

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.25

## ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЭНТРОПИЙНЫХ И РЕНОРМАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЗИЛАКА–ОРЛИЧА

© 2023 г. Л. М. Кожевникова, А. П. Кашникова

Рассматриваются эллиптические уравнения второго порядка с нелинейностями, определяемыми функциями Музилака–Орлича, и правой частью из пространства  $L_1(\Omega)$ . В пространствах Музилака–Орлича–Соболева устанавливаются некоторые свойства и единственность как энтропийных, так и ренормализованных решений задачи Дирихле в областях с липшицевой границей. Кроме того, доказывается эквивалентность и знакоопределённость энтропийных и ренормализованных решений.

DOI: 10.31857/S0374064123010053, EDN: OVBGXN

**Введение.** В работе рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) + b(\mathbf{x}, u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

в строго липшицевой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ,  $n \geq 2$ , с конечной мерой. Здесь функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = (a_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \dots, a_n(\mathbf{x}, \mathbf{s})) : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеют рост, определяемый обобщённой  $N$ -функцией  $M(\mathbf{x}, z)$ .

Понятие ренормализованных и энтропийных решений служит основным инструментом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с правой частью в виде меры и, в частности, из пространства  $L_1(\Omega)$ . Для уравнения вида

$$-\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) = \mu, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

с ограниченной мерой  $\mu$  в работе [1] И. Хлебицка в рефлексивном пространстве Музилака–Орлича доказала существование ренормализованного решения задачи Дирихле, а также единственность ренормализованного решения уравнения (3) с диффузной мерой  $\mu$ .

Если функция Музилака–Орлича  $M$  не удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то соответствующее пространство Музилака–Орлича не является рефлексивным, и рассматриваемая задача значительно усложняется. Обычно, если ограничений на рост обобщённой  $N$ -функции  $M(\mathbf{x}, z)$  не требуется, то предполагается, что она подчиняется условию  $\log$ -гёльдеровской непрерывности по переменной  $\mathbf{x} \in \Omega$ , что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам пространства Музилака–Орлича.

Существование ренормализованного решения задачи (3), (2) с  $\mu \in L_1(\Omega)$  и с неоднородной анизотропной функцией Музилака–Орлича доказано в работе [2], а в статье [3] – существование и единственность ренормализованных решений эллиптических включений с многозначным оператором в условиях нереклексивных и несепарабельных пространств Музилака–Орлича.

В работах [4] и [5] установлено существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, u, \nabla u) + \mathbf{c}(u)) + a_0(\mathbf{x}, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

с функцией  $\mathbf{c} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ .

Существование энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}, u, \nabla u) + \mathbf{c}(\mathbf{x}, u)) + a_0(\mathbf{x}, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

с каратеодориевой функцией  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , подчиняющейся условию роста по переменной  $s_0$ , доказано в работах [6, 7] при  $a_0 \equiv 0$  и в [8].

В работе [9] в пространствах Музилака–Орлича доказаны существование и единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи (3), (2) с  $\mu \in L_1(\Omega)$ , установлена их эквивалентность.

В настоящей статье получены некоторые свойства и доказана единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле (1), (2) в нереклексивных пространствах Музилака–Орлича в строго липшицевых областях  $\Omega$  с конечной мерой. Кроме того, доказана эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений рассматриваемой задачи. Ранее в работе [10] в произвольных областях установлен аналогичный результат в анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями ( $M(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^n |s_i|^{p_i(\mathbf{x})}$ ,  $p_i \in (1, \infty)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ).

**1. Пространства Музилака–Орлича–Соболева.** В этом пункте приведём необходимые сведения из теории обобщённых  $N$ -функций и пространств Музилака–Орлича (см. [11, гл. 1; 12, 13]).

**Определение 1.** Пусть функция  $M(\mathbf{x}, z) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  удовлетворяет следующим условиям:

1)  $M(\mathbf{x}, \cdot)$  –  $N$ -функция по  $z \in \mathbb{R}$ , т.е. она является выпуклой вниз, возрастающей при  $z \in \mathbb{R}_+$ , чётной, непрерывной,  $M(\mathbf{x}, 0) = 0$  для п.в.  $\mathbf{x} \in \Omega$ , и выполняются соотношения

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} M(\mathbf{x}, z) > 0 \quad \text{для всех } z \neq 0,$$

$$\limsup_{z \rightarrow 0} \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} M(\mathbf{x}, z)/z = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} M(\mathbf{x}, z)/z = \infty;$$

2)  $M(\cdot, z)$  – измеримая функция по  $\mathbf{x} \in \Omega$  для любых  $z \in \mathbb{R}$ .

Такая функция  $M(\mathbf{x}, z)$  называется *функцией Музилака–Орлича* или *обобщённой  $N$ -функцией*.

Сопряжённая функция  $\overline{M}(\mathbf{x}, \cdot)$  к функции Музилака–Орлича  $M(\mathbf{x}, \cdot)$  в смысле Юнга для п.в.  $\mathbf{x} \in \Omega$  и любых  $z \geq 0$  определяется равенством

$$\overline{M}(\mathbf{x}, z) = \sup_{y \geq 0} (yz - M(\mathbf{x}, y)).$$

Отсюда следует неравенство Юнга

$$|zy| \leq M(\mathbf{x}, z) + \overline{M}(\mathbf{x}, y), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Функция Музилака–Орлича  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, если существуют константы  $c > 0$ ,  $z_0 \geq 0$  и функция  $H \in L_1(\Omega)$  такие, что для п.в.  $\mathbf{x} \in \Omega$  и любых  $|z| \geq z_0$  справедливо неравенство

$$M(\mathbf{x}, 2z) \leq cM(\mathbf{x}, z) + H(\mathbf{x}).$$

$\Delta_2$ -условие эквивалентно выполнению для п.в.  $\mathbf{x} \in \Omega$  и любых  $|z| \geq z_0$  неравенства

$$M(\mathbf{x}, lz) \leq c(l)M(\mathbf{x}, z) + H_l(\mathbf{x}), \quad H_l \in L_1(\Omega),$$

где  $l$  – любая константа больше единицы,  $c(l) > 0$ .

В настоящей работе не предполагается, что  $N$ -функции  $M(\mathbf{x}, z)$ ,  $\overline{M}(\mathbf{x}, z)$  удовлетворяют  $\Delta_2$ -условию.

Существуют три класса пространств Музилака–Орлича:

1)  $\mathcal{L}_M(\Omega)$  – обобщённый класс Музилака–Орлича, состоящий из измеримых функций  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что

$$\varrho_{M,\Omega}(v) = \int_{\Omega} M(\mathbf{x}, v(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} < \infty;$$

2)  $L_M(\Omega)$  – обобщённое пространство Музилака–Орлича, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс  $\mathcal{L}_M(\Omega)$ , с нормой Люксембурга

$$\|u\|_{M,\Omega} = \inf\{\lambda > 0 : \varrho_{M,\Omega}(v/\lambda) \leq 1\};$$

3)  $E_M(\Omega)$  – замыкание по норме  $\|u\|_{M,\Omega}$  ограниченных измеримых функций с компактным носителем в  $\overline{\Omega}$ . Справедливы вложения  $E_M(\Omega) \subset \mathcal{L}_M(\Omega) \subset L_M(\Omega)$ . Ниже в обозначениях  $\|\cdot\|_{M,Q}$ ,  $\varrho_{M,Q}(\cdot)$ ,  $\|\cdot\|_{1,Q}$  будем опускать индекс  $Q$ , если  $Q = \Omega$ .

Далее будем рассматривать следующие условия на функцию Музилака–Орлича  $M(\mathbf{x}, z)$ .

**Условие (M1, loc).** Функция  $M(\mathbf{x}, z)$  локально интегрируема, т.е.

$$\varrho_{M,Q}(z) = \int_Q M(\mathbf{x}, z) \, d\mathbf{x} < \infty \quad \text{для любого } z \in \mathbb{R}$$

и для любого измеримого множества  $Q \subset \Omega$  такого, что  $\text{meas } Q < \infty$ .

**Условие (M2).** Функция  $M(\mathbf{x}, z)$  удовлетворяет условию  $\phi$ -регулярности, т.е. существует функция  $\phi : [0, 1/2] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что  $\phi(\cdot, z)$  и  $\phi(r, \cdot)$  – неубывающие функции и для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{\Omega}$ ,  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 1/2$ ,  $z \in \mathbb{R}_+$  и некоторой константы  $c > 0$  выполняется

$$M(\mathbf{x}, z) \leq \phi(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, z)M(\mathbf{y}, z), \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(\varepsilon, c\varepsilon^{-n}) < \infty.$$

Пусть  $M$  и  $\overline{M}$  подчиняются условию (M1, loc), тогда пространство  $E_M(\Omega)$  – сепарабельное и  $(E_M(\Omega))^* = L_{\overline{M}}(\Omega)$ . Если дополнительно  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то  $E_M(\Omega) = \mathcal{L}_M(\Omega) = L_M(\Omega)$  и  $L_M(\Omega)$  – сепарабельное. Пространство  $L_M(\Omega)$  рефлексивное тогда и только тогда, когда функции Музилака–Орлича  $M$  и  $\overline{M}$  удовлетворяют  $\Delta_2$ -условию.

Последовательность функций  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in L_M(\Omega)$  модулярно сходится к  $v \in L_M(\Omega)$  (будем обозначать  $v^j \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{M} v$ ), если существует константа  $\lambda > 0$  такая, что имеет место равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M\left(\frac{v^j - v}{\lambda}\right) = 0.$$

Если  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Для двух сопряжённых функций Музилака–Орлича  $M$  и  $\overline{M}$ , если  $u \in L_M(\Omega)$  и  $v \in L_{\overline{M}}(\Omega)$ , выполняется неравенство Гёльдера

$$\left| \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq 2\|u\|_M \|v\|_{\overline{M}}.$$

Определим пространство Музилака–Орлича–Соболева

$$W^1 L_M(\Omega) = \{v \in L_M(\Omega) : |\nabla v| \in L_M(\Omega)\}$$

с нормой

$$\|v\|_M^1 = \|v\|_M + \|\nabla v\|_M.$$

Последовательность функций  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in W^1 L_M(\Omega)$  модулярно сходится к  $v \in W^1 L_M(\Omega)$ , если существует константа  $\lambda > 0$  такая, что справедливы равенства

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M \left( \frac{v^j - v}{\lambda} \right) = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M \left( \frac{|\nabla v^j - \nabla v|}{\lambda} \right) = 0.$$

Пространство  $\dot{W}^1 L_M(\Omega)$  определим как замыкание пространства  $C_0^\infty(\Omega)$  по слабой топологии  $\sigma((L_M)^{n+1}, (E_{\overline{M}})^{n+1})$  в  $W^1 L_M(\Omega)$ . Пространство  $\dot{W}^1 L_M(\Omega)$  банахово (см. [12, теорема 10.2]).

**Определение 2.** Область  $\Omega$  подчиняется сегментному свойству, если существует конечное открытое покрытие  $\{\Theta_i\}_{i=1}^k$  множества  $\overline{\Omega}$  и соответствующие ненулевые векторы  $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^n$  такие, что  $(\overline{\Omega} \cap \Theta_i) + t\mathbf{z}_i \subset \Omega$  для любых  $t \in (0, 1)$  и  $i = \overline{1, k}$ .

Сформулируем теорему о плотности гладких функций в пространстве Музилака–Орлича–Соболева (см. [14, теорема 3]).

**Лемма 1.** Предположим, что область  $\Omega$  удовлетворяет сегментному свойству, а обобщённая  $N$ -функция  $M$  удовлетворяет условиям  $(M1, loc)$ ,  $(M2)$ , и пусть  $\overline{M}$  удовлетворяет условию  $(M1, loc)$ . Тогда для любого  $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$  существует последовательность функций  $\xi^j \in C_0^\infty(\Omega)$  такая, что  $\xi^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} v$  модулярно в  $\dot{W}^1 L_M(\Omega)$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

Примеры функций Музилака–Орлича  $M$ , удовлетворяющих условиям леммы 1, приведены в работе [14].

1. Если  $N$ -функция  $M(\mathbf{x}, z) = M(z)$  не зависит от  $\mathbf{x}$ , то удовлетворяет условию  $(M2)$  с  $\phi(r, z) = 1$ .

2. Функция  $M(\mathbf{x}, z) = |z|^{p(\mathbf{x})}$ ,  $p : \Omega \rightarrow [p^-, p^+]$ ,  $p^- = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} p(\mathbf{x}) > 1$ ,  $p^+ = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} p(\mathbf{x}) < \infty$ ,

удовлетворяет условию  $(M2)$  с функцией  $\phi(r, z) = \max\{z^{\sigma(r)}, z^{-\sigma(r)}\}$ , где  $\sigma : (0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sigma(\varepsilon) = 0$ , – модуль непрерывности функции  $p$ . Для  $\sigma(r) = -c/\log r$ ,  $0 < r \leq 1/2$ , получаем стандартное условие лог-гёльдеровой непрерывности.

3.  $N$ -функция  $M(\mathbf{x}, z) = |z|^p + a(\mathbf{x})|z|^q$ ,  $1 \leq p < q$ , с неотрицательной функцией  $a \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , удовлетворяет условию  $(M2)$  с  $\phi(r, z) = C_\alpha r^\alpha |z|^{q-p} + 1$ ,  $q \leq p + \alpha/n$ .

**2. Предположения и формулировка результатов.** Предполагается, что функции

$$b(\mathbf{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

входящие в уравнение (1), измеримы по  $\mathbf{x} \in \Omega$  для  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ , непрерывны по  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  для почти всех  $\mathbf{x} \in \Omega$ , и выполнено

**Условие (M).** Существует положительная константа  $\bar{a} \in (0, 1)$  такая, что для п.в.  $\mathbf{x} \in \Omega$  и для любых  $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{s} \neq \mathbf{t}$ , справедливы неравенства

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s} \geq \bar{a}(M(\mathbf{x}, |\mathbf{s}|) + \overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{a}|)), \tag{5}$$

$$(\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{t})) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{t}) > 0. \tag{6}$$

Здесь функция Музилака–Орлича  $M(\mathbf{x}, z)$  подчиняется условиям  $(M1, loc)$ ,  $(M2)$ , сопряжённая к  $M$  функция  $\overline{M}(\mathbf{x}, z)$  удовлетворяет условию  $(M1, loc)$ ,  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = \sum_{i=1}^n s_i t_i$ ,  $|\mathbf{s}| = (\sum_{i=1}^n s_i^2)^{1/2}$ .

Предполагается, что функция  $b(\mathbf{x}, s_0)$  – неубывающая по  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $b(\mathbf{x}, 0) = 0$  для п.в.  $\mathbf{x} \in \Omega$ , поэтому для п.в.  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $s_0 \in \mathbb{R}$  справедливо неравенство

$$b(\mathbf{x}, s_0)s_0 \geq 0. \tag{7}$$

Сформулируем дополнительное условие, которое используется в теореме существования. Будем считать, что для любого  $k > 0$  имеет место равенство

$$\sup_{|s_0| \leq k} |b(\mathbf{x}, s_0)| = \Phi_k(\mathbf{x}) \in L_1(\Omega). \tag{8}$$

Условию (M) удовлетворяют, например, функции

$$a_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = M(\mathbf{x}, |\mathbf{s}|) \frac{s_i}{|\mathbf{s}|^2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Определим срезающую функцию  $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$ . Через  $\mathring{T}_M^1(\Omega)$  обозначим множество измеримых функций  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что  $T_k(u) \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$  при любом  $k > 0$ . Для  $u \in \mathring{T}_M^1(\Omega)$  и любого  $k > 0$  имеем

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega: |u| < k\}} \nabla u \in (L_M(\Omega))^n. \tag{9}$$

Введём обозначение  $\langle u \rangle = \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x}$ .

**Определение 3.** Энтропийным решением задачи (1), (2) называется функция  $u \in \mathring{T}_M^1(\Omega)$  такая, что:

- 1)  $b(\mathbf{x}, u) \in L_1(\Omega)$ ;
- 2)  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \chi_{\{\Omega: |u| < k\}} \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$  при всех  $k > 0$ ;
- 3) при всех  $k > 0$  и  $v \in C_0^1(\Omega)$  справедливо неравенство

$$\langle (b(\mathbf{x}, u) - f)T_k(u - v) \rangle + \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - v) \rangle \leq 0. \tag{10}$$

**Определение 4.** Ренормализованным решением задачи (1), (2) называется функция  $u \in \mathring{T}_M^1(\Omega)$  такая, что:

- 1)  $b(\mathbf{x}, u) \in L_1(\Omega)$ ;
- 2)  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \chi_{\{\Omega: |u| < k\}} \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$  при всех  $k > 0$ ;
- 3) выполнено равенство

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\{\Omega: h \leq |u| < h+1\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} = 0;$$

4) для любой функции  $S \in W_{\infty}^1(\mathbb{R})$  с компактным носителем и любой функции  $v \in C_0^1(\Omega)$  справедливо равенство

$$\langle (b(\mathbf{x}, u) - f)S(u)v \rangle + \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot (S'(u)v \nabla u + S(u) \nabla v) \rangle = 0. \tag{11}$$

В теоремах 1–6 предполагается, что область  $\Omega$  строго липшицева и выполнено условие (M).

**Теорема 1.** Пусть дополнительно выполнено условие (8), тогда существует энтропийное решение задачи (1), (2).

Доказательство теоремы 1 следует из работы [5, теорема 5.1]. Основными результатами настоящей работы являются теоремы 2–6.

**Теорема 2.** Пусть дополнительно выполнено условие (8), тогда энтропийное решение, построенное в теореме 1, является ренормализованным решением задачи (1), (2).

**Теорема 3.** Пусть  $f(\mathbf{x}) \geq 0$  для п.в.  $\mathbf{x} \in \Omega$ , тогда энтропийное решение задачи (1), (2)  $u \geq 0$  для п.в.  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

**Теорема 4.** Пусть  $u^1, u^2$  – энтропийные решения задачи (1), (2), тогда  $u^1 = u^2$  п.в. в  $\Omega$ .

**Теорема 5.** Пусть  $u^1, u^2$  – ренормализованные решения задачи (1), (2), тогда  $u^1 = u^2$  п.в. в  $\Omega$ .

Следует отметить, что теоремы 3–5 по сути являются обобщением соответствующих результатов работы [9] для уравнения (3) на уравнение вида (1). Однако доказательство теоремы 5 существенно проще за счёт соотношения, которое будет установлено для ренормализованного решения задачи (1), (2) в лемме 7.

**Теорема 6.** Пусть дополнительно выполнено условие (8), тогда энтропийное и ренормализованное решения задачи (1), (2) эквивалентны.

Согласно единственности энтропийного решения (теорема 4) из теоремы 2 следует, что энтропийное решение является ренормализованным решением задачи (1), (2). Тогда, ввиду

единственности ренормализованного решения задачи (1), (2) (теорема 5), справедливо утверждение теоремы 6.

**3. Подготовительные сведения.** В этом пункте установим некоторые свойства энтропийного и ренормализованного решений задачи (1), (2) и приведём вспомогательные леммы. Предполагается, что область  $\Omega$  строго липшицева и выполнено условие  $(M)$ . Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Приведём теорему Витали в следующей форме (см. [15, гл. 3, § 6, теорема 15]).

**Лемма 2.** Пусть последовательность  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L_1(\Omega)$  и  $v^j \rightarrow v$  п.в. в  $\Omega$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Тогда для сходимости  $v^j \rightarrow v$  сильно в  $L_1(\Omega)$ ,  $j \rightarrow \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие равномерной интегрируемости

$$\lim_{\text{meas}(Q) \rightarrow 0} \int_Q |v^j(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = 0 \quad \text{равномерно по } j \in \mathbb{N}.$$

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия леммы 1, область  $\Omega$  строго липшицева, функция  $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ , тогда  $v \in \dot{W}_1^1(\Omega)$ .

**Доказательство.** Согласно лемме 1 для функции  $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$  существует последовательность  $\{\xi^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$  такая, что найдётся число  $\lambda > 0$ , при котором

$$\int_\Omega M(\mathbf{x}, |v - \xi^j|/\lambda) d\mathbf{x} \rightarrow 0, \quad \int_\Omega M(\mathbf{x}, |\nabla(v - \xi^j)|/\lambda) d\mathbf{x} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Из сходимости (12), ввиду существования функции  $M^{-1}(\mathbf{x}, \cdot)$ , непрерывной обратной к функции  $M(\mathbf{x}, \cdot)$  по  $z \geq 0$ , следует сходимость по некоторой подпоследовательности

$$\xi^j \rightarrow v, \quad \nabla \xi^j \rightarrow \nabla v \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Кроме того, по лемме 2 имеем, что

$$\{M(\mathbf{x}, |v - \xi^j|/\lambda)\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad \{M(\mathbf{x}, |\nabla(v - \xi^j)|/\lambda)\}_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{равномерно интегрируемы в } L_1(\Omega). \quad (14)$$

Из определения  $N$ -функции заключаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует константа  $C_\varepsilon > 0$  такая, что для любых  $z \in \mathbb{R}$  и п.в.  $\mathbf{x} \in \Omega$  справедливо неравенство

$$|z| \leq \varepsilon M(\mathbf{x}, z) + C_\varepsilon. \quad (15)$$

Тогда для любого измеримого множества  $Q \subset \Omega$  имеем

$$\int_Q |v - \xi^j| d\mathbf{x} \leq \lambda \int_Q M(\mathbf{x}, |v - \xi^j|/\lambda) d\mathbf{x} + C_1 \text{meas}(Q), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, ввиду (14), следует, что  $\{v - \xi^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  равномерно интегрируема в  $L_1(\Omega)$ .

Тогда, применяя сходимость (13), по лемме 2 устанавливаем сходимость

$$\xi^j \rightarrow v \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad j \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Аналогично устанавливается сходимость

$$\nabla \xi^j \rightarrow \nabla v \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad j \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Применив неравенство (2.37) из [16, гл. 2, § 2] для функций  $v - \xi^j \in W_1^1(\Omega)$ , получаем

$$\|\tilde{v}\|_{1, \partial\Omega} \leq C_2 \|v - \xi^j\|_{1, \Omega}^1, \quad j \in \mathbb{N},$$

где  $\tilde{v}$  – след функции  $v|_{\partial\Omega}$ . Ввиду сходимостей (16) и (17) устанавливаем, что  $\|\tilde{v}\|_{1,\partial\Omega} = 0$ , следовательно,  $v = 0$  п.в. на  $\partial\Omega$ . Таким образом, доказано, что  $v \in \dot{W}_1^1(\Omega)$ .

**Замечание.** Пользуясь выпуклостью функции  $M(\mathbf{x}, \cdot)$  и принадлежностью  $v \in L_M(\Omega)$ , несложно установить эквивалентность условия (14) условию

$$\{M(\mathbf{x}, |\xi^j|/\lambda_1)\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad \{M(\mathbf{x}, |\nabla \xi^j|/\lambda_1)\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ равномерно интегрируемы в } L_1(\Omega) \quad (18)$$

с некоторым  $\lambda_1 > 0$ .

Следствием теоремы Витали является

**Лемма 4.** Пусть  $v^j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $v \in L_M(\Omega)$  и  $v^j \xrightarrow{M} v$  модулярно в  $L_M(\Omega)$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Тогда  $v^j \rightarrow v$  в топологии  $\sigma(L_M, L_{\overline{M}})$  пространства  $L_M(\Omega)$  (см. [14, лемма 2]).

Следствием теоремы Витали является теорема Лебега.

**Лемма 5.** Пусть  $g^j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $g$  – функции из пространства  $L_1(\Omega)$  такие, что  $g^j \rightarrow g$  сильно в  $L_1(\Omega)$ ,  $j \rightarrow \infty$ , и пусть  $v^j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $v$  – измеримые функции в  $\Omega$  такие, что:

- 1)  $v^j \rightarrow v$  п.в. в  $\Omega$ ,  $j \rightarrow \infty$ ;
- 2)  $|v^j| \leq |g^j|$ ,  $j \in \mathbb{N}$  п.в. в  $\Omega$ .

Тогда  $v^j \rightarrow v$  сильно в  $L_1(\Omega)$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

**Лемма 6.** Пусть функции  $v^j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $v \in L_\infty(\Omega)$  такие, что  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ограничена в  $L_\infty(\Omega)$  и  $v^j \rightarrow v$  п.в. в  $\Omega$ ,  $j \rightarrow \infty$ , тогда  $v^j \rightarrow v$ ,  $j \rightarrow \infty$ , в топологии  $\sigma(L_\infty, L_1)$  пространства  $L_\infty(\Omega)$ .

Если, кроме того,  $g$  из  $L_M(\Omega)$  ( $E_M(\Omega)$ ), то  $v^j g \rightarrow v g$  модулярно (сильно) в  $L_M(\Omega)$  ( $E_M(\Omega)$ ),  $j \rightarrow \infty$ .

Доказательство леммы 6 следует из теоремы Лебега.

**Лемма 7.** Пусть  $u$  – энтропийное решение задачи (1), (2), тогда

$$\text{meas} \{ \Omega : |u| \geq k \} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Кроме того,

$$(M(\mathbf{x}, |\nabla u|) + \overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u)|)) \chi_{\{|u| < k\}} \in L_1(\Omega) \quad \text{для любого } k > 0 \quad (20)$$

и справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_{\{|u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} = 0. \quad (21)$$

**Доказательство.** Неравенство (10) при  $v = 0$  принимает вид

$$I = \int_{\Omega} b(\mathbf{x}, u) T_k(u) \, d\mathbf{x} + \int_{\{|u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} f T_k(u) \, d\mathbf{x}.$$

С учётом неравенства (7) устанавливаем оценку

$$\int_{\{|u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} |f| |T_k(u)| \, d\mathbf{x} \leq k \|f\|_1. \quad (22)$$

В силу (5) имеем

$$\bar{a} \int_{\{|u| < k\}} (M(\mathbf{x}, |\nabla u|) + \overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{a}(\mathbf{x}, |\nabla u|)|)) \, d\mathbf{x} \leq k C_1. \quad (23)$$

Из соотношения (23), применив неравенство (15), устанавливаем (19) (см. [9, предложение 3.1]).

Запишем неравенство (22) в виде

$$\frac{1}{k} \int_{\{\Omega: |u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} |f| \frac{|T_k(u)|}{k} \, d\mathbf{x}. \quad (24)$$

Поскольку  $|T_k(u)|/k \leq 1$ ,  $T_k(u)/k \rightarrow 0$  п.в. в  $\Omega$  при  $k \rightarrow \infty$ , и  $f \in L_1(\Omega)$ , то по теореме Лебега имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f| \frac{|T_k(u)|}{k} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (25)$$

Из (24) и (25) выводим (21).

**Лемма 8.** Если  $u$  является энтропийным решением задачи (1), (2), то неравенство (10) справедливо для любой функции  $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ .

**Доказательство.** Согласно лемме 1 для функции  $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$  существует последовательность  $\{\xi^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_0^{\infty}(\Omega)$  такая, что для некоторого  $\lambda > 0$  выполнено (12). Тогда, согласно лемме 3 и замечанию, справедливы соотношения (13), (18).

Рассмотрим нечётную неубывающую функцию  $T \in C^{\infty}(\mathbb{R})$  такую, что  $T(z) = z$  для  $|z| \leq \|v\|_{\infty}$ ,  $|T(z)| = K > 0$  для  $|z| \geq z_0 > \|v\|_{\infty}$ . Обозначим  $\max_{[-z_0, z_0]} T'(z) = K_1 > 0$ .

Применив сходимость (13), для ограниченной последовательности  $\{T(\xi^j)\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_0^{\infty}(\Omega)$  установим сходимость

$$T(\xi^j) \rightarrow T(v) = v, \quad \nabla T(\xi^j) = T'(\xi^j) \nabla \xi^j \rightarrow T'(v) \nabla v = \nabla v \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Тогда для любого  $k > 0$  имеют место сходимости

$$T_k(u - T(\xi^j)) \rightarrow T_k(u - v), \quad \nabla T_k(u - T(\xi^j)) \rightarrow \nabla T_k(u - v) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Пусть  $\widehat{k} = k + K$ , тогда справедлива оценка

$$|\nabla T_k(u - T(\xi^j))| \leq |\nabla T_{\widehat{k}}(u)| + |\nabla T(\xi^j)|, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Поскольку  $\nabla T_{\widehat{k}}(u) \in (L_M(\Omega))^n$ , то найдётся число  $\mu > 0$  такое, что

$$\int_{\Omega} M(\mathbf{x}, |\nabla T_{\widehat{k}}(u)|/\mu) \, d\mathbf{x} < \infty. \quad (29)$$

Применяя (28) и учитывая выпуклость функции  $M(\mathbf{x}, \cdot)$ , получаем неравенства

$$\begin{aligned} M\left(\mathbf{x}, \frac{|\nabla T_k(u - T(\xi^j))|}{2(\lambda_1 K_1 + \mu)}\right) d\mathbf{x} &\leq \frac{1}{2} M\left(\mathbf{x}, \frac{|\nabla T_{\widehat{k}}(u)|}{\lambda_1 K_1 + \mu}\right) + \frac{1}{2} M\left(\mathbf{x}, \frac{|T'(\xi^j) \nabla \xi^j|}{\lambda_1 K_1 + \mu}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} M\left(\mathbf{x}, \frac{|\nabla T_{\widehat{k}}(u)|}{\mu}\right) + \frac{1}{2} M\left(\mathbf{x}, \frac{|\nabla \xi^j|}{\lambda_1}\right). \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду (18), (29), следует равномерная интегрируемость последовательности

$$\left\{ M\left(\mathbf{x}, \frac{|\nabla T_k(u - T(\xi^j))|}{2(\lambda_1 K_1 + \mu)}\right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}.$$

Учитывая замечание и сходимость (27), применяя лемму 2, устанавливаем модулярную сходимость

$$\nabla T_k(u - T(\xi^j)) \xrightarrow{M} \nabla T_k(u - v), \quad j \rightarrow \infty. \quad (30)$$



Из сходимости (30), согласно лемме 4, при любом  $k > 0$  имеем сходимость

$$\nabla T_k(u - T(\xi^j)) \rightharpoonup \nabla T_k(u - v) \text{ по топологии } \sigma((L_M)^n, (L_{\overline{M}})^n) \text{ в } (L_M(\Omega))^n, j \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Запишем неравенство (10) с  $v = T(\xi^j)$ :

$$\int_{\Omega} (b(\mathbf{x}, u) - f)T_k(u - T(\xi^j)) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - T(\xi^j)) \, d\mathbf{x} \leq 0. \quad (32)$$

Поскольку  $b(\mathbf{x}, u), f \in L_1(\Omega)$  (см. п. 1) определения 3), то в первом слагаемом неравенства (32), используя (27), согласно теореме Лебега можно перейти к пределу при  $j \rightarrow \infty$ .

Ввиду того, что  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u)\chi_{\{\Omega:|u|<\widehat{k}\}} \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$  (см. п. 2) определения 3), применяя (31), устанавливаем, что второе слагаемое в (32) также имеет предел при  $j \rightarrow \infty$ . Таким образом, после предельного перехода в (32) получим неравенство (10).

**Лемма 9.** Если  $u$  является ренормализованным решением задачи (1), (2), то равенство (11) справедливо для любой функции  $S \in \dot{W}_{\infty}^1(\mathbb{R})$  с компактным носителем и любой функции  $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ .

**Доказательство.** Поступая как в лемме 8, найдём последовательность  $\{\xi^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_0^{\infty}(\Omega)$  такую, что имеют место сходимость (26) и сходимость

$$\nabla T(\xi^j) \rightharpoonup \nabla v \text{ по топологии } \sigma((L_M)^n, (L_{\overline{M}})^n) \text{ в } (L_M(\Omega))^n, j \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Пусть  $S \in W_{\infty}^1(\mathbb{R})$  такая, что  $\text{supp } S \subset [-L, L]$  для  $L > 0$ . Равенство (11) с  $v = T(\xi^j)$  принимает вид

$$\int_{\Omega} ((b(\mathbf{x}, u) - f)S(u) + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u)S'(u))T(\xi^j) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u))S(u) \cdot \nabla T(\xi^j) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Поскольку  $f, b(\mathbf{x}, u), \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u)S'(u) \in L_1(\Omega)$  (см. (9) и пп. 1), 2) определения 4), то в первом слагаемом, применяя (26), согласно теореме Лебега можно перейти к пределу при  $j \rightarrow \infty$ . Ввиду принадлежности  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u))S(u) \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ , применив (33), во втором слагаемом можно перейти к пределу при  $j \rightarrow \infty$ . В итоге получим равенство (11) для любой функции  $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ .

**Лемма 10.** Пусть  $u$  – энтропийное решение задачи (1), (2), тогда при всех  $k > 0$  справедливо соотношение

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\{\Omega: h \leq |u| < h+k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} = 0. \quad (34)$$

**Доказательство.** Положив в неравенстве (10)  $v = T_h(u)$ ,  $h > 0$ , будем иметь

$$\int_{\{h \leq |u| < k+h\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} + \int_{\{h \leq |u|\}} (b(\mathbf{x}, u))T_k(u - T_h(u)) \, d\mathbf{x} \leq k \int_{\{h \leq |u|\}} |f| \, d\mathbf{x}.$$

Далее, используя знакоопределённость функции  $b(\mathbf{x}, s_0)$  по аргументу  $s_0$  (см. (7)), выводим неравенство

$$k \int_{\{|u| \geq k+h\}} |b(\mathbf{x}, u)| \, d\mathbf{x} + \int_{\{h \leq |u| < k+h\}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u + b(\mathbf{x}, u)(u - h \text{sign } u)) \, d\mathbf{x} \leq k \int_{\{h \leq |u|\}} |f| \, d\mathbf{x}.$$

Ввиду (7) для  $h \leq |u|$  справедливо неравенство  $b(\mathbf{x}, u)(u - h \text{sign } u) \geq 0$ . Соединив два последних неравенства, для любого  $k > 0$  имеем

$$\int_{\{h \leq |u| < k+h\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \leq k \int_{\{h \leq |u|\}} |f| \, d\mathbf{x}.$$

Отсюда, ввиду того, что  $f \in L_1(\Omega)$ , учитывая (19) и переходя к пределу при  $h \rightarrow \infty$ , выводим соотношение (34).

**Лемма 11.** Пусть  $u$  – ренормализованное решение задачи (1), (2), тогда справедливы соотношения (19)–(21).

**Доказательство.** Зафиксируем  $k > 0$ , пусть  $\sigma > k$ . Определим функцию  $S_\sigma$  формулой

$$S_\sigma(r) = \begin{cases} r, & |r| < \sigma, \\ \left(\sigma + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sign} r - \frac{\operatorname{sign} r}{2}(r - (\sigma + 1) \operatorname{sign} r)^2, & \sigma \leq |r| \leq \sigma + 1, \\ \left(\sigma + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sign} r, & |r| > \sigma + 1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$S'_\sigma(r) = \begin{cases} 1, & |r| < \sigma, \\ \sigma + 1 - |r|, & \sigma \leq |r| \leq \sigma + 1, \\ 0, & |r| > \sigma + 1. \end{cases}$$

Легко проверить включения

$$S_\sigma \in W_\infty^2(\mathbb{R}), \quad \operatorname{supp} S'_\sigma \subset [-\sigma - 1, \sigma + 1], \quad \operatorname{supp} S''_\sigma \subset [-\sigma - 1, -\sigma] \cup [\sigma, \sigma + 1].$$

Положив в (11)  $S = S'_\sigma$ ,  $v = T_k(u)$ , получим

$$J_1 + J_2 + J_3 = \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) S'_\sigma(u) \cdot \nabla T_k(u) \rangle + \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) S''_\sigma(u) \cdot \nabla u T_k(u) \rangle + \langle b(\mathbf{x}, u) S'_\sigma(u) T_k(u) \rangle = \langle f S'_\sigma(u) T_k(u) \rangle. \tag{35}$$

Оценим каждый интеграл:

$$J_1 = \int_\Omega \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) S'_\sigma(u) \cdot \nabla T_k(u) \, d\mathbf{x} = \int_{\{\Omega: |u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x}, \tag{36}$$

$$J_2 = - \int_{\{\Omega: \sigma \leq |u| \leq \sigma + 1\}} |T_k(u)| \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} = -k \int_{\{\Omega: \sigma \leq |u| \leq \sigma + 1\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x}, \tag{37}$$

используя (7), выводим

$$J_3 = \int_\Omega b(\mathbf{x}, u) S'_\sigma(u) T_k(u) \, d\mathbf{x} \geq 0. \tag{38}$$

Соединив (35)–(38), установим неравенство

$$\int_{\{\Omega: |u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \leq \int_\Omega |f| |T_k(u)| \, d\mathbf{x} + k \int_{\{\Omega: \sigma \leq |u| \leq \sigma + 1\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x}.$$

Применив условие 3) определения 4, перейдём к пределу при  $\sigma \rightarrow \infty$  и получим неравенство (22). Соотношения (19)–(21) являются следствием неравенства (22) (см. лемму 7).

**4. Знакоопределённость энтропийного решения.**

**Доказательство теоремы 3.** Пусть  $l > 0$ , положим в (10)  $v = T_l(u^+)$  и получим

$$I + J = \langle (b(\mathbf{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+)) \rangle + \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - T_l(u^+)) \rangle \leq 0. \tag{39}$$

Если  $0 \leq u < l$ , то  $T_k(u - T_l(u^+)) = 0$ , поэтому имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega (b(\mathbf{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+)) \, d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\{\Omega: u < 0\}} (b(\mathbf{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+)) \, d\mathbf{x} + \int_{\{\Omega: u \geq l\}} (b(\mathbf{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+)) \, d\mathbf{x} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Если  $u < 0$ , то  $T_k(u - T_l(u^+)) = T_k(u) < 0$  и  $I_1 \geq 0$ . Если  $u \geq l$ , то  $T_k(u - T_l(u^+)) = T_k(u - l)$  и  $I_2 \geq - \int_{\{\Omega: u \geq l\}} f T_k(u - l) d\mathbf{x}$ . Таким образом, выводим оценку

$$I \geq - \int_{\{\Omega: u \geq l\}} f T_k(u - l) d\mathbf{x}. \tag{40}$$

В множествах  $\{\Omega : u < -k\}$ ,  $\{\Omega : 0 \leq u < l\}$ ,  $\{\Omega : u \geq l + k\}$  почти всюду выполнено равенство  $\nabla T_k(u - T_l(u^+)) = 0$ . Следовательно, получим

$$J = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - T_l(u^+)) d\mathbf{x} = \left( \int_{\{\Omega: -k \leq u < 0\}} + \int_{\{\Omega: l \leq u < l+k\}} \right) \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - T_l(u^+)) d\mathbf{x}.$$

Если  $-k \leq u < 0$  или  $l \leq u < l + k$ , то  $\nabla T_k(u - T_l(u^+)) = \nabla u$ . Отсюда имеем

$$J = \left( \int_{\{\Omega: -k \leq u < 0\}} + \int_{\{\Omega: l \leq u < l+k\}} \right) \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x}. \tag{41}$$

Соединив (39)–(41), устанавливаем неравенство

$$\left( \int_{\{\Omega: -k \leq u < 0\}} + \int_{\{\Omega: l \leq u < l+k\}} \right) \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x} \leq \int_{\{\Omega: u \geq l\}} f T_k(u - l) d\mathbf{x}. \tag{42}$$

Согласно (19), ввиду того, что  $f \in L_1(\Omega)$ , имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\{\Omega: u \geq l\}} f T_k(u - l) d\mathbf{x} = 0.$$

Отсюда, устремляя в (42)  $l \rightarrow \infty$ , пользуясь (34), получаем

$$\int_{\{\Omega: -k \leq u < 0\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x} \leq 0, \quad k > 0.$$

Применив (5), устанавливаем равенство

$$\int_{\Omega} M(\mathbf{x}, |\nabla T_k(u^-)|) d\mathbf{x} = 0, \quad k > 0.$$

Следовательно,  $\nabla T_k(u^-) = 0$  п.в. в  $\Omega$ .

Согласно лемме 3  $T_k(u) \in \dot{W}_1^1(\Omega)$ . Отсюда ввиду следствия 3.1 [17, гл. II, § 3] устанавливаем принадлежность  $T_k(u^-) \in \dot{W}_1^1(\Omega)$ . Поэтому  $T_k(u^-) = 0$  п.в. в  $\Omega$ . Ввиду произвольности  $k$  отсюда следует, что  $u^- = 0$  п.в. в  $\Omega$ . Теорема 3 доказана.

### 5. Единственность энтропийного и ренормализованного решений.

**Доказательство теоремы 4.** Пусть  $u^1, u^2$  – энтропийные решения задачи (1), (2). В неравенстве (10) для  $u^1$  положим  $v = T_h(u^2)$ , а для  $u^2$  пусть  $v = T_h(u^1)$ ,  $h > k$ . Сложив интегральные неравенства, получим

$$\begin{aligned} I(h, k) &= \int_{\Omega^1(h, k)} \mathbf{A}^1 \cdot \nabla(u^1 - T_h(u^2)) d\mathbf{x} + \int_{\Omega^2(h, k)} \mathbf{A}^2 \cdot \nabla(u^2 - T_h(u^1)) d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \int_{\Omega} (-B^1 + f) T_k(u^1 - T_h(u^2)) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (-B^2 + f) T_k(u^2 - T_h(u^1)) d\mathbf{x} = J(h, k). \end{aligned} \tag{43}$$

Здесь  $\mathbf{A}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^i)$ ,  $B^i(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, u^i)$ ,  $\Omega^i(h, k) = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u^i - T_h(u^{3-i})| < k\}$ ,  $i = 1, 2$ .

Множества  $\Omega^1(h, k)$ ,  $\Omega^2(h, k)$  представляются в виде объединения непересекающихся подмножеств:

$$\Omega^1(h, k) = \Omega^{12}(h, k) \cup \Omega_1^1(h, k) \cup \Omega_2^1(h, k), \quad \Omega^2(h, k) = \Omega^{12}(h, k) \cup \Omega_1^2(h, k) \cup \Omega_2^2(h, k),$$

где

$$\begin{aligned} \Omega^{12}(h, k) &= \{ \mathbf{x} \in \Omega : |u^1 - u^2| < k, \quad |u^1| < h, \quad |u^2| < h \}, \\ \Omega_{3-i}^i(h, k) &= \{ \mathbf{x} \in \Omega : |u^i - h \operatorname{sign} u^{3-i}| < k, \quad |u^{3-i}| \geq h \}, \quad i = 1, 2, \\ \Omega_i^i(h, k) &= \{ \mathbf{x} \in \Omega : |u^i - u^{3-i}| < k, \quad |u^i| \geq h, \quad |u^{3-i}| < h \}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Интегралы в левой части неравенства (43) от функций  $\mathbf{A}^i \cdot \nabla(u^i - T_h(u^{3-i}))$ ,  $i = 1, 2$ , по множеству  $\Omega^{12}(h, k)$  принимают вид

$$I^{12}(h, k) = \int_{\Omega^{12}(h, k)} (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla(u^1 - u^2) \, d\mathbf{x} \geq 0. \tag{44}$$

Интегралы от функций  $\mathbf{A}^i \cdot \nabla(u^i - T_h u^{3-i})$  по множествам  $\Omega_{3-i}^i(h, k)$ ,  $i = 1, 2$ , соответственно, учитывая (5), оцениваются как

$$\int_{\Omega_2^1(h, k)} \mathbf{A}^1 \cdot \nabla u^1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_1^2(h, k)} \mathbf{A}^2 \cdot \nabla u^2 \, d\mathbf{x} \geq 0. \tag{45}$$

Наконец, пользуясь (5), получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1^1(h, k)} \mathbf{A}^1 \cdot \nabla(u^1 - u^2) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2^2(h, k)} \mathbf{A}^2 \cdot \nabla(u^2 - u^1) \, d\mathbf{x} \geq \\ &\geq - \int_{\Omega_1^1(h, k)} \mathbf{A}^1 \cdot \nabla u^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_2^2(h, k)} \mathbf{A}^2 \cdot \nabla u^1 \, d\mathbf{x} = -I_1^1(h, k) - I_2^2(h, k). \end{aligned} \tag{46}$$

Соединяя (44)–(46), устанавливаем оценку

$$I(h, k) \geq I^{12}(h, k) - I^3(h, k), \quad I^3(h, k) = I_1^1(h, k) + I_2^2(h, k).$$

Покажем, что  $I^3(h, k) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow \infty$ . Используя (4) и (5), оценим интеграл

$$\begin{aligned} |I_1^1(h, k)| &\leq \|\chi_{\{\Omega: h \leq |u^1| < h+k\}} \overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{A}^1|)\|_1 + \|\chi_{\{\Omega: h-k \leq |u^2| < h\}} M(\mathbf{x}, |\nabla u^2|)\|_1 \leq \\ &\leq \frac{1}{a} \int_{\{\Omega: h \leq |u^1| < h+k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^1) \cdot \nabla u^1 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{a} \int_{\{\Omega: h-k \leq |u^2| < h\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^2) \cdot \nabla u^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Применив (34), устанавливаем, что  $I_1^1(h, k) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow \infty$ . Аналогично оценивается интеграл  $I_2^2(h, k)$ .

Очевидно представление  $\Omega = \tilde{\Omega}^{12}(h) \cup \tilde{\Omega}_2^1(h) \cup \tilde{\Omega}_1^2(h) \cup \tilde{\Omega}_{12}(h)$ , в котором

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^{12}(h) &= \{ \mathbf{x} \in \Omega : |u^1| < h, \quad |u^2| < h \}, \quad \tilde{\Omega}_{12}(h) = \{ \mathbf{x} \in \Omega : |u^1| \geq h, \quad |u^2| \geq h \}, \\ \tilde{\Omega}_{3-i}^i(h) &= \{ \mathbf{x} \in \Omega : |u^i| < h, \quad |u^{3-i}| \geq h \}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Для интегралов в правой части неравенства (43) от функций  $(-B^i + f)T_k(u^i - T_h(u^{3-i}))$ ,  $i = 1, 2$ , по множеству  $\tilde{\Omega}^{12}(h)$ , ввиду неубывания функции  $b(\mathbf{x}, s_0)$  по  $s_0$ , имеем неравенство

$$-J^{12}(h) = \int_{\tilde{\Omega}^{12}(h)} (B^1 - B^2)T_k(u^1 - u^2) d\mathbf{x} \geq 0.$$

Для интегралов от тех же функций по множеству  $\tilde{\Omega}_1^2(h)$  получаем оценку

$$|J_1^2(h)| \leq k \int_{\tilde{\Omega}_1^2(h)} (|B^1| + |B^2| + 2|f|) d\mathbf{x}. \tag{47}$$

Поскольку  $f, B^1, B^2 \in L_1(\Omega)$  и мера множества  $\tilde{\Omega}_1^2(h)$  стремится к нулю при  $h \rightarrow \infty$  (см. (19)), из (47) следует, что  $\lim_{h \rightarrow \infty} |J_1^2(h)| = 0$ .

Аналогично устанавливается, что  $\lim_{h \rightarrow \infty} |J_2^1(h)| = \lim_{h \rightarrow \infty} |J_{12}(h)| = 0$ . Таким образом, предельный переход в (43) даёт соотношение

$$\lim_{h \rightarrow \infty} I^{12}(h, k) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega^{12}(h, k)} (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla(u^1 - u^2) d\mathbf{x} \leq 0.$$

Множество  $\Omega^{12}(h, k)$  при  $h \rightarrow \infty$  сходится к  $\hat{\Omega}^{12}(k) = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u^1 - u^2| < k\}$ , значит, при любом  $k > 0$  справедливо неравенство

$$\int_{\hat{\Omega}^{12}(k)} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^1) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^2)) \cdot \nabla(u^1 - u^2) d\mathbf{x} \leq 0. \tag{48}$$

Это противоречит условию (6), поэтому  $\nabla(u^1 - u^2) = 0$  п.в. в  $\hat{\Omega}^{12}(k)$  при любом  $k > 0$ . Следовательно,  $\nabla T_k(u^1 - u^2) = 0$  п.в. в  $\Omega$ . Ввиду принадлежностей  $T_k(u^1), T_k(u^2) \in \dot{W}_1^1(\Omega)$  (см. лемму 3), заключаем, что  $T_k(u^1 - u^2) = 0$  п.в. в  $\Omega$  для любого  $k > 0$ . Ввиду произвольности  $k$  устанавливаем, что  $u^1 = u^2$  п.в. в  $\Omega$ .

**Доказательство теоремы 5.** Определим функцию  $h_\sigma$  формулой

$$h_\sigma(r) = \begin{cases} 0, & |r| \geq 2\sigma, \\ 1, & |r| \leq \sigma, \\ \frac{2\sigma - |r|}{\sigma}, & \sigma < |r| < 2\sigma. \end{cases}$$

Пусть  $u^1, u^2$  – ренормализованные решения задачи (1), (2). Запишем (11) для  $u^1$  и  $u^2$  с  $S = h_\sigma(u^1)$ ,  $v = T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^2)$  и  $S = h_\sigma(u^2)$ ,  $v = T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)$  соответственно, затем вычтем из первого решения второе и получим равенство

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 + J_3 + J_4 &= \langle (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2) \rangle + \\ &+ \langle (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla u^1 T_k(u^1 - u^2)h'_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2) \rangle + \langle (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla u^2 T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h'_\sigma(u^2) \rangle + \\ &+ \langle (B^1 - B^2)T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Оценим каждый интеграл  $J_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ . Применяя (6), для первого имеем

$$J_1 = \int_{\{\Omega: |u^1 - u^2| < k\}} (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2) d\mathbf{x} \geq 0. \tag{50}$$

Учитывая (4), (5), выводим неравенство

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{k}{\sigma} \int_{\{\Omega: \sigma \leq |u^1| < 2\sigma, |u^2| < 2\sigma\}} (\mathbf{A}^1 \cdot \nabla u^1 + \overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{A}^2|) + M(\mathbf{x}, |\nabla u^1|)) d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \frac{k}{\sigma} C_3 \int_{\{\Omega: \sigma \leq |u^1| < 2\sigma, |u^2| < 2\sigma\}} (\mathbf{A}^1 \cdot \nabla u^1 + \mathbf{A}^2 \cdot \nabla u^2) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ввиду (21) имеем

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} |J_2| = 0. \quad (51)$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} |J_3| = 0. \quad (52)$$

Пользуясь монотонностью функции  $b(\mathbf{x}, s_0)$ , выводим оценку

$$J_4 \geq 0. \quad (53)$$

Соединив (49), (50), (53), получим неравенство

$$\int_{\{\Omega: |u^1 - u^2| < k\}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^1) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^2)) \cdot \nabla (u^1 - u^2) h_\sigma(u^1) h_\sigma(u^2) d\mathbf{x} \leq |J_2| + |J_3|.$$

Используя лемму Фату и соотношения (51), (52), выполнив в последнем неравенстве предельный переход при  $\sigma \rightarrow \infty$ , установим неравенство (48), из которого следует, что  $u^1 = u^2$  п.в. в  $\Omega$ .

**6. Существование ренормализованного решения.** Энтропийное и ренормализованное решения строятся как предел последовательности слабых решений аппроксимационной задачи для уравнения

$$-\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) + b^m(\mathbf{x}, u) = f^m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (54)$$

с функциями

$$f^m(\mathbf{x}) = T_m f(\mathbf{x}), \quad b^m(\mathbf{x}, s_0) = T_m b(\mathbf{x}, s_0).$$

Для каждого  $m \in \mathbb{N}$  существует обобщённое решение  $u^m \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$  задачи (54), (2) [17, теорема 13]. Таким образом, для любой функции  $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$  выполняется интегральное равенство

$$\langle (b^m(\mathbf{x}, u^m) - f^m(\mathbf{x}))v \rangle + \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^m) \cdot \nabla v \rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (55)$$

В работе [5, теорема 5.1] установлены сходимости

$$f^m \rightarrow f \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (56)$$

$$u^m \rightarrow u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty, \quad (57)$$

$$b^m(\mathbf{x}, u^m) \rightarrow b(\mathbf{x}, u) \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (58)$$

при любом  $k > 0$  получены сходимости

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m)) \rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u)) \quad \text{по топологии } \sigma((L_{\overline{M}})^n, (E_M)^n) \text{ в } (L_{\overline{M}}(\Omega))^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad (59)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (60)$$

и доказано, что предельная функция  $u$  является энтропийным решением задачи (1), (2).

**Доказательство теоремы 2.** Докажем, что энтропийное решение, построенное в теореме 1, удовлетворяет определению 4. Условия 1), 2) выполнены, так как совпадают с условиями 1), 2) определения 3. Условие 3) также выполнено (см. соотношение (34)).

Докажем равенство (11). Пусть функция  $S \in C_0^1(\mathbb{R})$  такая, что  $\text{supp } S \subset [-L, L]$  для  $L > 0$ . Для любой функции  $\xi \in C_0^1(\Omega)$ , взяв в качестве тестовой функции в (55)  $v = S(u^m)\xi \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ , выводим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi) \rangle + \langle (b^m(\mathbf{x}, u^m) - f^m(\mathbf{x}))S(u^m)\xi \rangle = \\ = I^m + J^m = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{61}$$

Очевидно, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} I^m = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla T_L(u^m) S'(u^m)\xi \, d\mathbf{x} + \\ + \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla \xi S(u^m) \, d\mathbf{x} = I_1^m + I_2^m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{62}$$

Ввиду сходимостей (57), (60), применив лемму 5, устанавливаем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} I_1^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla T_L(u^m) S'(u^m)\xi \, d\mathbf{x} = \\ = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u) S'(u)\xi \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{63}$$

Из сходимости (57) по лемме 6 получаем  $S(u^m)\nabla \xi \rightarrow S(u)\nabla \xi$  сильно в  $(E_M(\Omega))^n$ ,  $m \rightarrow \infty$ . Отсюда, учитывая сходимость (59), выводим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_2^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla \xi S(u^m) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla \xi S(u) \, d\mathbf{x}. \tag{64}$$

Соединив (62)–(64), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} I^m = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) \cdot (S'(u)\xi \nabla T_L(u) + S(u)\nabla \xi) \, d\mathbf{x} = \\ = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi \nabla u + S(u)\nabla \xi) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{65}$$

Из сходимости (57) по лемме 6 имеем

$$S(u^m)\xi \rightharpoonup S(u)\xi \quad \text{в топологии } \sigma(L_{\infty}, L_1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Тогда, ввиду сходимостей (56) и (58), устанавливаем равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J^m = \int_{\Omega} (b(\mathbf{x}, u) - f)S(u)\xi \, d\mathbf{x}. \tag{66}$$

Комбинируя (61), (65), (66), получаем равенство (11). Таким образом, приходим к выводу, что  $u$  является ренормализованным решением задачи (1), (2). Теорема 2 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chlebicka I.* Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh Sec. A: Math., First View. 2022. P. 1–31.
2. *Gwiazda P., Skrzypczaka I., Zatorska-Goldstein A.* Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak–Orlicz space // J. of Differ. Equat. 2017. V. 264. P. 341–377.
3. *Denkowska A., Gwiazda P., Kalita P.* On renormalized solutions to elliptic inclusions with nonstandard growth // Calc. Var. Partial Differ. Equat. 2021. V. 60. № 21. P. 1–44.
4. *Ait Khellou M., Benkirane A.* Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and  $L^1$  data in Musielak–Orlicz spaces // Ann. of the Univ. of Craiova. Math. and Comput. Sci. Ser. 2016. V. 43. № 2. P. 164–187.
5. *Elemine Vall M.S.B., Ahmedatt T., Touzani A., Benkirane A.* Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with  $L^1$  data // Bol. Soc. Paran. Math. 2018. V. 36. № 1. P. 125–150.
6. *Elarabi R., Rhoudaf M., Sabiki H.* Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak–Orlicz spaces // Ricerche Mat. 2017. V. 62. № 2. P. 1–31.
7. *Ait Khelloul M., Douiri S.M., El Hadfi Y.* Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the log-Hölder continuity condition // Mediterranean J. of Math. 2020. V. 17. Art. no. 33. P. 1–18.
8. *Talha A., Benkirane A.* Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak–Orlicz spaces // Monatsh Math. Ann. of the Univ. of Craiova. Math. and Comput. Sci. Ser. 2018. V. 186. P. 745–776.
9. *Li Ying., Fengping Y., Shulin Zh.* Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz spaces // Nonlin. Anal. 2021. V. 61. P. 1–20.
10. *Кожевникова Л.М.* Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений анизотропной эллиптической задачи в неограниченных областях с данными в виде меры // Изв. вузов. Математика. 2020. № 1. С. 1–16.
11. *Рутлицкий Я.Б., Красносельский М.А.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
12. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces. Lecture Notes in Math. V. 1034. Berlin, 1983.
13. *Chlebicka I.* A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces // Nonlin. Anal. 2018. № 175. P. 1–27.
14. *Ahmida Y., Chlebicka I., Gwiazda P., Youssfi A.* Gossez’s approximation theorems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // J. of Funct. Anal. 2018. V. 275. № 9. P. 2538–2571.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
16. *Ладьженская О.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
17. *Benkirane A., Sidi El Vally M.* Variational inequalities in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2014. V. 21. № 5. P. 787–811.

Стерлитамакский филиал  
Уфимского университета науки и технологий,  
Елабужский институт  
Казанского (Приволжского) федерального университета

Поступила в редакцию 13.05.2022 г.  
После доработки 17.11.2022 г.  
Принята к публикации 28.11.2022 г.