ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 73–84

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.962.2

ПРОЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ШАГОМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

© 2023 г. Г. А. Курина, Нгуен Тхи Хоай

Алгоритм построения асимптотического решения начальной задачи, содержащего пограничные функции, для слабо нелинейной системы дискретных уравнений с малым шагом в критическом случае при некоторых условиях приведён в статье В.Ф. Бутузова и А.Б. Васильевой (Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 4. С. 650–664). В настоящей работе для построения асимптотики решения этой задачи используются ортогональные проекторы. Такой проекторный подход существенно упрощает понимание алгоритма построения асимптотики и позволяет записать в явном виде задачи, из которых можно найти члены асимптотики решения любого порядка.

DOI: 10.31857/S0374064123010077, EDN: OCIIXC

Посвящается светлой памяти А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова

Введение. Важным классом дискретных (разностных) уравнений, называемых также уравнениями в конечных разностях, являются уравнения с малым шагом. Они возникают, в частности, при дискретизации непрерывных уравнений для численного анализа. Начальные задачи для таких уравнений с малым шагом ε являются сингулярно возмущёнными, поскольку при нулевом значении ε происходит потеря начального условия. Наиболее сложным при этом является так называемый критический случай, когда из вырожденного уравнения (с нулевым значением малого параметра) решение не определяется однозначно.

Асимптотическое решение начальных задач для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае впервые было построено В.Ф. Бутузовым и А.Б. Васильевой в работе [1], результаты которой представлены также в монографии [2, с. 22–27]. Обзор публикаций, посвящённых задачам управления дискретными системами с малым шагом, приведён в [3].

В настоящей статье рассматривается задача из [2, с. 22] вида

$$x(t+\varepsilon)=B(t)x(t)+\varepsilon f(x(t),t,\varepsilon),\quad t=0,\varepsilon,2\varepsilon,\ldots\quad (t\leqslant T), \tag{1}$$

$$x(0)=x^0, \tag{2}$$

где $x(t)\in X$, $\dim X=m$, величина $\varepsilon\geqslant 0$ означает малый параметр.

При некоторых условиях I–III в [2, с. 22–27] построено асимптотическое решение задачи (1), (2), содержащее пограничные функции. Будем рассматривать задачу (1), (2) при тех же условиях.

Условие I. Матрица $B(t)$ при $t\in[0,T]$ имеет k-кратное собственное значение $\lambda(t)\equiv 1$, которому при каждом t соответствует k линейно независимых собственных векторов $v_1(t)$, $v_2(t)$, $\ldots$, $v_k(t)$, а остальные собственные значения удовлетворяют условию $|\lambda_i(t)|<1$.

Условие II. Матрица $B(t)$ и функция $f(x,t,\varepsilon)$ достаточно гладкие по своим аргументам.

Будем использовать достаточно гладкие собственные векторы. В силу условия II существование таких собственных векторов следует из работы [4].

Отметим, что условие II из [2, с. 22] в нашем случае усилено предположением о гладкости всюду, а не в некоторой области пространства переменных.

Условие III, связанное с разрешимостью некоторого уравнения, сформулируем позже.

В отличие от работ [1, 2] здесь для построения асимптотики решения задачи (1), (2) используются ортогональные проекторы. Такой проекторный подход позволяет хорошо понять суть алгоритма А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова, основанного на методе пограничных функций, и представить явные выражения задач для отыскания членов асимптотического решения любого порядка. Заметим, что в [1, 2] предложен алгоритм построения асимптотики решения любого порядка, но записаны явным образом только задачи для отыскания нескольких первых членов асимптотики. Наличие явных формул полезно специалистам, применяющим асимптотические методы для решения практических задач.

Проекторный подход уже использовался в [5, 6] для асимптотического решения начальных задач для сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений двух типов в критическом случае, а также в [7] для построения асимптотического решения нулевого порядка для сингулярно возмущённой линейно-квадратичной задачи управления в критическом случае.

В п. 1 настоящей статьи представлены соотношения для членов разложения решения задачи (1), (2) по целым неотрицательным степеням ε в виде суммы функций, зависящих от t, и пограничных функций, зависящих от аргумента t/ε. В п. 2 вводятся ортогональные проекторы, которые используются при нахождении членов разложения решения. В п. 3 приведён алгоритм построения асимптотического решения задачи (1), (2) нулевого порядка, а в п. 4 – n-го порядка, $n \geqslant 1$. Таблицы в этих пунктах показывают последовательность нахождения членов асимптотики. В п. 5 приводится иллюстративный пример построения асимптотического приближения первого порядка для решения дискретной задачи с малым шагом, рассматриваемого в статье типа, с помощью проекторного подхода.

Далее штрих будет означать транспонирование, I – единичную матрицу.

1. Декомпозиция задачи. Следуя [1], будем искать асимптотическое решение задачи (1), (2) в виде

$$x(t) = \overline{x}(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau,\varepsilon), \tag{3}$$

где

$$\overline{x}(t,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j \overline{x}_j(t), \quad \Pi x(\tau,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j \Pi_j x(\tau), \quad \tau = t/\varepsilon. \tag{4}$$

Функции $\Pi_j x(\tau)$ будут определяться с помощью дополнительного условия

$$\Pi_j x(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty.$$

Ряд $\sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j \overline{x}_j(t)$ с членами, зависящими от аргумента t, называется *регулярным рядом* (см., например, [2, с. 8]), в отличие от *пограничного ряда* $\sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j \Pi_j x(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, состоящего из так называемых *пограничных функций*, которые существенны только для аргументов вблизи точек, где заданы дополнительные условия (в окрестности нуля в рассматриваемом случае).

Как принято в теории сингулярных возмущений, будем использовать представление

$$f(\overline{x}(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau,\varepsilon), t, \varepsilon) \equiv \overline{f} + \Pi f,$$

где

$$\overline{f} = f(\overline{x}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j \overline{f}_j(t),$$

$$\Pi f = f(\overline{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \Pi x(\tau,\varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) - f(\overline{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j \Pi_j f(\tau).$$

Замечание 1. Как и в [2, с. 23], функции $\overline{x}_j(t)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, при построении асимптотики решения будут рассматриваться для всех $t \in [0, T]$. В окончательном же асимптотическом представлении (4) значения $\overline{x}_j(t)$ используются только для $t = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots$ в соответствии с дискретным изменением t в системе (1).

Подставляя разложение (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от t и τ, получаем следующие уравнения для членов рядов (4):

$$\overline{x}_j(t) + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{(j-i)!} \frac{d^{j-i}\overline{x}_i(t)}{dt^{j-i}} = B(t)\overline{x}_j(t) + \overline{f}_{j-1}(t), \tag{5}$$

$$\Pi_j x(\tau+1) = B(0)\Pi_j x(\tau) + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\tau^{j-i}}{(j-i)!} \frac{d^{j-i}B}{dt^{j-i}}(0)\Pi_i x(\tau) + \Pi_{j-1} f(\tau), \tag{6}$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots$

Чтобы записать уравнения (5), (6) в одинаковом виде для любого $j \geqslant 0$, будем считать, что члены разложений с отрицательными индексами равны нулю.

Подставив разложение (3) в (2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, имеем равенства

$$\overline{x}_0(0) + \Pi_0 x(0) = x^0, \tag{7}$$

$$\overline{x}_j(0) + \Pi_j x(0) = 0, \quad j > 0. \tag{8}$$

.

2. Декомпозиция пространства. Положим $A(t) = B(t) - I$. Разложим пространство X в ортогональные суммы (см., например, [8, с. 24])

$$X = \operatorname{Ker} A(t) \bigoplus \operatorname{Im} A(t)' = \operatorname{Ker} A(t)' \bigoplus \operatorname{Im} A(t). \tag{9}$$

Ортогональные проекторы пространства X на подпространства $\operatorname{Ker} A(t)$ и $\operatorname{Ker} A(t)'$ обозначим соответственно через $P(t)$ и $Q(t)$.

Определим $n \times k$-матрицы $V(t)$ и $S(t)$ следующим образом: $V(t) = (v_1(t), \ldots, v_k(t))$ и $S(t) = (s_1(t), \ldots, s_k(t))$, где $s_1(t), \ \ldots, \ s_k(t)$ – собственные векторы матрицы $A(t)'$, соответствующие собственному значению $\lambda(t) = 0$. В силу условия I (линейной независимости собственных векторов) матрицы $V(t)'V(t)$ и $S(t)'S(t)$ размера $k \times k$ обратимы. Нетрудно проверить, что $P(t) = V(t)(V(t)'V(t))^{-1}V(t)'$ и $Q(t) = S(t)(S(t)'S(t))^{-1}S(t)'$ являются ортогональными проекторами пространства X на подпространства $\operatorname{Ker} A(t)$ и $\operatorname{Ker} A(t)'$, соответствующими разложениям (9) пространства X в ортогональные суммы.

Оператор

$$A(t) = (I - Q(t))A(t)(I - P(t)) : \operatorname{Im} A(t)' \longrightarrow \operatorname{Im} A(t)$$

имеет обратный оператор, который будем обозначать через $A(t)^+ = (I - P(t))A(t)^+(I - Q(t))$.

Из условия I следует, что для каждого $t \in [0, T]$ модуль собственных значений оператора $\widetilde{B}(t) = (I - P(t))B(t)(I - P(t)) : \operatorname{Im} A(t)' \to \operatorname{Im} A(t)'$ меньше единицы, и матрица $S(t)'V(t)$ размера $k \times k$ обратима (см. [2, с. 12]).

Из последнего факта вытекает

Лемма 1. *Оператор* $Q(t)P(t) : \operatorname{Ker} A(t) \to \operatorname{Ker} A(t)'$ *обратим при всех* $t \in [0, T]$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда при некотором t существует элемент $x \in \operatorname{Ker} A(t)$ такой, что

$$Q(t)P(t)x = 0. \tag{10}$$

Элемент x представим в виде линейной комбинации векторов $v_j(t)$, $j = \overline{1, k}$, т.е. $x = V(t)c$, где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)'$. Применим к (10) слева оператор $V(t)'$. Учитывая вид проекторов $P(t)$ и $Q(t)$, получаем равенство

$$V(t)'S(t)(S(t)'S(t))^{-1}S(t)'V(t)c = 0.$$

Отсюда в силу обратимости оператора $S(t)'V(t)$ получаем $c = 0$. Значит, $x = 0$, что доказывает обратимость оператора $Q(t)P(t)$.

3. Асимптотическое решение нулевого порядка. Используя введённые проекторы, найдём члены асимптотики решения задачи (1), (2) нулевого порядка. Из (5) при $j=0$ получаем уравнение для $\overline{x}_0(t)$:

$$A(t)\overline{x}_0(t)=0.$$

Следовательно,

$$(I-P(t))\overline{x}_0(t)=0. \tag{11}$$

С учётом (11) находим из (7) начальное значение

$$(I-P(0))\Pi_0x(0)=(I-P(0))x^0. \tag{12}$$

Из (6) при $j=0$ получаем уравнение для $\Pi_0x(\tau)$:

$$\Pi_0x(\tau+1)=B(0)\Pi_0x(\tau). \tag{13}$$

Замечание 2. Легко видеть, что $B(t)|_{\operatorname{Ker}A(t)}=I$. Следовательно, $(I-P(0))B(0)P(0)$ – нулевой оператор, а $P(0)B(0)P(0)$ – тождественный оператор в $\operatorname{Ker}A(0)$.

Ввиду этого замечания уравнение (13) эквивалентно двум уравнениям:

$$(I-P(0))\Pi_0x(\tau+1)=\widetilde{B}(0)(I-P(0))\Pi_0x(\tau), \tag{14}$$

$$P(0)\Pi_0x(\tau+1)=P(0)\Pi_0x(\tau)+P(0)B(0)(I-P(0))\Pi_0x(\tau). \tag{15}$$

Будем использовать следующее легко доказываемое утверждение (см., например, [9, с. 20]).

Лемма 2. *Решение задачи*

$$y(t+1)=Cy(t)+f(t),\quad y(0)=y^0,\quad t=0,1,2,\ldots,$$

определяется по формуле

$$y(t)=C^ty^0+\sum_{i=0}^{t-1}C^{t-i-1}f(i).$$

В силу этой леммы единственным решением начальной задачи (14), (12) является функция

$$(I-P(0))\Pi_0x(\tau)=\widetilde{B}(0)^\tau(I-P(0))x^0. \tag{16}$$

Поскольку спектральный радиус оператора $\widetilde{B}(0)$ меньше единицы, то из лемм 5.6.10 [10, с. 347] и 5.6.11 [10, с. 348] следует

Лемма 3. *Существует норма оператора* $\widetilde{B}(0)$, *меньшая единицы, и* $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\widetilde{B}(0)^\tau=0$.

Следовательно, $(I-P(0))\Pi_0x(\tau)$ является пограничной функцией.

Используя лемму 2, запишем решение уравнения (15)

$$P(0)\Pi_0x(\tau)=P(0)\Pi_0x(0)+\sum_{i=0}^{\tau-1}P(0)B(0)(I-P(0))\Pi_0x(i).$$

Так как $P(0)\Pi_0x(\tau)$ должно стремиться к нулю при $\tau\to+\infty$, то с учётом (16) из последнего равенства имеем

$$P(0)\Pi_0x(0)=-\lim_{\tau\to+\infty}\sum_{i=0}^{\tau-1}P(0)B(0)(I-P(0))\Pi_0x(i)=$$

$$=-\lim_{\tau\to+\infty}\sum_{i=0}^{\tau-1}P(0)B(0)(I-P(0))\widetilde{B}(0)^i(I-P(0))x^0=$$

$$= -P(0)B(0)(I-P(0))\sum_{i=0}^{+\infty}\widetilde{B}(0)^i(I-P(0))x^0.$$

Ввиду леммы 3 последний ряд сходится. Итак,

$$P(0)\Pi_0x(\tau) = -P(0)B(0)(I-P(0))\sum_{i=0}^{+\infty}\widetilde{B}(0)^i(I-P(0))x^0 +$$

$$+\sum_{i=0}^{\tau-1}P(0)B(0)(I-P(0))\widetilde{B}(0)^i(I-P(0))x^0 =$$

$$= -P(0)B(0)(I-P(0))\widetilde{B}(0)^\tau\sum_{i=0}^{+\infty}\widetilde{B}(0)^i(I-P(0))x^0. \tag{17}$$

В силу леммы 3 $P(0)\Pi_0x(\tau)$ является пограничной функцией. Таким образом, пограничная функция $\Pi_0x(\tau)$ найдена. Тогда из (7) можно найти начальное значение

$$P(0)\overline{x}_0(0) = P(0)(x^0 - \Pi_0x(0)). \tag{18}$$

Из (5) при $j=1$ получаем уравнение для $\overline{x}_1(t)$:

$$A(t)\overline{x}_1(t) = -\overline{f}_0(t) + \frac{d\overline{x}_0(t)}{dt},$$

где $\overline{f}_0(t) = f(\overline{x}_0(t),t,0)$.

Принимая во внимание (11), запишем условие разрешимости последнего уравнения:

$$Q(t)\frac{d(P(t)\overline{x}_0(t))}{dt} = Q(t)f(P(t)\overline{x}_0(t),t,0). \tag{19}$$

Учитывая тождество

$$\frac{d(P(t)x(t))}{dt} = \frac{d(P(t)^2x(t))}{dt} = \frac{dP(t)}{dt}P(t)x(t) + P(t)\frac{d(P(t)x(t))}{dt}, \tag{20}$$

из (19) получаем нелинейное уравнение

$$\frac{d(P(t)\overline{x}_0(t))}{dt} = (Q(t)P(t))^{-1}Q(t)\left(-\frac{dP(t)}{dt}P(t)\overline{x}_0(t) + f(P(t)\overline{x}_0(t),t,0)\right) +$$

$$+ (I-P(t))\frac{dP(t)}{dt}P(t)\overline{x}_0(t),$$

совпадающее с (16) из работы [5].

Применив к (20) слева оператор $P(t)$, имеем тождество

$$P(t)\frac{dP(t)}{dt}P(t)x(t) = 0. \tag{21}$$

Поэтому уравнение для $P(t)\overline{x}_0(t)$ можно записать в виде

$$\frac{d(P(t)\overline{x}_0(t))}{dt} = (Q(t)P(t))^{-1}Q(t)\left(-\frac{dP(t)}{dt}P(t)\overline{x}_0(t) + f(P(t)\overline{x}_0(t),t,0)\right) + \frac{dP(t)}{dt}P(t)\overline{x}_0(t). \tag{22}$$

Если $B(t)=B$ – постоянная матрица, то проекторы $P(t)=P$ и $Q(t)=Q$ тоже постоянные, и последнее уравнение примет вид

$$\frac{d(P\overline{x}_0(t))}{dt}=(QP)^{-1}Qf(P\overline{x}_0(t),t,0). \tag{23}$$

Предположим, что выполнено

Условие III. Задача (22), (18) имеет единственное решение на отрезке $[0,T]$.

Аналогичное предположение о разрешимости некоторой начальной задачи для нелинейного уравнения меньшей размерности, чем исходное, было дано в [1] (см. также [2, с. 24]).

При этом условии функция $\overline{x}_0(t)$ однозначно определяется. Следовательно, найдена асимптотика нулевого порядка решения задачи (1), (2) (табл. 1).

Таблица 1. Последовательность нахождения членов асимптотики нулевого порядка

Члены асимптотики	Формулы
$(I-P(t))\overline{x}_0(t)=0$	(11)
$(I-P(0))\Pi_0x(\tau)$	(16)
$P(0)\Pi_0x(\tau)$	(17)
$P(t)\overline{x}_0(t)$	(22), (18)

4. Асимптотические решения высших порядков. Предположим, что члены $\overline{x}_j(t)$ и $\Pi_jx(\tau)$ разложений (4), $j=\overline{0,n-1}$, $n\geqslant 1$, уже найдены. Определим $\overline{x}_n(t)$ и $\Pi_nx(\tau)$.

Из (5) при $j=n$ получаем равенство

$$A(t)\overline{x}_n(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n-i)!}\frac{d^{n-i}\overline{x}_i(t)}{dt^{n-i}}-\overline{f}_{n-1}(t),$$

где правая часть известна. Применив к этому уравнению оператор $I-Q(t)$, имеем

$$(I-Q(t))A(t)(I-P(t))\overline{x}_n(t)=(I-Q(t))\biggl(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n-i)!}\frac{d^{n-i}\overline{x}_i(t)}{dt^{n-i}}-\overline{f}_{n-1}(t)\biggr).$$

Отсюда находим

$$(I-P(t))\overline{x}_n(t)=A(t)^+(I-Q(t))\biggl(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n-i)!}\frac{d^{n-i}\overline{x}_i(t)}{dt^{n-i}}-\overline{f}_{n-1}(t)\biggr). \tag{24}$$

Тогда из (8) при $j=n$ определяется начальное значение

$$(I-P(0))\Pi_nx(0)=-(I-P(0))\overline{x}_n(0). \tag{25}$$

С обозначением

$$\Pi\zeta_{n-1}(\tau)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\tau^{n-i}}{(n-i)!}\frac{d^{n-i}B}{dt^{n-i}}(0)\Pi_ix(\tau)+\Pi_{n-1}f(\tau)$$

уравнение (6) при $j=n$ примет вид

$$\Pi_nx(\tau+1)=B(0)\Pi_nx(\tau)+\Pi\zeta_{n-1}(\tau).$$

Отметим, что $\Pi\zeta_{n-1}(\tau)\to 0$ при $\tau\to+\infty$.

Ввиду замечания 2 последнее уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$(I-P(0))\Pi_n x(\tau+1)=\widetilde{B}(0)(I-P(0))\Pi_n x(\tau)+(I-P(0))\Pi\zeta_{n-1}(\tau), \tag{26}$$

$$P(0)\Pi_n x(\tau+1)=P(0)\Pi_n x(\tau)+P(0)B(0)(I-P(0))\Pi_n x(\tau)+P(0)\Pi\zeta_{n-1}(\tau). \tag{27}$$

Применяя лемму 2, получаем решение неоднородного линейного дискретного уравнения (26) с заданным начальным условием (25), а именно,

$$(I-P(0))\Pi_n x(\tau)=-\widetilde{B}(0)^{\tau}(I-P(0))\overline{x}_n(0)+\sum_{i=0}^{\tau-1}\widetilde{B}(0)^{\tau-i-1}(I-P(0))\Pi\zeta_{n-1}(i). \tag{28}$$

Из леммы 2 следует вид решения уравнения (27):

$$P(0)\Pi_n x(\tau)=P(0)\Pi_n x(0)+\sum_{i=0}^{\tau-1}(P(0)B(0)(I-P(0))\Pi_n x(i)+P(0)\Pi\zeta_{n-1}(i)).$$

Так как функция $P(0)\Pi_n x(\tau)$ должна стремиться к нулю при $\tau\to+\infty$, то из последнего выражения получаем

$$P(0)\Pi_n x(0)=-\sum_{i=0}^{\infty}(P(0)B(0)(I-P(0))\Pi_n x(i)+P(0)\Pi\zeta_{n-1}(i)).$$

Следовательно,

$$P(0)\Pi_n x(\tau)=-\sum_{i=\tau}^{\infty}(P(0)B(0)(I-P(0))\Pi_n x(i)+P(0)\Pi\zeta_{n-1}(i)). \tag{29}$$

Итак, функция $\Pi_n x(\tau)$ найдена. Тогда из (8) при $j=n$ можно найти начальное значение

$$P(0)\overline{x}_n(0)=-P(0)\Pi_n x(0). \tag{30}$$

Запишем условие разрешимости уравнения (5) при $j=n+1$:

$$Q(t)\biggl(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n+1-i)!}\frac{d^{n+1-i}\overline{x}_i(t)}{dt^{n+1-i}}-\overline{f}_n(t)\biggr)=0.$$

Здесь $\overline{f}_n(t)=\overline{f}_x(t)\overline{x}_n(t)+\eta(t)$, где $\overline{f}_x(t)=f_x(\overline{x}_0(t),t,0)$, а $\eta(t)$ – известная функция, зависящая от $\overline{x}_j(t)$ при $j<n$.

Учитывая, что $(I-P(t))\overline{x}_n(t)$ уже известная функция, последнее уравнение можно записать в виде

$$Q(t)\frac{d(P(t)\overline{x}_n(t))}{dt}=Q(t)(\overline{f}_x(t)P(t)\overline{x}_n(t)+\zeta(t)),$$

где

$$\zeta(t)=\eta(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n+1-i)!}\frac{d^{n+1-i}\overline{x}_i(t)}{dt^{n+1-i}}+\overline{f}_x(t)(I-P(t))\overline{x}_n(t)-\frac{d(I-P(t))\overline{x}_n(t)}{dt}$$

– известная функция.

Использовав тождества (20) и (21), последнее уравнение запишем следующим образом:

$$\frac{d(P(t)\overline{x}_n(t))}{dt}=(Q(t)P(t))^{-1}Q(t)\biggl(\biggl(\overline{f}_x(t)-\frac{dP(t)}{dt}\biggr)P(t)\overline{x}_n(t)+\zeta(t)\biggr)+\frac{dP(t)}{dt}P(t)\overline{x}_n(t). \tag{31}$$

Сравнение (31) с (24) из [5] показывает, что, в отличие от приближения нулевого порядка, уравнения для нахождения компоненты решения $P(t)\overline{x}_n(t)$ при $n \geqslant 1$ для рассматриваемой здесь дискретной системы с малым шагом и сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений из [5] различны. Заметим, что в [5] имеется опечатка, а именно, как следует из предшествующего (24) уравнения, первый знак плюс в правой части уравнения (24) нужно заменить на минус.

Функция $P(t)\overline{x}_n(t)$ будет определяться однозначно из линейного дифференциального уравнения (31) с начальным условием (30).

Таким образом, функция $\overline{x}_n(t)$ найдена. Следовательно, найдена асимптотика n-го порядка решения задачи (1), (2) (табл. 2).

Таблица 2. Последовательность нахождения членов асимптотики n-го порядка, $n \geqslant 1$

Члены асимптотики	Формулы
$(I-P(t))\overline{x}_n(t)$	(24)
$(I-P(0))\Pi_n x(\tau)$	(28)
$P(0)\Pi_n x(\tau)$	(29)
$P(t)\overline{x}_n(t)$	(31), (30)

Итак, доказана

Теорема. *При выполнении условий I–III существуют явные представления для задач, выраженные через ортогональные проекторы на* $\operatorname{Ker}(B(t)-I)$ *и* $\operatorname{Ker}(B(t)'-I)$*, из которых однозначно определяются члены асимптотического решения задачи (1), (2) вида (3), (4) любого порядка. При этом члены асимптотики находятся в следующей последовательности:* $(I-P(t))\overline{x}_j(t)$, $(I-P(0))\Pi_j x(\tau)$, $P(0)\Pi_j x(\tau)$, $P(t)\overline{x}_j(t)$, $j \geqslant 0$.

5. Иллюстративный пример. Рассмотрим систему вида (1)

$$\begin{pmatrix} x_1(t+\varepsilon) \\ x_2(t+\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} x_2(t)+t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots \quad (t \leqslant 0.3), \tag{32}$$

с начальным условием

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

5.1.Точное решение. Найдём решение задачи (32), (33).

Из второго уравнения в системе (32) следует, что $x_2(t) = x_1(t-\varepsilon)$. Подставив это выражение для $x_2(t)$ в первое уравнение системы (32), получим

$$x_1(t+\varepsilon) = 3/2x_1(t) - (1/2-\varepsilon)x_1(t-\varepsilon) + \varepsilon t. \tag{34}$$

Из (32) и (33) имеем два условия для переменной x_1:

$$x_1(0) = 1, \quad x_1(\varepsilon) = 2 - \varepsilon. \tag{35}$$

Так как $t = \varepsilon k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то из (34), (35) получаем для $y(k) = x_1(\varepsilon k)$ начальную задачу для дискретного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y(k+1) = 3/2y(k) - (1/2-\varepsilon)y(k-1) + \varepsilon^2 k, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2 - \varepsilon.$$

Стандартным методом находим общее решение последнего уравнения

$$y(k) = x_1(\varepsilon k) = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k - \varepsilon k - 1/2 - \varepsilon,$$

где $\lambda_1 = (3+\sqrt{1+16\varepsilon})/4$ и $\lambda_2 = (3-\sqrt{1+16\varepsilon})/4$ являются корнями характеристического уравнения, а $-(\varepsilon k + 1/2 + \varepsilon)$ – частным решением неоднородного уравнения.

Используя значения $y(0)$ и $y(1)$, получаем

$$c_1 = \frac{5+2\varepsilon-(3+2\varepsilon)\lambda_2}{\sqrt{1+16\varepsilon}}, \quad c_2 = \frac{3}{2}+\varepsilon-c_1.$$

5.2. Проекторы и вспомогательные операторы. В этом примере

$$B = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = B - I = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x(t),t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_2(t)+t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица B постоянная, будем опускать аргумент t в обозначениях матриц, их собственных векторов и проекторов.

Собственные значения матрицы B равны 1 и 0.5, $\operatorname{Ker} A = \{(a,a)'\}$, $V = (1,1)'$, $\operatorname{Ker} A' = \{(-2a,a)'\}$, $S = (-2,1)'$, $\operatorname{Im} A = \{(a,2a)'\}$, $\operatorname{Im} A' = \{(a,-a)'\}$, где a – любое действительное число, и согласно формулам для ортогональных проекторов из п. 2 имеем

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad I-P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad I-Q = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Оператор

$$\widetilde{A} = (I-P)A(I-P) = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} : \operatorname{Im} A' \to \operatorname{Im} A'$$

имеет отрицательное собственное значение, равное $-1/2$.

Оператор

$$\widetilde{B} = (I-P)B(I-P) = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} : \operatorname{Im} A' \to \operatorname{Im} A'$$

имеет собственное значение $1/2$, модуль которого меньше 1.

Также получаем

$$A^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Im} A', \quad \widetilde{B}^\tau = \begin{pmatrix} 1/2^{\tau+1} & -1/2^{\tau+1} \\ -1/2^{\tau+1} & 1/2^{\tau+1} \end{pmatrix}, \quad \tau \geqslant 1,$$

$$(I-P)x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad QP = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -1/10 & -1/10 \end{pmatrix} : \operatorname{Ker} A \to \operatorname{Ker} A',$$

$$(QP)^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 5/2 & 0 \end{pmatrix} : \operatorname{Ker} A' \to \operatorname{Ker} A, \quad PB = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 \\ 5/4 & -1/4 \end{pmatrix},$$

$$PB(I-P) = \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ 3/4 & -3/4 \end{pmatrix} : \operatorname{Im} A' \to \operatorname{Ker} A.$$

5.3. Асимптотика нулевого порядка. Из (11) имеем

$$\overline{x}_{10}(t) - \overline{x}_{20}(t) = 0. \tag{36}$$

Из (16) и (17) с учётом выражений из п. 5.2 получаем, что

$$(I-P)\Pi_0 x(\tau) = \begin{pmatrix} 1/2^\tau \\ -1/2^\tau \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P\Pi_0 x(\tau) = \begin{pmatrix} -3/2^\tau \\ -3/2^\tau \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\Pi_0 x(\tau) = \begin{pmatrix} -1/2^{\tau-1} \\ -1/2^{\tau-2} \end{pmatrix}.$$

Из (18) следует равенство

$$P\overline{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\overline{x}_{10}(0) + \overline{x}_{20}(0) = 6. \tag{37}$$

Из (23) получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}(\overline{x}_{10}(t) + \overline{x}_{20}(t)) = 2(\overline{x}_{10}(t) + \overline{x}_{20}(t)) + 4t. \tag{38}$$

Решение задачи (38), (37) определяется по формуле

$$\overline{x}_{10}(t) + \overline{x}_{20}(t) = 7e^{2t} - 2t - 1,$$

отсюда и из (36) имеем

$$\overline{x}_{10}(t) = \overline{x}_{20}(t) = \frac{7}{2}e^{2t} - t - \frac{1}{2}.$$

Таким образом, получено асимптотическое приближение нулевого порядка решения задачи (32), (33)

$$\widetilde{x}_0(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 7e^{2t}/2 - t - 1/2 - 2^{1-t/\varepsilon} \\ 7e^{2t}/2 - t - 1/2 - 2^{2-t/\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad t = k\varepsilon, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

5.4. Асимптотика первого порядка. Из (24) при $n = 1$ имеем равенство

$$\overline{x}_{11}(t) - \overline{x}_{21}(t) = 7e^{2t} - 1. \tag{39}$$

Поскольку $\Pi\zeta_0(\tau) = \Pi_0 f(\tau)$,

$$\Pi_0 f(\tau) = f(\overline{x}_0(0) + \Pi_0 x(\tau), 0, 0) - f(\overline{x}_0(0), 0, 0) = \begin{pmatrix} \Pi_{20}x(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2^{\tau-2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

то из (28) при $n = 1$ с учётом (39) и выражений из п. 5.2 получаем

$$(I - P)\Pi_1 x(\tau) = \begin{pmatrix} -3/2^{\tau} - \tau/2^{\tau-2} \\ 3/2^{\tau} + \tau/2^{\tau-2} \end{pmatrix}.$$

Из (29) при $n = 1$ находим

$$P\Pi_1 x(\tau) = \sum_{i=\tau}^{\infty} \begin{pmatrix} (13+12i)/2^{i+1} \\ (13+12i)/2^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/2^{\tau} + 6\sum_{i=\tau}^{\infty} i/2^i \\ 13/2^{\tau} + 6\sum_{i=\tau}^{\infty} i/2^i \end{pmatrix}.$$

Для вычисления последнего ряда понадобится

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\sum_{i=\tau}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{\tau+1}{2^{\tau-1}}.$$

Доказательство. Сначала найдём сумму ряда $\sum_{i=1}^{\infty} ix^i$ при $x \in (-1,1)$. Представим этот ряд в виде $\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)x^i - \sum_{i=1}^{\infty} x^i$. Введём обозначение $S(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(i+1)x^i$. После интегрирования имеем

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} x^{i+1} = x^2 \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{x^2}{1-x},$$

отсюда получаем

$$S(x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}.$$

Значит, $\sum_{i=1}^{\infty} ix^i = (2x - x^2)/(1-x)^2 - x/(1-x) = x/(1-x)^2$ и $\sum_{i=1}^{\infty} i/2^i = 2$.

Следовательно, сумма рассматриваемого ряда при $\tau = 1$ вычисляется по доказываемой формуле. Справедливость этой формулы при всех τ легко доказывается методом математической индукции.

Использование этой леммы для вычисления ряда в выражении для $P\Pi_1 x(\tau)$ даёт

$$P\Pi_1 x(\tau) = \begin{pmatrix} (25 + 12\tau)/2^\tau \\ (25 + 12\tau)/2^\tau \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Pi_1 x(\tau) = \begin{pmatrix} (11 + 4\tau)/2^{\tau-1} \\ (7 + 4\tau)/2^{\tau-2} \end{pmatrix}.$$

Используя (30) при $n = 1$, получаем

$$\overline{x}_{11}(0) + \overline{x}_{21}(0) = -50. \tag{40}$$

Уравнение (31) при $n = 1$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}P\overline{x}_1 = (QP)^{-1}Q\left(\overline{f}_x(t)P\overline{x}_1 + \overline{f}_x(t)(I-P)\overline{x}_1 + \overline{f}_\varepsilon(t) - \frac{d}{dt}(I-P)\overline{x}_1 - \frac{1}{2}\frac{d^2\overline{x}_0}{dt^2}\right).$$

С учётом найденных значений запишем равенство для одной компоненты последнего уравнения

$$\frac{d}{dt}(\overline{x}_{11} + \overline{x}_{21}) = 2(\overline{x}_{11} + \overline{x}_{21}) - 70e^{2t} + 2. \tag{41}$$

Решение задачи (41), (40) определяется по формуле

$$\overline{x}_{11}(t) + \overline{x}_{21}(t) = -49e^{2t} - 70te^{2t} - 1.$$

Из последнего соотношения и равенства (39) получаем

$$\overline{x}_{11}(t) = -(21 + 35t)e^{2t} - 1, \quad \overline{x}_{21}(t) = -(28 + 35t)e^{2t}.$$

Таким образом, получено асимптотическое приближение первого порядка решения задачи (32), (33):

$$\widetilde{x}_1(t,\varepsilon) = \widetilde{x}_0(t,\varepsilon) + \varepsilon\begin{pmatrix} -(21 + 35t)e^{2t} - 1 + (11 + 4t/\varepsilon)2^{1-t/\varepsilon} \\ -(28 + 35t)e^{2t} + (7 + 4t/\varepsilon)2^{2-t/\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad t = k\varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Если разложить точное решение $x(k\varepsilon)$ в ряд по целым неотрицательным степеням ε, то получим совпадение членов, не зависящих от ε и порядка ε в этом разложении, с соответствующими членами в $\widetilde{x}_1(k\varepsilon,\varepsilon)$ и $\widetilde{x}_2(k\varepsilon,\varepsilon)$.

Графики точного и приближённых решений для задачи (32), (33) при $\varepsilon = 0.01$ представлены на рис. 1 и 2.

Заключение. В статье предложен новый подход к построению асимптотики решения начальных задач для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае с использованием ортогональных проекторов. Такой подход помогает понять суть алгоритма А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова из работы [1] и получить в явном виде задачи для нахождения асимптотики решения любого порядка.

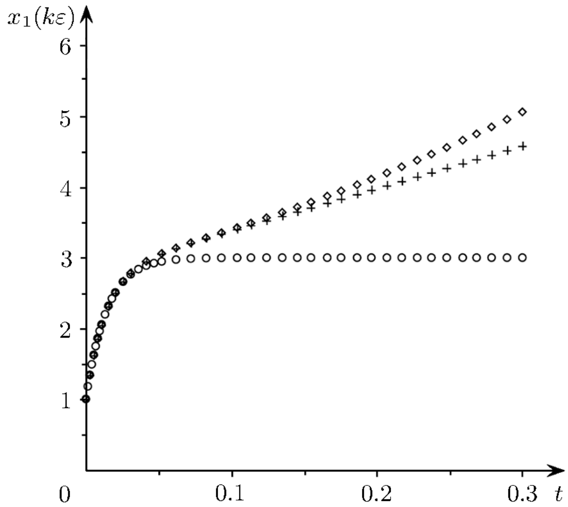

Рис. 1. Точное решение ($\diamond$) и приближённые решения нулевого ($\circ$) и первого ($+$) порядков для $x_1(k\varepsilon)$.

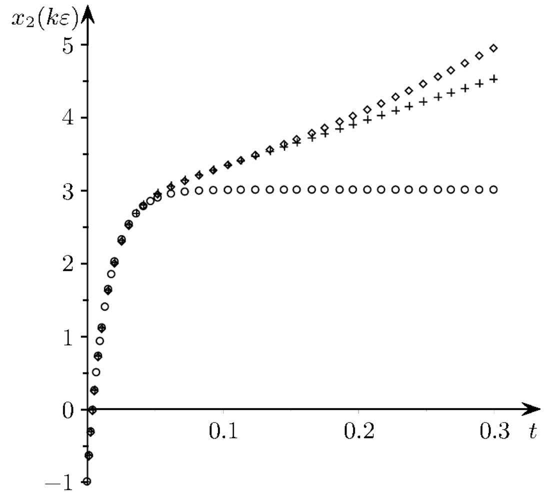

Рис. 2. Точное решение ($\diamond$) и приближённые решения нулевого ($\circ$) и первого ($+$) порядков для $x_2(k\varepsilon)$.

Авторы выражают глубокую благодарность О.Б. Цехан за полезные обсуждения.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00202). Работа второго автора поддержана Научным университетом Вьетнамского национального университета, г. Ханой (проект TN.22.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б.* Дифференциальные и разностные системы уравнений с малым параметром в случае, когда невозмущённая (вырожденная) система расположена на спектре // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 4. С. 650–664.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М., 1978.
3. *Kurina G.A., Dmitriev M.G., Naidu D.S.* Discrete singularly perturbed control problems (a survey) // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2017. V. 24. P. 335–370.
4. *Sibuya Y.* Some global properties of matrices of functions of one variable // Math. Ann. 1965. V. 161. P. 67–77.
5. *Kurina G.* Projector approach to constructing asymptotic solution of initial value problems for singularly perturbed systems in critical case // Axioms. 2019. V. 8. № 2. P. 56–60.
6. *Курина Г.А., Хоай Н.Т.* Проекторный подход к алгоритму Бутузова–Нефедова асимптотического решения одного класса сингулярно возмущённых задач в критическом случае // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 12. С. 2073–2084.
7. *Kurina G.A., Hoai N.T.* Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case // AIP Conf. Proc. Int. Conf. Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018). 2018. V. 1997. P. 430–436.
8. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin, Heidelberg, 1966.
9. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем. Минск, 2001.
10. *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix Analysis. Cambridge, 2013.

Воронежский государственный университет,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Научный университет Вьетнамского
национального университета, г. Ханой

Поступила в редакцию 24.08.2022 г.
После доработки 02.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.