ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 51–72

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2023 г. Х. Г. Умаров

Для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка, обобщающего уравнение колебаний кручения цилиндрического стержня при учёте внутреннего и внешнего затухания и моделирующего распространение продольных волн напряжения вдоль одномерного вязкоупругого стержня, материал которого подчиняется закону деформирования среды Фойгхта–Кельвина, получены условия существования глобального решения и разрушения решения задачи Коши на конечном временно́м отрезке.

DOI: 10.31857/S0374064123010065, EDN: OBYMHZ

Введение. В статье рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка

$$u_{tt} - \alpha u_{txx} - \beta u_{tx} + \gamma u_t = \sigma'(u_x)u_{xx}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{2}$$

где $\mathbb{R}^1_+ = (0,+\infty)$, $\mathbb{R}^1 = (-\infty,+\infty)$, штрих в уравнении обозначает дифференцирование по $u_x = \partial_x u = \partial u/\partial x$, коэффициенты α, β, γ – известные положительные числовые параметры, нелинейность $\sigma(\cdot)$ – заданная функция, не равная тождественно нулю.

Задача Коши исследуется в банаховом пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ [1, гл. 8, § 1] непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют оба предела при $x \to \pm\infty$, полагая, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и искомое классическое решение*) $u = u(t,x)$, $(t,x) \in \overline{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^1$, $\overline{\mathbb{R}}^1_+ = [0,+\infty)$, вместе с частными производными, входящими в уравнение (1), для всех значений временно́й переменной t по переменной x принадлежат $C[\mathbb{R}^1]$.

Будем обозначать $C^{(k)}[\mathbb{R}^1] = \{g(x) \in C[\mathbb{R}^1] : g'(x), \ldots, g^{(k)}(x) \in C[\mathbb{R}^1]\}$, $k \in \mathbb{N}$, подмножества в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, наделённом нормой $\|g\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |g(x)|$.

Нелинейность уравнения (1): $\sigma(r)$, $r \in \mathbb{R}^1$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция, модуль которой $|\sigma(r)|$ при $r \geqslant 0$ является непрерывной неубывающей функцией и для всех $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливы оценки

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1} |\sigma^{(i)}(g(x))| \leqslant \left|\sigma^{(i)}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^1} |g(x)|\right)\right|, \quad i = 0,1,2. \tag{3}$$

Если в уравнении (1) коэффициент $\beta = 0$, а функция $\sigma(r) = \eta r$, где $\eta = \mathrm{const}$, то приходим [2, гл. 13] к уравнению колебаний кручения цилиндрического стержня (вала) при учёте внутреннего и внешнего затухания (коэффициенты α и γ характеризуют соответственно внутреннее и внешнее затухания вала), при этом $u = u(t,x)$ – угол скручивания в сечении вала.

Если коэффициенты $\beta = \gamma = 0$, то приходим к уравнению, которое описывает распространение продольных волн напряжения вдоль одномерного вязкоупругого стержня, материал которого подчиняется закону деформирования среды Фойгхта–Кельвина [3, §§ 4.3, 6.4], где

*) Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.

x – координата, характеризующая положение поперечного сечения стержня, $u = u(t,x)$ – продольное перемещение за время t, α – коэффициент вязкости, $\sigma(\cdot)$ – напряжение (внутренняя сила, возникающая в процессе деформации стержня).

Изучению различных аспектов уравнения (1) и его многомерных аналогов и обобщений посвящено большое количество работ (см. работы [2–8] и библиографию в них). В работах [4–8] исследуются вопросы существования и поведения решений различных начально-краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка, подобных уравнению (1) (в [4, 5] производная функции $\sigma(r)$ удовлетворяет условию $\sigma'(r) > 0$; в [7, 8] производная $\sigma'(r)$ переменного знака: $|\sigma'(r)| \leqslant c = \mathrm{const}$ в [7] и $-\sigma'(r) \leqslant c = \mathrm{const}$ в [8]; в [6] предполагается существование $h > 0$ такого, что $(\sigma(r_1) - \sigma(r_2))(r_1 - r_2) > 0$, как только $|r_1 - r_2| \geqslant h$).

Наряду с уравнением (1), будем рассматривать уравнение

$$v_{tt} - \alpha v_{txx} - \beta v_{tx} + \gamma v_t = \partial_x^2 \sigma(v), \tag{4}$$

получающееся из (1) после дифференцирования его обеих частей по x и последующей замены $v = u_x$. Для этого уравнения начальные условия примут вид

$$v|_{t=0} = \varphi'(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi'(x). \tag{5}$$

Исследование задачи Коши (1), (2) проведём по следующему плану. Вначале, для того чтобы убедиться, что постановка задачи Коши (4), (5) корректна и локальное по времени решение существует, выведем соответствующее задаче (4), (5) нелинейное интегральное уравнение. Используя его, найдём временно́й отрезок существования и единственности классического решения задачи Коши (4), (5) и оценку нормы в $C[\mathbb{R}^1]$ этого локального по времени решения. Затем, установив связь между существованием локальных решений уравнений (4) и (1), найдём условия существования глобального решения и разрушения решения на конечном временном отрезке для задачи Коши (1), (2).

1. Существование и единственность локального решения задачи Коши (4), (5).

Теорема 1. *Пусть параметры α, β удовлетворяют условию $\alpha \geqslant \beta^2$, начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям $\varphi(x) \in C^{(3)}[\mathbb{R}^1]$, $\psi(x) \in C^{(1)}[\mathbb{R}^1]$, а нелинейность $\sigma(\cdot)$ подчиняется требованиям (3). Тогда на отрезке $t \in [0, t_0]$ существует единственное классическое решение $v = v(t,x)$ задачи Коши (4), (5) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, для которого справедлива оценка $\|v(t,x)\|_C \leqslant H(t)$, $t \in [0, t_0]$, в которой как мажоранта нормы решения, так и длина отрезка t_0 определяются параметрами α, β, γ уравнения (1), начальными функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и нелинейностью $\sigma(\cdot)$.*

Доказательство. Полагая, что на некотором временно́м отрезке $[0, T]$ решение задачи Коши (4), (5) существует, а начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ достаточно гладкие, проинтегрируем обе части уравнения (4) по временно́й переменной t:

$$v_t - \alpha v_{xx} - \beta v_x + \gamma v = v_0(x) + \int\limits_0^t \partial_x^2 \sigma(v)\, ds, \quad t \in [0, T], \tag{6}$$

где $v_0(x) = \psi'(x) - \alpha\varphi'''(x) - \beta\varphi''(x) + \gamma\varphi'(x)$. Начальное условие для полученного интегро-дифференциального уравнения первого порядка (6):

$$v|_{t=0} = \varphi'(x). \tag{7}$$

Задачу Коши (6), (7) будем исследовать в банаховом пространстве $C_T = C([0,T], C[\mathbb{R}^1])$ непрерывных абстрактных функций $V = V(t)\colon [0,T] \ni t \to v = v(t,x) \in C[\mathbb{R}^1]$, наделённом нормой

$$\|V\|_{C_T} = \max_{t\in[0,T]} \|V(t)\|_C = \sup_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in\mathbb{R}^1}} |v(t,x)|.$$

Прежде чем приступить к записи уравнения (6) в абстрактной форме, напомним, что в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ [1, гл. 8, § 1; 9, § 1.3] дифференциальные операторы ∂_x (с областью определения $D(\partial_x) = C^{(1)}[\mathbb{R}^1]$) и ∂_x^2 $(D(\partial_x^2) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1])$ являются производящими операторами сильно непрерывных сжимающих соответственно группы

$$U(t;\partial_x)g(x) = g(x+t), \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

и полугруппы

$$U(t;\partial_x^2)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)}g(x+\xi)\,d\xi, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+,$$

класса C_0.

Для функции $g = g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ справедливо неравенство $\|g'\|^2_C \leqslant 4\|g''\|_C\|g\|_C$ (см. [9, § 7.1]), используя которое заключаем, что оператор $\beta\partial_x$ подчинен оператору $\alpha\partial_x^2$ с границей, не превышающей β^2/α. Но тогда при выполнении условия $\beta^2 \leqslant \alpha$ возмущённый оператор

$$A_0 = \alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x, \quad D(A_0) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1],$$

является [9, § 8.1] производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы класса C_0 : $\|U(t;A_0)\| \leqslant 1$, причём полуось $\mathbb{R}^1_+$ принадлежит резольвентному множеству оператора A_0.

Введём в рассмотрение оператор

$$A = A_0 - \gamma I, \quad D(A) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1],$$

где I – тождественный оператор. На произвольном элементе $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливы представление полугруппы порождаемой оператором A:

$$U(t;A)g(x) = e^{-\gamma t}U(\beta t;\partial_x)U(\alpha t;\partial_x^2)g(x) = \frac{e^{-\gamma t}}{2\sqrt{\pi\alpha t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi-x-\beta t)^2/(4\alpha t)}g(\xi)\,d\xi$$

и оценка нормы

$$\|U(t;A)\| \leqslant e^{-\gamma t} \leqslant 1, \quad t \geqslant 0. \tag{8}$$

Из оценки (8) следует, что числовая полуось $\lambda > -\gamma$ принадлежит резольвентному множеству оператора A, и значит, оператор A имеет ограниченный обратный: $D(A^{-1}) = C[\mathbb{R}^1]$, и для всех $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливы представление

$$A^{-1}g(x) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma s}U(s;A_0)g(x)\,ds = -\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|}g(x+2\alpha\xi)\,d\xi,$$

где*) обозначено $\delta = \gamma + \beta^2/(4\alpha)$, и оценка нормы

$$\|A^{-1}\| \leqslant 1/\gamma. \tag{9}$$

Используя неравенство

$$\|\partial_x U(t;A_0)g(x)\|_C \leqslant \|g(x)\|_C/\sqrt{\pi\alpha t}, \quad t > 0, \quad g(x) \in C[\mathbb{R}^1], \tag{10}$$

для линейного ограниченного оператора

$$A_1 = \partial_x A^{-1}, \quad D(A_1) = C[\mathbb{R}^1],$$

*) Заметим, что $\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi| = 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|K(\xi) < 0$, где $K(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi)\beta/(2\sqrt{\alpha\delta}) - 1$, $\xi \in \mathbb{R}^1$.

получим представление

$$A_1 g(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) e^{\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|} g(x + 2\alpha\xi)\, d\xi$$

и оценку нормы

$$\|A_1\| \leqslant 1/\sqrt{\alpha\gamma}. \tag{11}$$

Учитывая полученные формулы для операторов A^{-1} и A_1, выводим представление для линейного ограниченного оператора

$$A_2 = \partial_x^2 A^{-1} = \alpha^{-1}(I + \gamma A^{-1} - \beta A_1), \quad D(A_2) = C[\mathbb{R}^1],$$

на произвольном элементе $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$:

$$A_2 g(x) = \alpha^{-1}\biggl(g(x) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\biggl(\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} + \beta K(\xi)\biggr) e^{\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|} g(x + 2\alpha\xi)\, d\xi\biggr), \tag{12}$$

и оценку нормы

$$\|A_2\| \leqslant \mu = \alpha^{-1}(2 + \beta/\sqrt{\alpha\gamma}). \tag{13}$$

Теперь уравнение (6) в пространстве C_T можно записать в абстрактном виде:

$$V'(t) - AV(t) = V_0 + A\int\limits_0^t A_2\sigma(V(s))\, ds, \quad t \in [0, T], \tag{14}$$

где обозначено $V'(t) = dV(t)/dt$ и $V_0 = V'(0) - AV(0)$.

Применив к обеим частям уравнения (14) полугруппу $U(t-\tau; A)$, предварительно заменив в (14) переменную t на τ, получим

$$(U(t-\tau; A)V)'_\tau = U(t-\tau; A)\biggl(V_0 + A\int\limits_0^\tau A_2\sigma(V(s))\, ds\biggr),$$

откуда, интегрируя обе части по переменной τ в пределах от 0 до t, выводим формулу

$$V(t) = U(t; A)V(0) + \int\limits_0^t U(t-\tau; A)V_0\, d\tau + \int\limits_0^t U(t-\tau; A)A\biggl(\int\limits_0^\tau A_2\sigma(V(s))\, ds\biggr) d\tau. \tag{15}$$

Первый интеграл в правой части (15) равен

$$J_1 = V(0) - U(t; A)V(0) + \int\limits_0^t U(\tau; A)V'(0)\, d\tau,$$

откуда, используя обратимость оператора A, имеем $J_1 = [U(t; A) - I][A^{-1}V'(0) - V(0)]$.

Интегрируя по частям, вычисляем второй интеграл в (15):

$$J_2 = -\int\limits_0^t (U(t-\tau; A))'_\tau \biggl(\int\limits_0^\tau A_2\sigma(V(s))\, ds\biggr) d\tau =$$

$$= -\int\limits_0^t A_2\sigma(V(s))\,ds + \int\limits_0^t U(t-\tau;A)A_2\sigma(V(\tau))\,d\tau.$$

Подставив в равенство (15) найденные значения J_1 и J_2, получим абстрактное нелинейное интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши (6), (7):

$$V(t) = W(t) + \int\limits_0^t [U(t-\tau;A) - I]A_2\sigma(V(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{16}$$

где $W(t) = V(0) + [U(t;A) - I]A^{-1}V'(0)$ и $\|W(t)\|_C \leqslant p = \|\varphi'\|_C + 2\gamma^{-1}\|\psi'\|_C$.

Непрерывное решение интегрального уравнения (16) называется *обобщённым решением задачи Коши* (6), (7).

Пусть $V_i = V_i(t)$, $i = 1,2,$ – произвольные функции, принадлежащие замкнутому шару $C_{T,P}$ пространства C_T: $\|V_i(t)\|_{C_T} \leqslant P = \mathrm{const}$. Из непрерывной дифференцируемости по Фреше оператора суперпозиции в пространстве непрерывных функций, а значит, оценки

$$\|\sigma(V_2) - \sigma(V_1)\|_{C_T} \leqslant l_{T,P}\|V_2 - V_1\|_{C_T},$$

в которой $l_{T,p} = \sup\limits_{V \in C_{T,P}} \|\sigma'(V)\|_{C_T}$, и ограниченности линейных операторов A_2 и $U(t;A)$ следует, что нелинейный оператор

$$(\Phi V)(t) = W(t) + \int\limits_0^t [U(t-\tau;A) - I]A_2\sigma(V(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0,T],$$

непрерывно отображает пространство C_T в себя и, более того, удовлетворяет локальному условию Липшица в шаре $C_{T,P}$:

$$\|(\Phi V_2)(t) - (\Phi V_1)(t)\|_{C_T} \leqslant tL_{T,P}\|V_2 - V_1\|_{C_T},$$

где величина $tL_{T,P} = 2\|A_2\|l_{T,P}t < 1$, если $t < \alpha\sqrt{\alpha\gamma}/(2l_{T,P}(\beta + \sqrt{\alpha\gamma}))$. При этом если выполняется условие $p < (1 - L_{T,p})P$, то шар $C_{T,P}$ оператором Φ отображается в себя и Φ есть оператор сжатия в пространстве C_T. Следовательно, существует временно́й отрезок $[0,T_1]$, где $T_1 < \min\{1/L_{T,P}; (P-p)/L_{T,P}\}$, на котором задача Коши (6), (7) имеет единственное обобщённое решение $V = V(t)$, $t \in [0,T_1]$, т.е. единственное непрерывное решение интегрального уравнения (16) в шаре $C_{T,P}$.

Из интегрального уравнения (16), используя оценки (13), (8) и (3), выводим интегральное неравенство

$$\|v(t,x)\|_C \leqslant p + 2\mu\int\limits_0^t |\sigma(\|v(s,x)\|_C)|\,ds, \quad t \in [0,T_1],$$

из которого в силу леммы Бихари [10, § 1.4] следует оценка нормы решения интегрального уравнения (16) на отрезке $[0,t_0] \subseteq [0,T_1]$:

$$\|v(t,x)\|_C \leqslant H(t) = G^{-1}(G(p) + 2\mu t), \tag{17}$$

где $G(\lambda) = \int_\xi^\lambda |\sigma(s)|^{-1}\,ds$ $(\xi > 0,\ \lambda > 0)$, $G^{-1}(\cdot)$ – обратная к $G(\cdot)$ функция, а отрезок $[0,t_0]$ определяется условием принадлежности значений $G(p) + 2\mu t$ при $t \in [0,t_0]$ области определения функции $G^{-1}(\cdot)$.

Таким образом, на временно́м отрезке $[0,t_0]$ существует обобщённое решение $V(t)$ задачи Коши (6), (7), для нормы которого справедлива оценка (17) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$.

Теперь выясним, когда обобщённое решение $V(t),\ t \in [0, t_0]$, задачи Коши (6), (7), будет классическим решением уравнения (4). Прежде всего отметим, что функция

$$V(t) = W(t) + \int\limits_0^t U(t-\tau; A)A_2\sigma(V(\tau))\,d\tau - \int\limits_0^t A_2\sigma(V(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0, t_0],$$

определяемая правой частью интегрального уравнения (16), является решением уравнения

$$V'(t) = AQ(t) + V_0, \tag{18}$$

где

$$Q(t) = V(t) + \int\limits_0^t A_2\sigma(V(s))\,ds = W(t) + \int\limits_0^t U(t-\tau; A)A_2\sigma(V(\tau))\,d\tau, \tag{19}$$

если функция $Q(t)$ принимает значения из области определения оператора A, и при этом функция $AQ(t)$ непрерывна на отрезке $[0, t_0]$. Чтобы убедиться в этом, представим функцию $Q(t)$ в виде

$$Q(t) = W(t) + \frac{1}{\alpha}(I + \gamma A^{-1} - \beta A_1)J(t), \tag{20}$$

где

$$J(t) = \int\limits_0^t U(t-\tau; A)\sigma(V(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0, t_0].$$

Требуемые от функции $Q(t)$ свойства будут выполнены, если таковыми обладают функции $W(t)$ и $J(t) : t \to j(t, x)$.

Чтобы проверить принадлежность $J(t) \in D(A)$ и непрерывность $AJ(t)$ на отрезке $[0, t_0]$, перейдём к образу $j(t, x)$ функции $J(t)$ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$j(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} \int\limits_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_{\alpha\beta}(x,\tau)}\sigma(v(t-\tau, \xi))\,d\xi, \quad (t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1,$$

где $\xi_{\alpha\beta}(x, \tau) = (\xi - x - \beta\tau)^2/(4\alpha\tau)$, для нормы которого справедлива цепочка неравенств

$$\|j(t, x)\|_C \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\,d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}|\sigma(\|v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x,\tau))\|_C)|\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \max_{\tau\in[0,t_0]} |\sigma(H(\tau))| \int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\,d\tau \int\limits_0^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta \leqslant \frac{h}{\gamma}, \tag{21}$$

здесь $\eta_{\alpha\beta}(x, \tau) = x + \beta\tau + 2\eta\sqrt{\alpha\tau}$ и $h = \max\limits_{\tau\in[0,t_0]} |\sigma(H(\tau))|$.

Покажем, что функция $j(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x в полосе $(t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1$.

Для производной функции $j(t, x)$ по переменной x справедлива формула

$$j_x(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int\limits_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2}\sigma(v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x,\tau)))\,d\eta,$$

а для нормы – неравенства

$$\|j_x(t,x)\|_C \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\eta|e^{-\eta^2}|\sigma(H(t-\tau))|\,d\eta \leqslant \frac{2h}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int_0^{+\infty}\eta e^{-\eta^2}\,d\eta.$$

Отсюда следует оценка

$$\|j_x(t,x)\|_C \leqslant \frac{h}{\sqrt{\alpha\gamma}} \tag{22}$$

и, значит, равномерная сходимость при $(t,x)\in[0,t_0]\times\mathbb{R}^1$ интеграла, определяющего $j_x(t,x)$.

Из соотношений (20)–(22), (11), (13) и (9) следует, что на отрезке $[0,t_0]$ норма абстрактной функции $\partial_x Q(t)$ ограничена константой:

$$\|\partial_x Q(t)\|_C \leqslant \|\varphi''\|_C + \frac{2}{\sqrt{\alpha\gamma}}\|\psi'\|_C + \frac{h}{\alpha\sqrt{\alpha\gamma}}\left(2+\frac{2\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}+\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right) = q_1, \quad t\in[0,t_0].$$

Вернёмся к равенствам (19) и запишем в подробной форме первое из них (не применяя, чтобы не усложнять запись, представление (12) линейного ограниченного оператора A_2):

$$v(t,x) = q(t,x) - A_2\left(\int_0^t \sigma(v(s,x))\,ds\right), \tag{23}$$

где $q(t,x)$ – образ вектор-функции $Q(t)$ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$. Формально вычислим*) частную производную по переменной x от обеих частей равенства (23):

$$v_x(t,x) = q_x(t,x) - A_2\left(\int_0^t \sigma'(v(s,x))v_x(s,x)\,ds\right).$$

При этом оператор A_2 вычисляется по формуле (12) от функции, определяемой интегралом $\int_0^t \sigma'(v(s,x))v_x(s,x)\,ds\in C[\mathbb{R}^1]$, а из полученного интегрального уравнения следует интегральное неравенство

$$\|v_x(t,x)\|_C \leqslant q_1 + \mu h_1\int_0^t \|v_x(s,x)\|_C\,ds,$$

где $h_1 = \max\limits_{\tau\in[0,t_0]}|\sigma'(H(\tau))|$, из которого в силу леммы Гроноулла [10, § 1.1] выводится оценка нормы частной производной

$$\|v_x(t,x)\|_C \leqslant h_2, \quad t\in[0,t_0], \tag{24}$$

здесь $h_2 = q_1 e^{\mu h_1 t_0}$.

Для производной второго порядка функции $j(t,x)$ по переменной x справедливы формула

$$j_{xx}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}\eta e^{-\eta^2}\sigma'(v(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau)))v_x(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau))\,d\eta$$

и при $t\in[0,t_0]$ оценка

$$\|j_{xx}(t,x)\|_C \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\eta|e^{-\eta^2}|\sigma'(\|v(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau))\|_C)|\times$$

*) Для элементов банахова пространства $C[\mathbb{R}^1]$ справедлива оценка $\|\varphi\cdot\psi\|_C \leqslant \|\varphi\|_C\|\psi\|_C$, в силу чего с ним можно работать как с алгеброй [11, § 6.1].

$$\times \|v_x(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x,\tau))\|_C \, d\eta \leqslant \frac{h_1 h_2}{\sqrt{\alpha\gamma}}. \tag{25}$$

Таким образом, функция $j(t,x)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x в полосе $(t,x) \in [0,t_0] \times \mathbb{R}^1$, что означает принадлежность значений функции $J(t)$, а значит, в силу (20) и функции $Q(t)$, области определения оператора A при $t \in [0,t_0]$, причём функции $AJ(t)$, $AQ(t)$ непрерывны на отрезке $[0,t_0]$, но тогда из равенства (18) следует непрерывность производной $V'(t)$ обобщённого решения на отрезке $[0,t_0]$.

Рассмотрим образ равенства (18) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$v_t(t,x) = Aq(t,x) + v_0(x) = A[w(t,x) + \alpha^{-1}(I + \gamma A^{-1} - \beta A_1) j(t,x)] + v_0(x) = U(t;A)\psi'(x) + j_{xx}(t,x),$$

из которого следует оценка

$$\|v_t(t,x)\|_C \leqslant h_3, \quad (t,x) \in [0,t_0] \times \mathbb{R}^1, \tag{26}$$

где $h_3 = \|\psi'\|_C + h_1 h_2/\sqrt{\alpha\gamma}$.

Заметим, что из первого равенства в (19) следует соотношение $Q'(t) = V'(t) + A_2\sigma(V(t))$, устанавливающее непрерывность производной $Q'(t)$ на отрезке $[0,t_0]$.

Продифференцировав обе части равенства (18), имеем $V''(t) = AQ'(t)$. Поэтому, чтобы доказать, что обобщённое решение $V(t)$, $t \in [0,t_0]$, задачи Коши (6), (7) будет классическим решением уравнения (4), осталось показать принадлежность значений функции $Q'(t) \in D(A)$ и непрерывность функции $AQ'(t)$ при $t > 0$.

Из равенства (20) следует

$$AQ(t) = AW(t) + \alpha^{-1}(A + \gamma I - \beta A A_1) J(t), \tag{27}$$

где $AA_1 = (\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x - \gamma I)\partial_x A^{-1} = \alpha A_3 + \beta A_2 - \gamma A_1$, здесь $A_3 = \partial_x^3 A^{-1} = \alpha^{-1}(\partial_x - \beta A_2 + \gamma A_1)$, поэтому $AA_1 = \partial_x$, и тогда равенство (27) примет вид

$$AQ(t) = AW(t) + \alpha^{-1}(A + \gamma I - \beta\partial_x) J(t)$$

или, учитывая определение оператора A и соотношения $AW(t) = AV(0) + [U(t;A) - I]V'(0) = U(t;A)V'(0) - V_0$, имеем

$$AQ(t) = U(t;A)V'(0) + \partial_x^2 J(t) - V_0, \quad t \in [0,t_0]. \tag{28}$$

Из соотношений (20)–(22), (28), (25), (11) и (13) следует, что на отрезке $[0,t_0]$ норма функции $\partial_x^2 Q(t)$ ограничена константой:

$$\|\partial_x^2 Q(t)\|_C = \|q_{xx}(t,x)\|_C \leqslant \|\varphi'''\|_C + \frac{2}{\alpha}\left(2 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}\right)\|\psi'\|_C +$$

$$+ \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha\gamma}}\left[h_1 h_2 + \frac{h}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{2\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(2 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}\right)\right)\right] = q_2, \quad t \in [0,t_0]. \tag{29}$$

Формально вычислив производную по переменной x от обеих частей равенства (23), получим

$$v_{xx}(t,x) = \tilde{q}(t,x) - A_2\left(\int\limits_0^t \sigma'(v(s,x)) v_{xx}(s,x)\, ds\right), \tag{30}$$

где обозначено

$$\tilde{q}(t,x) = q_{xx}(t,x) - A_2\left(\int\limits_0^t \sigma''(v(s,x)) v_x^2(s,x)\, ds\right),$$

причём согласно соотношениям (29), (13), (17) и (24) имеем $\|\tilde q(t,x)\|_C \leqslant h_5$, где $h_5 = q_2 + \mu t_0 h_2^2 h_4$ и $h_4 = \max\limits_{\tau\in[0,t_0]} |\sigma''(H(\tau))|$.

Из интегрального уравнения (30) следует интегральное неравенство

$$\|v_{xx}(t,x)\|_C \leqslant h_5 + \mu h_1 \int\limits_0^t \|v_{xx}(s,x)\|_C\,ds,$$

из которого в силу леммы Гронуолла вытекает оценка нормы частной производной

$$\|v_{xx}(t,x)\|_C \leqslant h_6, \quad t\in[0,t_0], \tag{31}$$

где $h_6 = h_5 e^{\mu h_1 t_0}$.

Теперь вернёмся к образу равенства (18) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ и вычислим производную по переменной x от обеих частей этого равенства: $v_{tx}(t,x) = \partial_x AQ(t) + v_0'(x)$, или согласно соотношению (27)

$$v_{tx}(t,x) = \partial_x U(t;A)\psi'(x) + j_{xxx}(t,x), \quad t\in[0,t_0]. \tag{32}$$

Используя неравенство (10), оценим норму первого слагаемого в правой части (32):

$$\|\partial_x U(t;A)\psi'(x)\|_C \leqslant e^{-\gamma t}\|\psi'\|_C/\sqrt{\pi\alpha t}, \quad 0<t\leqslant t_0. \tag{33}$$

Для второго слагаемого из (32) имеем представление

$$j_{xxx}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\eta e^{-\eta^2}[\sigma''(v(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau)))v_x^2(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau)) +$$
$$+\sigma'(v(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau)))v_{xx}(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau))]\,d\eta$$

и с учётом неравенств (3), (17), (24) и (31) оценку

$$\|j_{xxx}(t,x)\|_C \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\eta| e^{-\eta^2}[|\sigma''(H(t-\tau))|h_2^2 +$$
$$+|\sigma'(H(t-\tau))|h_6]\,d\eta \leqslant \frac{h_2^2h_4 + h_1h_6}{\sqrt{\alpha\gamma}} = h_7, \quad t\in[0,t_0]. \tag{34}$$

Таким образом, применив неравенства (33) и (34), имеем оценку

$$\|v_{tx}(t,x)\|_C \leqslant e^{-\gamma t}\frac{\|\psi'\|_C}{\sqrt{\pi\alpha t}} + h_7 \leqslant \frac{h_8}{\sqrt{t}} + h_7, \quad 0<t\leqslant t_0, \tag{35}$$

где $h_8 = \|\psi'\|_C/\sqrt{\alpha\pi}$.

Для того чтобы получить оценку производной $v_{txx}(t,x) = \partial_x^2 V'(t)$, в силу соотношения (23) надо знать оценку нормы производной $q(t,x) = Q(t)$, и так как согласно (20)

$$Q'(t) = U(t;A)V'(0) + \frac{1}{\alpha}(I + \gamma A^{-1} - \beta A_1)J'(t),$$

то надо знать оценки производных функции $j(t,x) = J(t)$.

Для образа в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ функции $J'(t)$:

$$j_t(t,x) = U(t;A)\sigma(V(0)) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_{\alpha\beta}(x,\tau)}\sigma'(v(t-\tau,\xi))v_t(t-\tau,\xi)\,d\xi,$$

используя неравенства (26), выводим оценку

$$\|J'(t)\|_C = \|j_t(t,x)\|_C \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\gamma t}|\sigma(\|V(0)\|_C)| + \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_{\alpha\beta}(x,\tau)}|\sigma'(\|v(t-\tau,\xi)\|_C)|\|v_t(t-\tau,\xi)\|_C\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant |\sigma(\|\varphi'\|_C)| + \frac{h_1h_3}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = |\sigma(\|\varphi'\|_C)| + h_1h_3 = h_9.$$

Образ $\partial_x J'(t)$ есть смешанная производная

$$j_{tx}(t,x) = \partial_x U(t;A)\sigma(V(0)) +$$

$$+\frac{1}{4\alpha\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\xi - x - \beta\tau)e^{-\xi_{\alpha\beta}(x,\tau)}\sigma'(v(t-\tau,\xi))v_t(t-\tau,\xi)\,d\xi =$$

$$= \partial_x U(t;A)\sigma(V(0)) + \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\eta e^{-\eta^2}\sigma'(v(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau)))v_t(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau))\,d\eta,$$

для которой, применяя неравенство (10), найдём оценку нормы

$$\|\partial_x J'(t)\|_C = \|j_{tx}(t,x)\|_C \leqslant e^{-\gamma t}|\sigma(\|\varphi'\|_C)|/\sqrt{\pi\alpha t} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\eta|e^{-\eta^2}|\sigma'(H(t-\tau))|\|v_t(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau))\|_C\,d\eta \leqslant \frac{h_{10}}{\sqrt{t}} + h_{11},$$

где $h_{10} = |\sigma(\|\varphi'\|_C)|/\sqrt{\alpha\pi}$ и $h_{11} = h_1h_3/\sqrt{\alpha\gamma}$.

Образ $\partial_x^2 J'(t)$ есть производная третьего порядка:

$$j_{txx}(t,x) = \partial_x^2 U(t;A)\sigma(V(0)) + \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\eta e^{-\eta^2}[\sigma''(v(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau)))v_t(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau))v_x(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau)) +$$

$$+\sigma'(v(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau)))v_{tx}(t-\tau,\eta_{\alpha\beta}(x,\tau))]\,d\eta. \tag{36}$$

Используя неравенства (17), (24), (26), (35) и $\|\partial_x^2 U(t;A)\sigma(V(0))\|_C \leqslant e^{-\gamma t}|\sigma(\|\varphi'\|_C)|/(\alpha t)$, $0 < t \leqslant t_0$, получим оценку функции (36):

$$\|\partial_x^2 J'(t)\|_C = \|j_{txx}(t,x)\|_C \leqslant e^{-\gamma t}|\sigma(\|\varphi'\|_C)|/(\alpha t) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\eta|e^{-\eta^2}\left[|\sigma''(H(t-\tau))|h_2h_3 + |\sigma'(H(t-\tau))|\left(\frac{h_8}{\sqrt{t-\tau}} + h_7\right)\right]d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h_{10}}{t}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}} \int\limits_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int\limits_0^{+\infty} se^{-s^2} \left(h_2h_3h_4 + \left(h_7 + \frac{h_8}{\sqrt{t-\tau}}\right)h_1\right) ds =$$

$$= \frac{h_{10}}{t}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{h_2h_3h_4 + h_1h_7}{\sqrt{\gamma}} + h_1h_8\sqrt{\pi}\right) = \frac{h_{10}}{t}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + h_{12}, \quad 0 < t \leqslant t_0, \tag{37}$$

где обозначено $h_{12} = \alpha^{-1/2}(\gamma^{-1/2}(h_2h_3h_4 + h_1h_7) + h_1h_8\sqrt{\pi})$.

Теперь вернёмся к рассмотрению уравнения (30). Производная по переменной t от обеих частей этого уравнения приводит к соотношению

$$v_{txx}(t,x) = q_{txx}(t,x) - A_2(\sigma'(v(t,x))v_{xx}(t,x) + \sigma''(v(t,x))v_x^2(t,x)), \tag{38}$$

в котором, согласно равенству (20), $q_{txx}(t,x)$ есть образ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ абстрактной функции

$$\partial_x^2 Q'(t) = \partial_x^2 U(t;A)V'(0) + \frac{1}{\alpha}\partial_x^2 J'(t) - \frac{\beta}{\alpha}\partial_x J'(t) + \frac{1}{\alpha}\left[\left(\gamma + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)A_2 - \frac{\beta\gamma}{\alpha}A_1\right]J'(t).$$

Из представления (38), используя неравенства (37), (13), (24) и (31), выводим оценку

$$\|v_{txx}(t,x)\|_C \leqslant \|q_{txx}(t,x)\|_C + \|A_2\|(|\sigma'(\|v(t,x)\|_C)|\|v_{xx}(t,x)\|_C +$$

$$+ |\sigma''(\|v(t,x)\|_C)|\|v_x^2(t,x)\|_C) \leqslant h_{10}\sqrt{\pi}/(t\sqrt{\alpha}) + h_{13}, \quad 0 < t \leqslant t_0,$$

где $h_{13} = h_{12} + \mu(h_1h_6 + h_4h_2^2)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось оценить производную второго порядка $v_{tt}(t,x)$. Использовав равенство (27), имеем

$$V''(t) = (\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x - \gamma I)U(t;A)V'(0) + \partial_x^2 J'(t),$$

следовательно,

$$\|v_{tt}(t,x)\|_C \leqslant \alpha\|\partial_x^2 U(t;A)V'(0)\|_C + \beta\|\partial_x U(t;A)V'(0)\|_C + \gamma\|U(t;A)V'(0)\|_C + \|\partial_x^2 J'(t)\|_C \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\gamma t}(\|\psi'\|_C/t + \beta\|\psi'\|_C/\sqrt{\alpha\pi t} + \gamma\|\psi'\|_C) + \frac{h_1h_2}{\sqrt{\alpha\gamma}}, \quad 0 < t \leqslant t_0.$$

2. Связь между решениями уравнений (1) и (4). В дальнейших рассуждениях $L_2(\mathbb{R}^1)$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом, а $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ – пространство Соболева. Напомним определения скалярного произведения $(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\psi(x)\,dx$ и нормы $\|\varphi\|_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,dx)^{1/2}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ и оценку

$$\|g\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}^1}|g(x)| \leqslant \|g\|_{W_2^1} = (\|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2)^{1/2}, \tag{39}$$

справедливую для функций $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]\bigcap W_2^1(\mathbb{R}^1)$, причём если $g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, то предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x \to \pm\infty$ равен нулю (см. [12]).

Лемма. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $\sigma'(0) = 0$ в дополнение к условиям (3), а классические решения $u(t,x)$ и $v(t,x)$ уравнений (1) и (4) и их частные производные $u_t(t,x)$ и $v_t(t,x)$ для всех значений $t \in [0,t_0]$ по переменной x принадлежат пересечению пространств $C[\mathbb{R}^1]$ и $W_2^1(\mathbb{R}^1)$. Тогда из существования локального классического решения $v = v(t,x)$, $t \in [0,t_0]$, уравнения (4) следует существование соответствующего классического решения $u = u(t,x)$ уравнения (1) на том же отрезке $[0,t_0]$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} v(t,x) = \lim_{x\to\pm\infty} v_x(t,x) = \lim_{x\to\pm\infty} v_t(t,x) = \lim_{x\to\pm\infty} v_{tx}(t,x) = 0,$$

поэтому $\int_{-\infty}^{x} v_{t\xi}(t,\xi)\,d\xi = v_t(t,x)$ и $\int_{-\infty}^{x} v_{t\xi\xi}(t,\xi)\,d\xi = v_{tx}(t,x)$. Далее, учитывая непрерывность функции $\sigma'(\cdot)$ и равенство $\sigma'(0)=0$, получим $\int_{-\infty}^{x} (\sigma(v(t,\xi)))_{\xi\xi}\,d\xi = (\sigma(v(t,x)))_x$. Используя полученные представления, убеждаемся, что функция $u(t,x)=\int_{-\infty}^{x} v(t,\xi)\,d\xi$ является решением уравнения (1).

3. Условия существования глобального решения задачи Коши (1), (2). Полагая $t\in[0,t_0]$, введём в рассмотрение два функционала, связанных с уравнениями (1) и (4):

$$F_1(t) = (u,u)+(u_x,u_x)+(u_{xx},u_{xx}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u^2+u_x^2+u_{xx}^2)\,dx$$

и

$$F_2(t) = (u_t,u_t)+(u_{tx},u_{tx})+(u_{txx},u_{txx}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2+u_{tx}^2+u_{txx}^2)\,dx. \qquad (40)$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы и теоремы 1, и пусть параметры уравнения (1) удовлетворяют условиям* $\alpha,\gamma\geqslant 2$ *и* $\beta\leqslant 1$, *а начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют условию* $\gamma\|\varphi\|^2_{W_2^1}+\alpha\|\varphi'\|^2_{W_2^1}+2\|\psi\|_2^2\geqslant 2(\varphi+\varphi'',\psi)$. *Тогда существует единственное глобальное классическое решение* $u=u(t,x)\in C[\mathbb{R}^1]\bigcap W_2^1(\mathbb{R}^1)$, $t\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}^1$, *задачи Коши (1), (2), для которого в пространстве* $C[\mathbb{R}^1]$ *справедлива оценка*

$$\|u(t,x)\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u(t,x)|\leqslant c_1e^{c_2t}, \quad c_{1,2}=\mathrm{const}\geqslant 0,$$

причём частные производные решения $u_x(t,x)$, $u_t(t,x)$, $u_{tx}(x,t)$ *для* $t\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}^1$ *также принадлежат пересечению* $C[\mathbb{R}^1]\bigcap W_2^1(\mathbb{R}^1)$.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (1) на $u=u(t,x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по переменной x. Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u_x(t,x)=0$, получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\alpha\|u_x\|_2^2+\gamma\|u\|_2^2) = (u,\sigma'(u_x)u_{xx}) - \beta(u_x,u_t) - (u,u_{tt}), \qquad (41)$$

следовательно, интегрируя далее по переменной t, имеем

$$\alpha\|u_x\|_2^2+\gamma\|u\|_2^2 = \alpha\|\varphi'\|_2^2+\gamma\|\varphi\|_2^2 +$$
$$+2\int\limits_0^t (u,\sigma'(u_x)u_{xx})\,d\tau - 2\beta\int\limits_0^t (u_x,u_\tau)\,d\tau - 2\int\limits_0^t (u,u_{\tau\tau})\,d\tau. \qquad (42)$$

Аналогично, умножив обе части уравнения (1) на u_{xx}, выводим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\alpha\|u_{xx}\|_2^2+\gamma\|u_x\|_2^2) = (u_{xx},u_{tt}) - \beta(u_{xx},u_{tx}) - (u_{xx}^2,\sigma'(u_x)), \qquad (43)$$

откуда следует

$$\alpha\|u_{xx}\|_2^2+\gamma\|u_x\|_2^2 = \alpha\|\varphi''\|_2^2+\gamma\|\varphi'\|_2^2 +$$
$$+2\int\limits_0^t (u_{xx},u_{\tau\tau})\,d\tau - 2\beta\int\limits_0^t (u_{xx},u_{\tau x})\,d\tau - 2\int\limits_0^t (u_{xx}^2,\sigma'(u_x))\,d\tau. \qquad (44)$$

Складывая равенства (42) и (44), получаем

$$\gamma\|u\|_2^2+(\alpha+\gamma)\|u_x\|_2^2+\alpha\|u_{xx}\|_2^2=$$

$$=\gamma\|\varphi\|^2_{W_2^1}+\alpha\|\varphi'\|^2_{W_2^1}+2\int\limits_0^t(u,\sigma'(u_x)u_{xx})\,d\tau-2\beta\int\limits_0^t(u_x,u_\tau)\,d\tau-2\int\limits_0^t(u,u_{\tau\tau})\,d\tau+$$

$$+2\int\limits_0^t(u_{xx},u_{\tau\tau})\,d\tau-2\beta\int\limits_0^t(u_{xx},u_{\tau x})\,d\tau-2\int\limits_0^t(u_{xx}^2,\sigma'(u_x))\,d\tau. \tag{45}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, интегрируя по частям и используя условие (3), последовательно рассмотрим интегралы в правой части равенства (45):

1) $\displaystyle\int\limits_0^t(u,\sigma'(u_x)u_{xx})\,d\tau\leqslant\frac12\int\limits_0^t(\|u\|_2^2+\|\sigma'(u_x)u_{xx}\|_2^2)\,d\tau\leqslant\frac12\biggl(\int\limits_0^t\|u\|_2^2\,d\tau+h_1^2\int\limits_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau\biggr)$,

так как

$$\int\limits_0^t\|\sigma'(u_x)u_{xx}\|_2^2\,d\tau\leqslant\int\limits_0^t\biggl(\biggl|\sigma'\biggl(\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u_x|\biggr)\biggr|\biggr)^2\biggl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\,dx\biggr)\,d\tau\leqslant h_1^2\int\limits_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau;$$

2) $\displaystyle\int\limits_0^t(u_x,u_\tau)\,d\tau\leqslant\frac12\biggl(\int\limits_0^t\|u_x\|_2^2\,d\tau+\int\limits_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau\biggr)$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^t(u,u_{\tau\tau})\,d\tau=\int\limits_0^t[(u,u_\tau)_\tau-(u_\tau,u_\tau)]\,d\tau=(u,u_\tau)|_0^t-\int\limits_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau\leqslant(\|u\|_2^2+\|u_t\|_2^2)/2-$
$-(\varphi,\psi)$;

4) $\displaystyle\int\limits_0^t(u_{xx},u_{\tau\tau})\,d\tau=\int\limits_0^t[(u_{xx},u_\tau)_\tau-(u_{\tau xx},u_\tau)]\,d\tau=(u_{xx},u_t)-(\varphi'',\psi)+\int\limits_0^t(u_{\tau x},u_{\tau x})\,d\tau\leqslant$

$\displaystyle\leqslant(\|u_t\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2)/2-(\varphi'',\psi)+\int\limits_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^t(u_{xx},u_{x\tau})\,d\tau\leqslant\frac12\biggl(\int\limits_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau+\int\limits_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau\biggr)$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^t(u_{xx}^2,\sigma'(u_x))\,d\tau=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\sigma'(u_x)\,dx\leqslant\int\limits_0^t\biggl|\sigma'\biggl(\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u_x|\biggr)\biggr|\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau\leqslant h_1\int\limits_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau$.

С учётом найденных оценок интегралов и обозначения

$$h_{14}=\gamma\|\varphi\|^2_{W_2^1}+\alpha\|\varphi'\|^2_{W_2^1}-2(\varphi+\varphi'',\psi)$$

из (45) получим

$$(\gamma-1)\|u\|_2^2+(\alpha+\gamma)\|u_x\|_2^2+(\alpha-1)\|u_{xx}\|_2^2\leqslant h_{14}+2\|u_t\|_2^2+\beta\int\limits_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau+(\beta+2)\int\limits_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t \|u\|_2^2\,d\tau+\beta\int\limits_0^t \|u_x\|_2^2\,d\tau+(h_1^2+2h_1+\beta)\int\limits_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau. \tag{46}$$

Умножим обе части уравнения (1) на u_t и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по переменной x. Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u_t(t,x)=0$, получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2+\alpha\|u_{tx}\|_2^2+\gamma\|u_t\|_2^2=(u_t,\sigma'(u_x)u_{xx}), \tag{47}$$

из которого с учётом неравенства Коши–Буняковского и условия (3) следует неравенство

$$\|u_t\|_2^2+(2\gamma-1)\int\limits_0^t \|u_\tau\|_2^2\,d\tau+2\alpha\int\limits_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau\leqslant\|\psi\|_2^2+h_1^2\int\limits_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau. \tag{48}$$

Пусть оба коэффициента α и γ уравнения (1) не меньше, чем величина $(\beta/2+1)/2$, тогда, применив к неравенству (44) оценку (48), получим

$$(\gamma-1)\|u\|_2^2+(\alpha+\gamma)\|u_x\|_2^2+(\alpha-1)\|u_{xx}\|_2^2\leqslant$$

$$\leqslant h_{14}+2\|\psi\|_2^2+\int\limits_0^t \|u\|_2^2\,d\tau+\beta\int\limits_0^t \|u_x\|_2^2\,d\tau+(2h_1^2+2h_1+\beta)\int\limits_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau.$$

Отсюда, полагая, что параметры $\alpha\geqslant 2$ и $\gamma\geqslant 2$, и обозначая $h_{15}=h_{14}+2\|\psi\|_2^2$ и $h_{16}=2h_1^2+{}$ $+\,2h_1+\beta+1$, выводим интегральное неравенство

$$F_1(t)\leqslant h_{15}+h_{16}\int\limits_0^t F_1(\tau)\,d\tau,\quad t\in[0,t_0]. \tag{49}$$

Потребуем, чтобы начальные функции $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(x)$ удовлетворяли соотношению $\gamma\|\varphi\|_{W_2^1}^2+\alpha\|\varphi'\|_{W_2^1}^2+2\|\psi\|_2^2-2(\varphi+\varphi'',\psi)\geqslant 0$, тогда к неравенству (49) применима лемма Гронуолла и, значит, на всей временно́й полуоси $t\geqslant 0$ справедлива оценка

$$F_1(t)=\|u\|_2^2+\|u_x\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2\leqslant h_{15}e^{h_{16}t},\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+^1. \tag{50}$$

Применив полученную оценку (50) к неравенству (48), приходим к интегральному неравенству

$$\|u_t\|_2^2\leqslant\|\psi\|_2^2+h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}/h_{16}+\int\limits_0^t \|u_\tau\|_2^2\,d\tau,$$

и, следовательно, по лемме Гронуолла имеет место оценка

$$\|u_t\|_2^2\leqslant S_1(t)=\|\psi\|_2^2+h_1^2\frac{h_{15}}{h_{16}}e^{h_{16}t}+\bigg(\|\psi\|_2^2t+h_1^2\frac{h_{15}}{h_{16}^2}e^{h_{16}t}\bigg)e^t,\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+^1. \tag{51}$$

Умножим обе части уравнения (1) на u_{tt} и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по x. Тогда, интегрируя по частям и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u_{tx}(t,x)=0$, получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\alpha\|u_{tx}\|_2^2+\gamma\|u_t\|_2^2)+\|u_{tt}\|_2^2=\beta(u_{tx},u_{tt})+(\sigma'(u_x)u_{xx},u_{tt}), \tag{52}$$

из которого, используя условие (3) и обозначая $h_{17}=\|\psi\|^2_{W^1_2}\max\{\alpha,\gamma\}$, следует цепочка неравенств

$$\alpha\|u_{tx}\|_2^2+\gamma\|u_t\|_2^2+2\int\limits_0^t\|u_{\tau\tau}\|_2^2\,d\tau\leqslant h_{17}+2\beta\int\limits_0^t(u_{tx},u_{\tau\tau})\,d\tau+2\int\limits_0^t(\sigma'(u_x)u_{xx},u_{\tau\tau})\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant h_{17}+\beta\biggl(\int\limits_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau+\int\limits_0^t\|u_{\tau\tau}\|_2^2\,d\tau\biggr)+h_1^2\int\limits_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau+\int\limits_0^t\|u_{\tau\tau}\|_2^2\,d\tau.$$

Отсюда с учётом (50) выводим

$$\alpha\|u_{tx}\|_2^2+\gamma\|u_t\|_2^2+(1-\beta)\int\limits_0^t\|u_{\tau\tau}\|_2^2\,d\tau\leqslant h_{17}+h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}/h_{16}+\beta\int\limits_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau$$

и, положив $\beta\leqslant 1$, приходим к интегральному неравенству

$$\|u_{tx}\|_2^2\leqslant h_{17}+h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}/h_{16}+\beta\int\limits_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau.$$

Тогда в силу леммы Гронуолла получаем оценку

$$\|u_{tx}\|_2^2\leqslant S_2(t)=h_{17}+h_1^2\frac{h_{15}}{h_{16}}e^{h_{16}t}+\beta\biggl(h_{17}t+h_1^2\frac{h_{15}}{h_{16}^2}e^{h_{16}t}\biggr)e^{\beta t},\quad t\in\overline{\mathbb{R}}^1_+. \tag{53}$$

Умножим обе части уравнения (1) на u_{txx} и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по x. Интегрируя по частям и учитывая, что $(u_{tx},u_{txx})=0$, получаем равенство

$$\alpha\|u_{txx}\|_2^2+\gamma\|u_{tx}\|_2^2+\frac{d}{dt}\|u_{tx}\|_2^2=-(\sigma'(u_x)u_{xx},u_{txx}),$$

из которого, уменьшая левую часть, используя неравенство Коши–Буняковского и оценку (50), следует цепочка неравенств

$$\alpha\|u_{txx}\|_2^2\leqslant\|\sigma'(u_x)u_{xx}\|_2\|u_{txx}\|_2+\biggl|\frac{d}{dt}\|u_{tx}\|_2^2\biggr|\leqslant\frac12(h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}+\|u_{txx}\|_2^2)+\biggl|\frac{d}{dt}\|u_{tx}\|_2^2\biggr|,$$

и так как $\alpha\geqslant 2$, то

$$\|u_{txx}\|_2^2\leqslant\frac12h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}+\biggl|\frac{d}{dt}\|u_{tx}\|_2^2\biggr|. \tag{54}$$

Вернёмся к равенству (47): уменьшив его левую часть и одновременно применив неравенство Коши–Буняковского к правой части с последующим применением оценок (50) и (51), получим цепочку неравенств

$$\biggl|\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2\biggr|\leqslant 2|(u_t,\sigma'(u_x)u_{xx})|\leqslant\|u_t\|_2^2+h_1^2\|u_{xx}\|_2^2\leqslant S_1(t)+h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}$$

и, значит,

$$\biggl|\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2\biggr|\leqslant S_1(t)+h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}.$$

Теперь вернёмся к равенству (52): применим неравенство Коши–Буняковского к правой части (52) с последующим применением оценок (50) и (53) и получим неравенства

$$\frac{d}{dt}(\alpha\|u_{tx}\|_2^2+\gamma\|u_t\|_2^2)+2\|u_{tt}\|_2^2\leqslant\beta\|u_{tx}\|_2^2+\beta\|u_{tt}\|_2^2+h_1^2\|u_{xx}\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2\leqslant$$

$$\leqslant(\beta+1)\|u_{tt}\|_2^2+S_2(t)+h_1^2h_{15}e^{h_{16}t},$$

откуда (так как $\alpha\geqslant 2$, а $\beta\leqslant 1$) имеем

$$\alpha\left|\frac{d}{dt}\|u_{tx}\|_2^2\right|-\gamma\left|\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2\right|\leqslant\alpha\frac{d}{dt}\|u_{tx}\|_2^2+\gamma\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2+(1-\beta)\|u_{tt}\|_2^2\leqslant S_2(t)+h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}$$

и, значит,

$$\left|\frac{d}{dt}\|u_{tx}\|_2^2\right|\leqslant\gamma S_1(t)+S_2(t)+(1+\gamma)h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}. \tag{55}$$

Далее из неравенств (54) и (55) выводим оценку

$$\|u_{txx}\|_2^2\leqslant\gamma S_1(t)+S_2(t)+\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}. \tag{56}$$

Таким образом, из неравенств (51), (53) и (56) вытекает оценка на всей временно́й полуоси $t\geqslant 0$ функционала (40):

$$F_2(t)=\|u_t\|_2^2+\|u_{tx}\|_2^2+\|u_{txx}\|_2^2\leqslant(1+\gamma)S_1(t)+2S_2(t)+\left(\frac{3}{2}+\gamma\right)h_1^2h_{15}e^{h_{16}t}. \tag{57}$$

Из априорных оценок (50) и (57) следует, что классические решения $u=u(t,x)$ и $v= =v(t,x)$ уравнений (1) и (4) соответственно принадлежат пространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ для всех $t\geqslant 0$, причём в силу неравенств (39) из (50) выводим оценку нормы решения $u=u(t,x)$ уравнения (1) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$\|u(t,x)\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u(t,x)|\leqslant\sqrt{h_{15}}e^{h_{16}t/2},\quad t\geqslant 0,$$

обеспечивающую*) существование глобального решения задачи Коши (1), (2).

4. Условия разрушения решения задачи Коши (1), (2) на конечном временно́м отрезке. Введём в рассмотрение функционалы, связанные с уравнением (1):

$$f_1(t)=(u,u)+(u_x,u_x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(u^2+u_x^2)\,dx,\quad t\in[0,t_0], \tag{58}$$

и

$$f_2(t)=(u_t,u_t)+(u_{tx},u_{tx})=\int_{-\infty}^{+\infty}(u_t^2+u_{tx}^2)\,dx,\quad t\in[0,t_0]. \tag{59}$$

---

*) Здесь, учитывая априорные оценки (50) и (57), используется следующий алгоритм [12]: принимаем $v(t_0,x)$ за новую начальную функцию и отмечаем, что функция $v(t_0,x)$ обладает тем же набором свойств, которые, будучи допущенными для функции $v(0,x)$, позволили доказать существование как классического решения $v(t,x)$ уравнения (4) на отрезке $0\leqslant t\leqslant t_0$, так и соответствующего ему решения $u(t,x)$ уравнения (1) на том же отрезке $[0,t_0]$, классическое решение $v(t,x)$ с отрезка $[0,t_0]$ продолжается до классического решения $v(t,x)$, $t\in[0,t_0+t_1]$, где величина t_1 зависит от параметров α, β, γ, начальных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и нелинейности $\sigma(\cdot)$. Повторяя этот процесс достаточно большое число раз, получим неограниченное расширение временно́го интервала, в течение которого гарантируется решение, т.е. получим классическое решение задачи Коши для уравнения (1) на произвольном временно́м интервале.

Исследуем вопрос о разрушении решения уравнения (1) на некотором конечном временно́м отрезке $[0,t_{01}]\subseteq[0,t_0]$, т.е. получим достаточные условия возникновения разрыва второго рода для функционала $f_1(t)$. Отрезок $[0,t_{01}]$ выбираем так, чтобы на нем выполнялось требование $f_1(t)>0$, которое следует из начального условия $f_1(0)=\|\varphi\|^2_{W_2^1}>0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы и теоремы 1, и пусть параметры* α, β, γ, *нелинейность* $\sigma(\cdot)$ *и начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют требованиям:*

$$\alpha>1+2\max_{\tau\in[0,t_0]}|\sigma'(H(\tau))|,\quad \gamma>1,\quad \beta<1,$$

$$f_1''(0)+h_{25}f_1(0)+h_{34}\geqslant 0,\quad f_1'(0)>\left(4h_{37}/(h_{33}-4)+2\sqrt{h_{40}/(h_{33}-4)}\right)f_1(0)>0,$$

в которых постоянные величины $h_i=h_i(\alpha,\beta,\gamma;\varphi,\psi;\sigma)$ *определяются в ходе доказательства теоремы. Тогда решение разрушается за конечное время* T_0, *и для времени существования решения справедлива оценка сверху*

$$t_0<T_0=\frac{(f_1(0))^{1-h_{33}/4}}{h_{41}},$$

притом для функционала (58) имеет место оценка снизу

$$f_1(t)\geqslant\frac{e^{4h_{37}t/(h_{33}-4)}}{\left[(f_1(0))^{1-h_{33}/4}-h_{41}t\right]^{4/(h_{33}-4)}}.$$

Доказательство. Применим к квадрату производной $f_1'(t)=2(u,u_t)+2(u_x,u_{tx})$ неравенство Коши–Буняковского и получим вспомогательную оценку

$$(f_1'(t))^2\leqslant 4f_1(t)f_2(t).\tag{60}$$

Вычисляя производную второго порядка функционала (58), выводим равенство, связывающее функционалы (58) и (59):

$$f_2(t)=\frac{1}{2}f_1''(t)+(u_{xx}-u,u_{tt}).\tag{61}$$

Из равенства (41) имеем

$$(u,u_{tt})=(u,\sigma'(u_x)u_{xx})-\beta(u_x,u_t)-\alpha(u_x,u_{tx})-\gamma(u,u_t),\tag{62}$$

следовательно, применив неравенство Коши–Буняковского, получим цепочку неравенств

$$|(u,u_{tt})|\leqslant\frac{1+\gamma}{2}\|u\|_2^2+\frac{\alpha+\beta}{2}\|u_x\|_2^2+\frac{\beta+\gamma}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{\alpha}{2}\|u_{tx}\|_2^2+\frac{h_1^2}{2}\|u_{xx}\|_2^2\leqslant$$

$$\leqslant h_{18}f_1(t)+h_{19}f_2(t)+\frac{h_1^2}{2}\|u_{xx}\|_2^2,$$

где обозначено $h_{18}=\max\{(\alpha+\beta)/2,(1+\gamma)/2\}$ и $h_{19}=\max\{\alpha/2,(\beta+\gamma)/2\}$.

Аналогично из равенства (43) имеем

$$(u_{xx},u_{tt})=(u_{xx}^2,\sigma'(u_x))+\beta(u_{xx},u_{tx})+\alpha(u_x,u_{tx})+\gamma(u,u_t)\tag{63}$$

и, значит,

$$|(u_{xx},u_{tt})|\leqslant\frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2+\frac{\alpha}{2}\|u_x\|_2^2+\frac{\gamma}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{\alpha+\beta}{2}\|u_{tx}\|_2^2+\left(\frac{\beta}{2}+h_1\right)\|u_{xx}\|_2^2\leqslant$$

$$\leqslant h_{19}f_1(t)+h_{20}f_2(t)+\left(\frac{\beta}{2}+h_1\right)\|u_{xx}\|_2^2,$$

где обозначено $h_{20}=\max\{\alpha/2,\gamma/2\}$ и $h_{21}=\max\{(\alpha+\beta)/2,\gamma/2\}$.

Одновременно рассмотрев соотношения (61)–(63), выводим равенство

$$\frac{1}{2}f_1''(t)=f_2(t)+(u,u_{tt})-(u_{xx},u_{tt})=f_2(t)+(u,\sigma'(u_x)u_{xx})-(u_{xx}^2,\sigma'(u_x))-$$

$$-2\gamma(u,u_t)-\beta[(u_x,u_t)+(u_{xx},u_{tx})]-2\alpha(u_x,u_{tx}),\tag{64}$$

используемое для вычисления значения производной $f_1''(t)$ в нуле.

Учитывая уравнение (1) и равенства $(u_t,u_{tx})=0$ и $(u_{txx},u_{tx})=0$, найдём производную функционала (59):

$$\frac{1}{2}f_2{}'(t)=(u_t,u_{tt})-(u_{txx},u_{tt})=$$

$$=(u_t,\sigma'(u_x)u_{xx})-\alpha\|u_{tx}\|_2^2-\gamma\|u_t\|_2^2-(u_{txx},\sigma'(u_x)u_{xx})-\alpha\|u_{txx}\|_2^2-\gamma\|u_{tx}\|_2^2,$$

затем, группируя слагаемые и интегрируя, получаем

$$f_2(t)+2\alpha\int\limits_0^t\|u_{\tau xx}\|_2^2\,d\tau+2(\alpha+\gamma)\int\limits_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau+2\gamma\int\limits_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau=$$

$$=\|\psi\|_{W_2^1}^2+2\int\limits_0^t(u_\tau,\sigma'(u_x)u_{xx})\,d\tau-2\int\limits_0^t(u_{\tau xx},\sigma'(u_x)u_{xx})\,d\tau.$$

Далее, вычисляя второй интеграл в правой части последнего равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_0^t\sigma'(u_x)(u_{xx}^2)_\tau\,d\tau=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\sigma'(u_x)u_{xx}^2|_0^t-\int\limits_0^t u_{xx}^2\sigma''(u_x)u_{\tau x}\,d\tau\right]dx=$$

$$=(\sigma'(u_x),u_{xx}^2)-(\sigma'(\varphi'),(\varphi''(x))^2)-\int\limits_0^t(u_{\tau x},\sigma''(u_x)u_{xx}^2)\,d\tau$$

и обозначая $h_{22}=\|\psi\|_{W_2^1}^2+(\sigma'(\varphi'),(\varphi''(x))^2)$, получаем

$$f_2(t)+2\alpha\int\limits_0^t\|u_{\tau xx}\|_2^2\,d\tau+2(\alpha+\gamma)\int\limits_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau+2\gamma\int\limits_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau=$$

$$=h_{22}-(u_{xx}^2,\sigma'(u_x))+2\int\limits_0^t(u_\tau,\sigma'(u_x)u_{xx})\,d\tau+\int\limits_0^t(u_{\tau x},\sigma''(u_x)u_{xx}^2)\,d\tau.\tag{65}$$

Умножим обе части равенства (65) на пока неопределённое положительное число $k\geqslant 2$ и сложим равенства (64) и (65), предварительно записав (64) в виде

$$2f_2(t)=f_1''(t)-2(u,\sigma'(u_x)u_{xx})+2(u_{xx}^2,\sigma'(u_x))+4\alpha(u_x,u_{tx})+2\beta[(u_x,u_t)+(u_{xx},u_{tx})]+4\gamma(u,u_t).$$

Тогда, используя оценку (24) и обозначая

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^1\\ t\in[0,t_0]}}(\sigma''(u_x))^2u_{xx}^2\leqslant h_2^2\max_{t\in[0,t_0]}(\sigma''(H(t)))^2=h_{23},$$

получаем соотношения

$$(2+k)f_2(t) + 2k\alpha\int\limits_0^t \|u_{\tau xx}\|_2^2\,d\tau + 2k(\alpha+\gamma)\int\limits_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau + 2k\gamma\int\limits_0^t \|u_\tau\|_2^2\,d\tau =$$

$$= kh_{22} + 2k\int\limits_0^t (u_\tau, \sigma'(u_x)u_{xx})\,d\tau + k\int\limits_0^t (u_{\tau x}, \sigma''(u_x)u_{xx}^2)\,d\tau - (k-2)(u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) -$$

$$- 2(u, \sigma'(u_x)u_{xx}) + f_1''(t) + 4\alpha(u_x, u_{tx}) + 2\beta[(u_x, u_t) + (u_{xx}, u_{tx})] + 4\gamma(u, u_t) \leqslant$$

$$\leqslant kh_{22} + f_1''(t) + (1+2\gamma)\|u\|_2^2 + (2\alpha+\beta)\|u_x\|_2^2 + (\beta+2\gamma)\|u_t\|_2^2 + (2\alpha+\beta)\|u_{tx}\|_2^2 +$$

$$+ k\int\limits_0^t \|u_\tau\|_2^2\,d\tau + \frac{k}{2}\int\limits_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau + kh_1^2\int\limits_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau + \frac{k}{2}\int\limits_0^t \|\sigma''(u_x)u_{xx}^2\|_2^2\,d\tau +$$

$$+ (\beta + h_1^2)\|u_{xx}\|_2^2 + |k-2||(u_{xx}^2, \sigma'(u_x))| \leqslant$$

$$\leqslant kh_{22} + f_1''(t) + (2\alpha+\beta+2\gamma+1)f_1(t) + 2(\alpha+\beta+\gamma)f_2(t) + k\int\limits_0^t \|u_\tau\|_2^2\,d\tau +$$

$$+ \frac{k}{2}\int\limits_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau + (\beta + h_1^2 + |k-2|h_1)\|u_{xx}\|_2^2 + k\left(h_1^2 + \frac{h_{23}}{2}\right)\int\limits_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau,$$

откуда выводим неравенство

$$(k+2-2(\alpha+\beta+\gamma))f_2(t) + k\left(2\alpha+2\gamma-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau + k(2\gamma-1)\int\limits_0^t \|u_\tau\|_2^2\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant kh_{22} + f_1''(t) + (2\alpha+\beta+2\gamma+1)f_1(t) + (\beta + h_1^2 + |k-2|h_1)\|u_{xx}\|_2^2 + k(h_1^2 + h_{23}/2)\int\limits_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau.$$

Пусть $\gamma \geqslant 1/2$. Уменьшив левую часть последнего неравенства и обозначив $h_{24} = k + 2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)$, $h_{25} = 2\alpha+\beta+2\gamma+1$, $h_{26} = \beta + h_1^2 + |k-2|h_1$, $h_{27} = k(h_1^2 + h_{23}/2)$, $E_1(t) = kh_{22} + f_1''(t) + h_{25}f_1(t)$, имеем

$$h_{24}f_2(t) \leqslant E_1(t) + h_{26}\|u_{xx}\|_2^2 + h_{27}\int\limits_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau. \tag{66}$$

Вернёмся к рассмотрению неравенства (46): уменьшая его левую часть и увеличивая правую, полагая $\alpha > 1$ и $\gamma > 1$, обозначая $h_{28} = (\alpha-1)^{-1}(h_1^2 + 2h_1 + \beta)$ и

$$E_2(t) = (\alpha-1)^{-1}\left(h_{14} + 2f_2(t) + (\beta+2)\int\limits_0^t f_2(\tau)\,d\tau + (\beta+1)\int\limits_0^t f_1(\tau)\,d\tau\right),$$

получаем интегральное неравенство

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant E_2(t) + h_{28}\int\limits_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau,$$

откуда в силу леммы Гронуолла выводим оценку

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant E_2(t) + h_{28}\int\limits_0^t E_2(\tau)e^{h_{28}(t-\tau)}\,d\tau \leqslant E_2(t) + h_{29}\int\limits_0^t E_2(\tau)\,d\tau, \tag{67}$$

где обозначено $h_{29} = h_{28}e^{h_{28}t_0}$.

Интегрируя по частям

$$\int\limits_0^t \biggl(\int\limits_0^\tau f_i(s)\,ds\biggr)d\tau = \tau\int\limits_0^\tau f_i(s)\,ds\Big|_0^t - \int\limits_0^t \tau f_i(\tau)\,d\tau \leqslant t\int\limits_0^t f_i(\tau)\,d\tau \leqslant t_0\int\limits_0^t f_i(\tau)\,d\tau, \quad i=1,2,$$

оценим интеграл в (67):

$$\int\limits_0^t E_2(\tau)\,d\tau \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\biggl(h_{14}t_0 + 2\int\limits_0^t f_2(\tau)\,d\tau + (\beta+2)t_0\int\limits_0^t f_2(\tau)\,d\tau + (\beta+1)\int\limits_0^t f_1(\tau)\,d\tau\biggr).$$

Применим полученную оценку для увеличения правой части неравенства (66) и обозначим $h_{30} = (\alpha-1)^{-1}h_{14}(1+h_{29}t_0)$, $h_{31} = (\alpha-1)^{-1}[\beta+2+(2+(\beta+2)t_0)h_{29}]$, $h_{32} = (\alpha-1)^{-1}(\beta+1)\times$ $\times(1+h_{29}t_0)$. В результате имеем

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant h_{30} + \frac{2}{\alpha-1}f_2(t) + h_{31}\int\limits_0^t f_2(\tau)\,d\tau + h_{32}\int\limits_0^t f_1(\tau)\,d\tau. \tag{68}$$

Теперь вернёмся к рассмотрению неравенства (66): применив (68), увеличим его правую часть:

$$h_{24}f_2(t) \leqslant kh_{22} + (h_{26}+h_{27}t_0)h_{30} + f_1''(t) + h_{25}f_1(t) + \frac{2h_{26}}{\alpha-1}f_2(t) +$$

$$+\biggl((h_{26}+h_{27}t_0)h_{31} + \frac{2h_{27}}{\alpha-1}\biggr)\int\limits_0^t f_2(\tau)\,d\tau + (h_{26}+h_{27}t_0)h_{32}\int\limits_0^t f_1(\tau)\,d\tau,$$

откуда, полагая

$$\alpha > 2h_1 + 1, \tag{69}$$

обозначая $h_{33} = h_{24} - 2h_{26}/(\alpha-1)$, $h_{34} = kh_{22} + (h_{26}+h_{27}t_0)h_{30}$, $h_{35} = (h_{26}+h_{27}t_0)h_{32}$, $h_{36} = (h_{26}+h_{27}t_0)h_{31} + 2h_{27}/(\alpha-1)$,

$$E_3(t) = h_{34} + f_1''(t) + h_{25}f_1(t) + h_{35}\int\limits_0^t f_1(\tau)\,d\tau$$

и требуя $h_{33} > 0$, что приводит к условию

$$k > 2[(\alpha-1)(\alpha+\beta+\gamma-1) + h_1^2 - 2h_1 + \beta]/(\alpha - 2h_1 - 1),$$

имеем

$$f_2(t) \leqslant \frac{1}{h_{33}}E_3(t) + \frac{h_{36}}{h_{33}}\int\limits_0^t f_2(\tau)\,d\tau. \tag{70}$$

Пусть $h_{34} + f_1''(0) + h_{25} f_1(0) \geqslant 0$, тогда на некотором отрезке $[0, t_{02}] \subseteq [0, t_{01}]$ справедливо неравенство $E_3(t) \geqslant 0$, поэтому к интегральному неравенству (70) применима лемма Гронуолла и, значит, справедлива оценка

$$h_{33} f_2(t) \leqslant E_3(t) + h_{37} \int\limits_0^t E_3(\tau)\, d\tau, \tag{71}$$

где обозначено $h_{37} = e^{t_0 h_{36}/h_{33}} h_{36}/h_{33}$.

Оценивая интеграл в правой части неравенства (71), имеем

$$\int\limits_0^t E_3(\tau)\, d\tau \leqslant h_{34} t_0 + {f_1}'(t) - {f_1}'(0) + (h_{25} + h_{35} t_0) \int\limits_0^t f_1(\tau)\, d\tau. \tag{72}$$

Пусть выполняется условие ${f_1}'(0) = 2[(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi')] > 0$. Тогда на отрезке $[0, t_{03}] \subseteq [0, t_{02}]$ справедливо неравенство ${f_1}'(t) \geqslant 0$, и поэтому справедлива оценка

$$\int\limits_0^t f_1(\tau)\, d\tau = t f_1(t) - \int\limits_0^t \tau f_1'(\tau)\, d\tau \leqslant t_0 f_1(t),$$

с учётом которой неравенство (72) примет вид

$$\int\limits_0^t E_3(\tau)\, d\tau \leqslant h_{34} t_0 + {f_1}'(t) + (h_{25} + h_{35} t_0) t_0 f_1(t). \tag{73}$$

Из (71) и (73), обозначая $h_{38} = h_{34} + h_{37} h_{34} t_0$ и $h_{39} = (h_{25} + h_{35} t_0)(1 + h_{37})$, выводим

$$h_{33} f_2(t) \leqslant f_1''(t) + h_{37} {f_1}'(t) + h_{39} f_1(t) + h_{38}, \quad t \in [0, t_{03}]. \tag{74}$$

Оценивая снизу левую часть неравенства (74) с учётом соотношения (60), получаем

$$f_1(t) f_1''(t) - \frac{h_{33}}{4} (f_1'(t))^2 + h_{37} f_1(t) {f_1}'(t) + h_{39} f_1^2(t) + h_{38} f_1(t) \geqslant 0,$$

причём, так как $f_1(t) \geqslant f_1(0) > 0$ на отрезке $[0, t_{03}]$, то $h_{38} f_1(t) \leqslant (h_{38}/f_1(0)) f_1^2(t)$ и, значит,

$$f_1(t) f_1''(t) - \frac{h_{33}}{4} (f_1'(t))^2 + h_{37} f_1(t) {f_1}'(t) + h_{40} f_1^2(t) \geqslant 0, \quad t \in [0, t_{03}], \tag{75}$$

где обозначено $h_{40} = h_{39} + h_{38}/f_1(0)$.

К полученному обыкновенному дифференциальному неравенству (75) можно применить результат, приведённый в монографии [13, приложение, § 2, формула (2.9)], если потребовать $h_{33}/4 > 1$, и, значит, при выполнении условия (69) справедлива оценка ранее неопределённого числа k:

$$k = k_0 > \max\{2, 2[(\alpha - 1)(\alpha + \beta + \gamma + 1) + \beta + h_1^2 - 2h_1]/(\alpha - 2h_1 - 1)\}.$$

Теперь, полагая во всех соотношениях (в которых фигурирует) число k равным k_0, из неравенства (75) заключаем, что если в дополнении к ранее приведённым условиям потребовать выполнения неравенства

$$f_1'(0) > (4h_{37}/(h_{33} - 4) + 2\sqrt{h_{40}/(h_{33} - 4)}) f_1(0),$$

то время t_0 существования решения не может быть сколь угодно большим: $t_0 < T_0 = (f_1(0))^{1-h_{33}/4}/h_{41}$, где

$$h_{41} = \left(\frac{h_{33}}{4} - 1\right)(f_1(0))^{-h_{33}/4}\left[\left(f_1'(0) - \frac{4h_{37}}{h_{33}-4}f_1(0)\right)^2 - \frac{4h_{40}}{h_{33}-4}(f_1(0))^2\right] > 0,$$

причём для функционала $f_1(t)$ справедлива оценка снизу

$$f_1(t) \geqslant \frac{e^{4h_{37}t/(h_{33}-4)}}{\left[(f_1(0))^{1-h_{33}/4} - h_{41}t\right]^{4/(h_{33}-4)}},$$

и, значит, не существует глобального по времени решения задачи Коши (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
2. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М., 1970.
3. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М., 2002.
4. *Greenberg J.M., McCamy R.C., Mizel V.J.* On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ // J. Math. and Mech. 1968. V. 17. P. 707–728.
5. *Webb G.F.* Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation // Canad. J. Math. 1980. V. 32. № 3. P. 631–643.
6. *Andrews G.* On the existence of solutions to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$ // J. Differ. Equat. 1980. V. 35. № 2. P. 200–231.
7. *Кожанов А.И., Ларькин Н.А., Яненко Н.Н.* Смешанная задача для одного класса уравнений третьего порядка // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22. № 6. С. 81–86.
8. *Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н.* Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск, 1983.
9. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. Т. 28. М., 1990. С. 87–202.
10. *Dragomir S.S.* Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne, 2002.
11. *Appell J., Zabreiko P.P.* Nonlinear Superposition Operators. Cambridge, 1990.
12. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.
13. *Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В.* Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М., 2014.

Академия наук Чеченской Республики,
г. Грозный,
Чеченский государственный педагогический
университет, г. Грозный

Поступила в редакцию 27.06.2022 г.
После доработки 07.11.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.