- a_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3, \quad (E_2 - P_x^- P_x)c = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad h = \begin{pmatrix} 7+\gamma \\ 16+4\gamma \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 3+2\gamma \\ 4+8\gamma \end{pmatrix} c_2.$$

Из условия равенства рангов (12) следует уравнение $(1 - 2\gamma)c_2 = 1 - 2\gamma$; $c_2 = 1$ для любого $\gamma \neq 1/2$. Итак, для любого $\gamma \neq 1/2$ имеем

$$x(0) = P_x^- a_x + (E_2 - P_x^- P_x)c = (1, 1)^{\mathrm{T}}, \quad x = (e^t, e^{2t})^{\mathrm{T}}.$$

Если $\gamma = 1/2$, то умножением ДАУ (13) на матрицу L выделим алгебраическое уравнение $(1, 2)x = e^t + 2e^{2t}$, $t \in T$, и начальное условие является его следствием при $t = 0$. Начальная задача совместна, но её решение неединственно.

Если $\gamma = 0$, то $d = 0$, $l = 2$. В формуле (12) матрицы и векторы имеют вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ \bar{A}_0 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h = \mathrm{d}_1[f(t)]|_{t=0}, \quad P_x^- a_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3, \quad (E_2 - P_x^- P_x)c = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Проделав аналогичные выкладки при $l = 1$, получим, что $c_2 = 1$, $x(0) = (1,1)^{\mathrm{т}}$.

4. Общие свойства вырожденных систем ИДУ. По аналогии с ДАУ введём следующие понятия.

Определение 7. Пространство решений однородной системы ИДУ (3) *конечномерно*, если все произведения $\tilde{Y}_d(t)c$, где $\tilde{Y}_d(t)$ – $(n \times d)$-матрица из $C^k(T)$, c – вектор произвольных постоянных, являются решениями системы ИДУ, и на отрезке T нет других решений.

Минимально возможное значение целочисленного параметра d называется *размерностью* ПР системы (3). ПР однородной системы ИДУ (3) бесконечномерно, если оно содержит бесконечное количество линейно-независимых решений.

Определение 8. Если существуют операторы

$$\tilde{\Omega}_\varrho = \sum_{j=0}^{\varrho} \tilde{L}_j(t)(d/dt)^j, \quad \bar{\Omega}_r = \sum_{j=0}^{r} \tilde{R}_j(t)(d/dt)^j,$$

где $\tilde{L}_j(t)$, $\tilde{R}_j(t)$ – $(n \times n)$-матрицы из $C(T)$, обладающие свойствами

$$\tilde{\Omega}_\varrho \circ (\Lambda_k + V + \lambda\Phi)\upsilon = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{V} + \lambda\tilde{\Phi})\upsilon, \quad (\Lambda_k + V + \lambda\Phi) \circ \tilde{\Omega}_r \upsilon = (\bar{\Lambda}_k + \bar{V} + \lambda\bar{\Phi})\upsilon,$$

$\upsilon \equiv \upsilon(t) \in C^{\nu+k}(T)$ – произвольная вектор-функция, $\nu = \{\varrho$ или $r\}$, входные данные операторов $(\tilde{\Lambda}_k + \tilde{V} + \lambda\tilde{\Phi})$, $(\bar{\Lambda}_k + \bar{V} + \lambda\bar{\Phi})$ принадлежат пространствам $C(T)$, $C(T \times T)$ соответственно, старшие коэффициенты операторов $\tilde{\Lambda}_k$, $\bar{\Lambda}_k$ удовлетворяют условиям

$$\det \tilde{A}_k(t) \neq 0, \quad \det \bar{A}_k(t) \neq 0 \quad \text{для любого} \quad t \in T,$$

то они называются *левым и правым регуляризирующими операторами* для системы (3), а наименьшие возможные ϱ, r называются её *индексами* (левым и правым).

Для систем ИДУ теряется часть важных свойств общих решений ДАУ с решением типа Коши, отмеченных в замечании 6.

Пример 5. Рассмотрим одномерный пример

$$\dot{y}(t) + \int_0^t b^2 y(s)\, ds = 0, \quad t \in T = [0,1], \quad y(t_*) = a, \quad t_* \in T.$$

Общее решение здесь имеет вид $y(t,c) = c\cos(bt)$, $c \in \mathbb{R}^1$. Начальная задача с условием $y(0) = a$ имеет единственное решение $y(t) = a\cos(bt)$ при любом $a \in \mathbb{R}^1$.

Если $a \neq 0$, $t_* > 0$ и $t_* b = \pi/2$, то задача не имеет на отрезке $[0,1]$ решений, так как $y(t_*) = 0$. В случае $y(t_*) = 0$, $t_* b = \pi/2$ видим, что $y(t,c) = c\cos(bt)$ при любом $c \in \mathbb{R}^1$.

Пример 6. Рассмотрим уравнения

$$0\dot{\upsilon}(t) + \upsilon(t) - \int_\alpha^\beta \upsilon(s)\, ds = 1, \quad 0\dot{y}(t) + y(t) - \int_\alpha^t y(s)\, ds = 1, \quad t \in T,$$

которые имеют решения $\upsilon(t) = 1/(1-\tau)$, $\tau = \beta - \alpha$, $y(t) = e^{(t-\alpha)}$. В отличие от ДАУ с решением типа Коши ИДУ "помнят" отрезок, на котором определены, и при произвольных сужениях отрезка $T_0 \subset T$ решения меняются (или могут вообще не существовать).

Пример 7. Рассмотрим систему

$$(\Lambda_1+V)y=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}\dot y(t)+\begin{pmatrix}2&2\\8&8\end{pmatrix}y(t)+\int\limits_0^t(t-s)^\nu\begin{pmatrix}1&1\\5&3\end{pmatrix}y(s)\,ds=f(t),$$

где $t\in T=[0,1]$, $f(t)\in C^{\nu+2}(T)$. Здесь определён ЛРО в смысле определения 8, а именно,

$$\tilde\Omega_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&(d/dt)^{\nu+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}.$$

ПР системы $\Lambda_1x=0$, $t\in T$, бесконечномерно. В качестве базиса ПР можно взять набор вектор-функций $\phi_j=(t^j,-t^j)^{\mathrm т}$, $j\in\mathbb N\bigcup\{0\}$, ЛРО для оператора Λ_1 не существует. Для разрешимости рассматриваемой системы ИДУ необходимо выполнение условия

$$(d/dt)^j[f_2(t)-4f_1(t)]|_{t=0}=0,\quad j=\overline{0,\nu+1}.$$

Итак, в отличие от ДАУ существование ЛРО для оператора вырожденной системы ИДУ не гарантирует её разрешимость при сколь угодно гладких входных данных и в общем случае индекс ИДУ не ограничен числом nk. В случае нашего примера ν можно задавать произвольно.

Пример 8. Рассмотрим систему

$$(\Lambda_1+\gamma V)y=A_1\dot y(t)+y(t)+\gamma\int\limits_0^t A_1^{\mathrm т}y(s)\,ds=f(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{pmatrix},\quad t\in T=[0,1],$$

где

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad A_1^2=0,\quad f(t)\in C^2(T).$$

Решение $y=(y_1(t),f_2(t)-\gamma\int_0^t y_1(s)\,ds)^{\mathrm т}$, где $y_1(t)=[f_1(t)-\dot f_2(t)]/(1-\gamma)$, единственно. Для операторов Λ_1, $(\Lambda_1+\gamma V)$, $\gamma\neq1$, определены индексы $l=2$, $\varrho=2$ в смысле определений 5, 8. Здесь $l>k$, $k=1$. При $\gamma=1$ ПР системы $(\Lambda_1+\gamma V)y=0$, $t\in T$, бесконечномерно. В качестве базиса можно принять $\phi_j(t)=(-jt^{j-1},t^j)^{\mathrm т}$, $j\in\mathbb N$. Не существует ЛРО и для совместности системы ИДУ необходимо выполнение условия $f_1(t)-\dot f_2(t)=0$, $t\in T$.

Определение 9. Совокупность системы (3) и её производных до порядка i включительно $\mathrm d_i[(\Lambda_k+V+\lambda\Phi)y-f]=0$, $t\in T$, где $\mathrm d_i[\,\cdot\,]$ – оператор из формул (6), называется *i-продолженной системой* (3).

Продолженную систему из определения 9 с использованием формулы (6) запишем в виде равенства

$$\tilde D_i[\mathbf A,\mathcal K]y_{i+k}+\int\limits_\alpha^t\mathrm d_i[\mathcal K(t,s)]y(s)\,ds+\lambda\int\limits_\alpha^t\mathrm d_i[K(t,s)]y(s)\,ds=\mathrm d_i[f(t)],\tag{14}$$

где

$$\tilde D_i[\mathbf A,\mathcal K]=D_i[\mathbf A]+\sum_{j=1}^i\mathcal M_i[Q_{j-1}]\mathcal E_{-j},\quad\mathcal E_{-j}=\begin{pmatrix}0&0\\E_{n(i+1-j)}&0\end{pmatrix},$$

нулевые блоки в матрице $\mathcal E_{-j}$ уравнивают размерности слагаемых матриц, $Q_{j-1}\equiv Q_{j-1}(t)=$ $=\partial^{j-1}\mathcal K(t,s)/\partial t^{j-1}|_{t=s}$, $y_{i+k}=\mathrm d_{i+k}[y]$. Ниже используется аналог разбиения из формул (10):

$$\tilde D_i[\mathbf A,\mathcal K]=\begin{pmatrix}\tilde B_i(t)&\tilde\Gamma_i[\mathbf A,\mathcal K]\end{pmatrix}.$$

Лемма 6. *Пусть для системы ИДУ (3) выполнены условия:*

1) левый индекс определён и равен ϱ;

2) $\operatorname{rank}\Gamma_i[\mathbf{A},\mathcal{K}] = \text{const}, \quad t\in T.$

Тогда, начиная с некоторого $i=\varrho$, *справедливо равенство*

$$\tilde\Gamma_i^-[\mathbf{A},\mathcal{K}]\tilde\Gamma_i[\mathbf{A},\mathcal{K}] = \begin{pmatrix} E_n & 0\\ \tilde Z_{21}(t) & \tilde Z_{22}(t)\end{pmatrix}, \quad t\in T, \tag{15}$$

где первые n *строк матрицы* $\tilde\Gamma_\varrho^-[\mathbf{A},\mathcal{K}]$, *разбитые на* $(n\times n)$*-блоки, можно принять в качестве коэффициентов ЛРО для системы (3).*

Доказательство. Из определения 8 следует, что, умножив строки матрицы $\tilde\Gamma_i[\mathbf{A},\mathcal{K}]$ на коэффициенты ЛРО и сложив их, получим матрицу с первой блочной строкой $(\tilde A_k(t),0,\ldots,0)$. Так как имеет место неравенство $\det\tilde A_k(t)\neq 0$ для любого $t\in T$, видим, что в СЛАУ

$$\tilde\Gamma_\varrho[\mathbf{A},\mathcal{K}]Z = 0, \quad t\in T,$$

первые n компонент вектор-функции Z с необходимостью равны нулю. Из леммы 1 и условия о постоянстве ранга матрицы этой СЛАУ следует, что найдётся матрица $\tilde\Gamma_\varrho[\mathbf{A},\mathcal{K}]$ нужной нам гладкости и все решения СЛАУ описываются формулой

$$Z = \{E_{n(\varrho+1)} - \tilde\Gamma_\varrho^-[\mathbf{A},\mathcal{K}]\tilde\Gamma_\varrho[\mathbf{A},\mathcal{K}]\}u, \quad t\in T,$$

где u – произвольная вектор-функция подходящей размерности. Из этого соотношения следует справедливость равенства (15) и утверждения в целом.

Опишем самый простой класс вырожденных систем линейных ИДУ общего вида.

Теорема 3. *Пусть для системы ИДУ (3) выполнены условия:*

1) оператор Λ_k *из системы (3) удовлетворяет условиям теоремы 1 и его левый индекс равен* $l\leqslant k$;

2) $\mathcal{K}(t,s)$, $K(t,s)\in C^k(T\times T)$, $f(t)\in C^k(T)$.

Тогда:

1) в качестве ЛРО $\tilde\Omega_\varrho$ *для оператора системы ИДУ (3) можно принять оператор* Ω_l;

2) система (3) при $\lambda=0$ *разрешима и её общее решение имеет структуру вида*

$$y(t,c) = Y_d(t)c + \varphi(t), \quad t\in T,$$

где $Y_d(t) = (E_n+\mathcal{V})X_d(t)$, $\varphi(t) = (E_n+\mathcal{V})\psi(t)$, $\mathcal{V}$ *– некоторый оператор Вольтерры,* $X_d(t)$ *– матрица,* $\psi(t)$ *– вектор-функция,* c *– вектор из определения 4;*

3) система (3) разрешима при всех λ, *за исключением не более чем счётного множества значений* λ_j, $j\in\mathbb{N}$, *и её общее решение имеет структуру вида*

$$y(t,c) = Y_d(t)c + \xi(t), \quad t\in T,$$

где $Y_d(t) = (E_n+\lambda\mathbf{W})(E_n+\mathcal{V})X_d(t)$, $\xi(t) = (E_n+\lambda\mathbf{W})(E_n+\mathcal{V})\psi(t)$, $\mathbf{W}$ *– некоторый оператор Фредгольма,* $0<|\lambda_1|<|\lambda_2|<\ldots$

Доказательство. Прямое вычисление показывает, что при $l\leqslant k$ справедливо равенство $\Gamma_l[\mathbf{A}] = \tilde\Gamma_l[\mathbf{A},\mathcal{K}]$, из которого согласно лемме 4 следует справедливость утверждения 1) теоремы.

Запишем систему (3) в виде равенства

$$\Lambda_k y = -Vy - \lambda\Phi y + f : \Lambda_k y = w(t), \quad t\in T,$$

где $w(t) = -\int_\alpha^t \mathcal{K}(t,s)y(s)\,ds - \lambda\int_\alpha^\beta K(t,s)y(s)\,ds + f(t)$. Используя формулы обращения (7) и (11), с учётом условия $l\leqslant k$ запишем выражение

$$y(t,c) = X_d(t)c + \int\limits_0^t K(t,s)w(s)\,ds + C_0(t)w(t), \quad t\in T.$$

Согласно утверждениям из монографии [23] произведение операторов Вольтерры является оператором Вольтерры, произведение оператора Вольтерры и оператора Фредгольма – оператором Фредгольма. Таким образом, получено интегральное уравнение вида

$$y(t)=\int\limits_{\alpha}^{t}\mathcal{W}(t,s)y(s)\,ds+\lambda\int\limits_{\alpha}^{\beta}W(t,s)y(s)\,ds+\zeta(t), \tag{16}$$

где

$$\int\limits_{\alpha}^{t}\mathcal{W}(t,s)y(s)\,ds=\int\limits_{\alpha}^{t}\left[K(t,s)\int\limits_{\alpha}^{s}\mathcal{K}(s,\tau)y(\tau)d\tau\right]ds+\int\limits_{\alpha}^{t}C_0(t)\mathcal{K}(t,s)y(s)\,ds,$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}W(t,s)y(s)\,ds=\int\limits_{\alpha}^{t}\left[K(t,s)\int\limits_{\alpha}^{\beta}K(s,\tau)y(\tau)d\tau\right]ds+\int\limits_{\alpha}^{\beta}C_0(t)K(t,s)y(s)\,ds,$$

$$\zeta(t)=X_d(t)c+\int\limits_{\alpha}^{t}K(t,s)f(s)\,ds+C_0(t)f(t).$$

Для системы ИУ (16) при $\lambda=0$ в книге [23] приведена формула, из которой следует, что

$$y(t,c)=(E_n+\mathcal{V})\zeta=\zeta(t)+\int\limits_{\alpha}^{t}\tilde{W}(t,s)\zeta(s)\,ds, \tag{17}$$

где $\tilde{W}(t,s)$ – резольвентное ядро для системы (16), $\zeta\equiv\zeta(t)$. Из формулы (17) вытекает справедливость утверждения 2) теоремы.

Докажем утверждение 3), когда $\lambda\neq 0$. Запишем систему уравнений (17) в виде равенства

$$y(t)=\lambda(E_n+\mathcal{V})\int\limits_{\alpha}^{\beta}W(t,s)y(s)\,ds+(E_n+\mathcal{V})\zeta(t). \tag{18}$$

В силу правила умножения операторов Вольтерры и Фредгольма система уравнений (18) является системой уравнений Фредгольма второго рода. Из этого факта следует справедливость утверждения 3) теоремы. Теорема доказана.

Пример 9. Обратим внимание на следующее обстоятельство. При переходе от системы ИДУ к системе ИУ (17) мы неявно предполагаем, что в последней $y\in C^k(T)$. Действительно, предположения о гладкости входных данных гарантируют это. Но для систем ИДУ со слабой особенностью в ядре это не так. Рассмотрим систему ИДУ

$$(\Lambda_1+V)y=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{y}_1(t)\\\dot{y}_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}+\int\limits_{0}^{t}p(t,s)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(s)\\y_2(s)\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}0\\f_2(t)\end{pmatrix},$$

где $t\in T=[0,1]$, $p(t,s)=(t-s)^{-\gamma}$, $0<\gamma<1$. Индекс оператора Λ_1 равен единице и удовлетворяет условиям теоремы 3. Предположим, что $\gamma=1/2$, и продифференцируем второе уравнение по t, в результате получим

$$\dot{y}_2(t)+\frac{y_2(0)}{\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t-s}}\int\limits_{0}^{t}\dot{y}_2(s)=\dot{f}_2(t),\quad t\in T.$$

Из исходного уравнения следует, что $y_2(0) = f_2(0)$. Условия $f_2(t) \in C^1(T)$ для выполнения включений $y_1(t), y_2(t) \in C^1(T)$ здесь мало. Необходимо ещё выполнение условия $f_2(0) = 0$.

Докажем утверждения о разрешимости систем ИДУ при более общих предположениях.

Теорема 4. *Пусть для системы (3) при $\lambda = 0$ выполнены условия:*

1) $A_i(t) \in C^{2\varrho}(T)$, $i = \overline{0,k}$, $\mathcal{K}(t,s) \in C^{2\varrho}(T \times T)$, $f(t) \in C^{\varrho}(T)$;

2) существует ЛРО $\tilde{\Omega}_\varrho$ из определения 8;

3) $\operatorname{rank} D_{\varrho-1} = (\operatorname{rank} D_{\varrho-1} \mid h)$, $D_{\varrho-1} = \tilde{D}_{\varrho-1}[\mathbf{A}, \mathcal{K}]|_{t=\alpha}$, $h = \mathrm{d}_{\varrho-1}[f(t)]|_{t=\alpha}$.

Тогда:

1) система разрешима и её общее решение имеет вид

$$y(t,c) = Y_d(t)c + \xi(t), \tag{19}$$

где $Y_d(t)$ – $(n \times d)$-матрица из $C^k(T)$ со свойством $\operatorname{rank} \mathrm{d}_{k-1}[Y_d(t)]|_{t=\alpha} = d$, c – вектор произвольных постоянных,

$$\xi(t) = (\Lambda_{\varrho-k} + V)f = \sum_{j=0}^{\varrho-k} C_j(t) f^{(j)}(t) + \int\limits_\alpha^t K(t,s) f(s)\, ds, \quad \varrho \geqslant k, \quad \xi(t) = Vf, \quad k > \varrho,$$

$K(t,s)$, $C_j(t)$ – некоторые $(n \times n)$-матрицы, $t \in T$, $(t,s) \in T \times T$;

2) существует ПРО, причём правый и левый индексы системы (3) равны.

Доказательство. Условие 3) теоремы является условием Кронекера–Капелли и означает, что производные невязки, вектор-функции

$$z^{(i)}(t) = (d/dt)^i [(\Lambda_k + V)y - f], \quad t \in T, \quad i = \overline{0, \varrho-1},$$

удовлетворяют условиям $z^{(i)}(\alpha) = 0$ в силу формулы (14).

Начальная задача

$$\tilde{\Omega}_\varrho \circ (\Lambda_k + V)y = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{V})y = 0, \quad t \in T, \quad y^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = \overline{0, k-1},$$

имеет только одно решение $y \equiv y(t) = 0$, так как система

$$(\tilde{\Lambda}_k + \tilde{V})y = 0, \quad t \in T,$$

приводима к нормальной форме. Отсюда следует, что начальная задача

$$\tilde{\Omega}_\varrho z = 0, \quad t \in T, \quad z^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i = \overline{0, \varrho-1},$$

также имеет только одно решение $z \equiv z(t) = 0$.

Таким образом, исходное уравнение $(\Lambda_k + V)y = f$, $t \in T$, имеет по крайней мере одно решение при любом свободном члене $f \equiv f(t)$, удовлетворяющем условию 3) теоремы, так как $z = (\Lambda_k + V)y - f$, $t \in T$.

Далее, общее решение системы невырожденных ИДУ

$$\tilde{\Omega}_\varrho \circ (\Lambda_k + V)y = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{V})y = \tilde{\Omega}_\varrho f(t), \quad t \in T,$$

имеет вид

$$\hat{y}(t,c) = \hat{Y}(t)c + \varpi(t), \quad \varpi(t) = \int\limits_\alpha^t \Psi(t,s)[\Omega_\varrho f(s)]\, ds, \quad t \in T, \quad (t,s) \in T \times T, \tag{20}$$

где $\hat{Y}(t)$ – $(n \times kn)$-матрица из $C^k(T)$ со свойством $\det \mathrm{d}_{k-1}[\hat{Y}(t)]|_{t=\alpha} \neq 0$, c – вектор произвольных постоянных, ядро $\Psi(t,s)$ – некоторая $(n \times n)$-матрица со свойством

$$\partial^j \Psi(t,s)/\partial t^j|_{t=s} \equiv 0, \quad t \in T, \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{21}$$

Если подставить сумму (20) в исходную систему, то получим систему алгебраических уравнений $M(t)c = m(t)$, где $M(t) = (\Lambda_k + V)\hat{Z}(t)$, $m(t) = f(t) - (\Lambda_k + V)\varpi(t)$, и согласно лемме 1 все её решения представимы в виде соотношения

$$c = \mathcal{C}^{-}\theta + (E_{kn} - \mathcal{C}^{-}\mathcal{C})\upsilon \quad \text{для любого} \quad \upsilon \in \mathbb{R}^{kn},$$

$$\mathcal{C} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} M^{\mathrm{T}}(s)M(s)\,ds, \quad \theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} M^{\mathrm{T}}(s)m(s)\,ds. \tag{22}$$

Подставив выражение для c из формулы (22) в формулу (20) и проинтегрировав по частям с учётом формул (21) выражение для вектор-функции $\varpi(t)$, получим доказательство утверждения 1) теоремы. Методы доказательства утверждения 2) теоремы можно найти в монографии [5, леммы 4.1–4.3]. Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть в условии 3) теоремы 4* $\operatorname{rank} D_{\varrho-1} = \varrho n$.

Тогда система (3) разрешима при всех λ, *за исключением не более чем счётного множества значений* λ_j, $j \in \mathbb{N}$, *и её общее решение имеет структуру вида*

$$y(t,c) = (E_n + \lambda\mathbf{W}_0)Y_d(t)c + (E_n + \lambda\mathbf{W}_0)\xi(t), \quad t \in T,$$

где $\mathbf{W}_0$ *– некоторый оператор Фредгольма.*

Доказательство. Запишем систему (3) в виде равенства

$$(\Lambda_k + V)y = -\lambda\Phi y + f, \quad t \in T. \tag{23}$$

Ранговое условие гарантирует разрешимость системы ИДУ

$$(\Lambda_k + V)y = w, \quad t \in T,$$

при любой заданной достаточно гладкой вектор-функции $w \equiv w(t)$. Используя формулы обращения (19), для системы (23) запишем выражение

$$y = Y_d(t)c + \xi(t) + \lambda(\Lambda_{\varrho-k} - V)\Phi y, \quad t \in T. \tag{24}$$

Подробно проделав выкладки, убеждаемся, что система (24) является системой ИУ Фредгольма второго рода. Разрешая систему, убеждаемся в справедливости следствия.

Для начальной задачи (3), (4) при $\lambda = 0$ можно сформулировать и доказать утверждение о совместности, аналогичное лемме 5. При $\lambda \neq 0$ возникают трудности, отмеченные в замечании 2 и не преодолённые до сих пор. Приведём очевидное утверждение.

Лемма 7. *Начальная задача (3), (4) в условиях следствия 4 разрешима тогда и только тогда, когда разрешима СЛАУ*

$$\hat{Y}_{k-1}(\alpha)c = a_y - \hat{\xi}_{k-1}(\alpha),$$

где $\hat{Y}_{k-1}(t) = P_y \mathrm{d}_{k-1}[(E_n + \lambda\mathbf{W}_0)Y_d(t)]$, $\hat{\xi}_{k-1}(t) = P_y \mathrm{d}_{k-1}[(E_n + \lambda\mathbf{W}_0)\xi(t)]$, *относительно вектора* c. *Если решение* c *одно, то решение начальной задачи единственно.*

Замечание 7. Обратим внимание, что в условиях теоремы 4 левый обратный оператор $\Lambda_{\varrho-k} + V$ к оператору системы (3) $\Lambda_k + V$ является ИДО с вырожденной матрицей при старших производных. Но пока нет утверждений об обратимости утверждения 1) теоремы 4 (аналога теоремы 1).

Таким образом, условие $\operatorname{rank} D_{\varrho-1} = \varrho n$ гарантирует, что система ИДУ (3) не содержит подсистем вида

$$\int\limits_{\alpha}^{t} \mathcal{K}_1(t,s)y_1(s)\,ds + \lambda\int\limits_{\alpha}^{\beta} K_1(t,s)y_1(s)\,ds = f_1(t), \quad t \in T,$$

где $\mathcal{K}_1(t,s)$, $K_1(t,s)$ – некоторые матрицы (в общем случае прямоугольные), $y_1(t)$, $f_1(t)$ – линейные комбинации компонент вектор-функций $y(t)$ и $f(t)$ соответственно.

Пример 10. Рассмотрим два модельных ИУ

$$\int\limits_0^t y(s)\,ds + \lambda\int\limits_0^1 y(s)\,ds = f(t), \quad \int\limits_0^t w(s)\,ds + \lambda\int\limits_0^1 tw(s)\,ds = f(t), \quad t \in T = [0,1]. \tag{25}$$

При $t=0$ имеем необходимые условия совместности

$$\lambda\int\limits_0^1 y(s)\,ds = f(0), \quad f(0)=0.$$

Дифференцируя ИУ (25) по t, получаем

$$y(t) = \dot f(t), \quad w(t) + \lambda\int\limits_0^1 w(s)\,ds = \dot f(t), \quad t \in T.$$

Разберём до конца случай с решением $y(t)$. Подставив $y(t) = \dot f(t)$ в условие совместности, получим равенства

$$\lambda\int\limits_0^1 \dot f(s)\,ds = \lambda[f(1)-f(0)] = f(0).$$

Итак, первое ИУ (25) разрешимо тогда и только тогда, когда $(1+\lambda)f(0) - \lambda f(1) = 0$. При $\lambda = 0$ это стандартное условие разрешимости уравнения

$$\int\limits_0^t y(s)\,ds = f(t), \quad t \in T.$$

Выкладки показали, что в случае общих систем ИДУ (3) условия на $f(t)$ могут быть сложнее, чем условие 3) теоремы 4.

Полный анализ второго уравнения предоставляем провести читателю. Обращаем внимание, что пример имеет ненулевые характеристические числа.

Заключение. Отметим, что содержание статьи является подготовительным материалом для построения численных методов решения начальных задач вида (3), (4) на основе метода наименьших квадратов или родственного ему метода нормальных сплайнов [16, 24]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках госзадания по проекту “Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями” (№ гос. регистрации 121041300060-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: a Projector Based Analysis. Berlin, 2013.
2. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск, 1996.
3. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск, 2006.
4. *Белов А.А.* Дескрипторные системы и задачи управления. М., 2015.

5. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. Новосибирск, 1998.
6. *Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. Новосибирск, 1989.
7. *Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.* Линейные дифференциально-алгебраические уравнения с возмущениями в виде интегральных операторов Вольтерры // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1309–1320.
8. *Свиридюк Г.А., Загребина С.А.* Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 3. № 2. С. 104–125.
9. *Бояринцев Ю.Е., Корсуков В.М.* Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вопросы прикладной математики. Иркутск, 1975. С. 140–152.
10. Алгебро-дифференциальные системы и методы их решения / Под. ред. О.В. Васильева. Новосибирск, 1993.
11. *Булатов М.В.* Об интегро-дифференциальных системах с вырожденной матрицей перед производной // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 692–697.
12. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.
13. *Чистякова Е.В.* О свойствах разностных схем для вырожденных интегро-дифференциальных уравнений индекса 1 // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2009. Т. 49. № 9. С. 1579–1588.
14. *Чистякова Е.В.* Дифференциально-алгебраические уравнения с малым нелинейным членом // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 9. С. 1365–1368.
15. *Chistyakov V.F., Chistyakova E.V.* On some properties of the Fredholm-type integral algebraic equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. Special Issue on Integral Equations and their Applications. 2020. https://doi.org/10.1002/mma.6747.
16. *Chistyakova E.V., Chistyakov V.F.* Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // Appl. Numer. Math. 2020. V. 149. P. 43–51.
17. *Bulatov M.V., Lima P., Weinmuller E.* Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations // Central Eur. J. of Math. 2014. V. 12. № 2. P. 308–321.
18. *Brunner H.* Volterra Integral Equations: an Introduction to Theory and Applications. Cambridge, 2017.
19. *Liang H., Brunner H.* The convergence of collocation solutions in continuous piecewise polynomial spaces for weakly singular Volterra integral equations // SIAM J. Numer. Anal. 2019. V. 57. P. 1875–1896.
20. *Liang H., Brunner H.* Collocation methods for integro-differential algebraic equations with index 1 // IMA J. of Numer. Anal. 2020. V. 39. P. 850–885.
21. *Чистяков В.Ф.* О нетеровом индексе линейных алгебро-дифференциальных систем // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34. № 3. С. 209–221.
22. *Щеглова А.А.* Исследование и решение вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью замен переменных // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36. № 6. С. 1435–1445.
23. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М., 1975.
24. *Горбунов В.К.* Метод нормальной сплайн-коллокации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 2. С. 212–224.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 09.11.2021 г.
После доработки 07.11.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.