ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 85–99

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА И "ДЕШЁВЫМ" УПРАВЛЕНИЕМ

© 2023 г. А. Р. Данилин, А. А. Шабуров

Рассмотрена задача оптимального управления для линейной системы с постоянными коэффициентами с интегральным выпуклым критерием качества, содержащим малый параметр при интегральном слагаемом, в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Такие задачи называют задачами с "дешёвым" управлением. Показано, что предельной задачей будет задача с терминальным критерием качества. Установлено, что если терминальное слагаемое критерия качества является выпуклой (строго выпуклой) и непрерывно дифференцируемой функцией, то функционал качества в предельной задаче обладает аналогичными свойствами. Доказано, что в общем случае справедлива сходимость по функционалу качества, а при условии строгой выпуклости терминального слагаемого критерия качества в исходной задаче справедлива сходимость к точке минимума терминального слагаемого критерия качества в предельной задаче. Найден предел определяющего вектора в исходной задаче при стремлении малого параметра к нулю. В частности, показано, что первая компонента определяющего вектора в исходной задаче сходится к определяющему вектору в предельной задаче. Подробно рассмотрены задачи управления точкой малой массы в среде с сопротивлением и без, с терминальной частью, зависящей как от медленных, так и от быстрых переменных, и построены полные асимптотические разложения определяющих векторов в этих задачах.

DOI: 10.31857/S0374064123010089, EDN: OCKZEN

Введение. Рассматривается задача оптимального управления [1–3] для одной линейной системы с постоянными коэффициентами в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Критерий качества содержит терминальное слагаемое, зависящее как от медленных переменных, так и от быстрых, а интегральное слагаемое содержит малый множитель перед управлением.

Среди работ, посвящённых сингулярно возмущённым задачам управления, такие задачи называются задачами с "дешёвым" управлением (см., например, обзор [4]), поскольку характеризуются близостью к вырожденной задаче в смысле принципа максимума Понтрягина. Но, например, в статьях [5, 6] при рассмотрении линейно-квадратичных задач строится асимптотика решения только при условии отсутствия ограничений на оптимальное управление.

Доказано, что при стремлении малого параметра к нулю исходная задача с "дешёвым" управлением сводится к задаче с терминальным критерием качества, зависящим только от медленных переменных. При этом в возмущённой задаче оптимальное управление всегда непрерывно, а в предельной задаче может терпеть разрыв. В такой ситуации асимптотические разложения решений для задач быстродействия могут носить довольно сложный характер (см. работы [7–9]).

В статье подробно рассмотрены задачи управления точкой малой массы в среде с сопротивлением и без, с терминальной частью, зависящей как от медленных, так и от быстрых переменных. Получена полная асимптотика определяющих векторов этих задач и оптимального значения критерия качества в них. Поскольку эти асимптотические разложения степенные (по степеням малого параметра), то можно говорить о том, что задачи с интегральным выпуклым критерием качества зависят от малого параметра более регулярно, чем задачи быстродействия из [7, 9].

1. Постановка задачи и свойства терминальной части критерия качества. Пусть управляемая система содержит медленные и быстрые переменные:

$$\dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u_\varepsilon, \quad t \in [0,T], \quad \|u_\varepsilon\| \leqslant 1,$$

$$\varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u_\varepsilon, \quad x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \tag{1}$$

функционал качества имеет вид

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sigma(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)) + \frac{\varepsilon^\alpha}{2}\int\limits_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2\,dt \to \min, \tag{2}$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i, $i,j \in \{1,2\}$, – постоянные вещественнозначные матрицы соответствующей размерности, а

$$\sigma : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R} \text{ – выпуклая и непрерывно дифференцируемая на } \mathbb{R}^{n+m} \text{ функция.} \tag{3}$$

Евклидовы нормы во всех рассматриваемых пространствах будем обозначать через $\|\cdot\|$, а скалярные произведения – через $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

В качестве символа транспонирования матриц, как и в [1], используется знак *, например, A_{11}^* или B_2^*.

Задачу (1), (2) запишем в следующем виде:

$$\dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon, \quad t \in [0,T],$$
$$z_\varepsilon(0) = z^0, \quad \|u_\varepsilon\| \leqslant 1, \tag{4}$$

с функционалом качества

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sigma(z_\varepsilon(T)) + \frac{\varepsilon^\alpha}{2}\int\limits_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2\,dt \to \min, \tag{5}$$

где

$$\sigma(z_\varepsilon(T)) := \sigma(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)), \quad z_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon(0) = z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в рассматриваемом интегральном выпуклом критерии качества (5) первое слагаемое можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени T, а второе – как учёт энергозатрат на реализацию управления. Причём наличие малого параметра как множителя при втором слагаемом говорит о том, что "стоимость" энергозатрат на реализацию управления незначительна.

При использовании векторной записи компоненты вектора z будут обозначаться в соответствии с обозначением для z, например,

$$z^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Определение 1. Будем говорить, что пара матриц $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ *вполне управляема*, если вполне управляема система $\dot{x} = \mathcal{A}_\varepsilon x + \mathcal{B}_\varepsilon u$.

Предположение 1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пара матриц $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ вполне управляема, т.е. $\operatorname{rank}(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{B}_\varepsilon, \ldots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1}\mathcal{B}_\varepsilon) = n+m$.

Будем считать, что выполнено условие устойчивости точки покоя присоединённой системы, т.е. выполнено

Предположение 2. Все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_j(A_{22}) \leqslant -\alpha < 0$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Замечание 1. Предположение 2 используется при доказательстве всех цитируемых утверждений из [10].

Определение 2. Следуя [10, § 3.4.1, формулы (52)–(54)], *предельной задачей для (4), (5)* естественно назвать задачу

$$\dot{x} = \mathcal{A}_0 x + \mathcal{B}_0 u, \quad t \in [0, T], \quad \mathcal{A}_0 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21},$$

$$x(0) = x^0, \quad \|u\| \leqslant 1, \quad \mathcal{B}_0 := B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2,$$

$$J_0(u) := \sigma_0(x(T)) \to \min, \tag{6}$$

где

$$\sigma_0(x) := \inf_{r\in\mathcal{R}} \sigma(x, r - A_{22}^{-1}A_{21}x) = \inf_{y\in\mathcal{R}(x)} \sigma(x, y), \tag{7}$$

$$\mathcal{R} := \int\limits_0^{+\infty} e^{A_{22}s} B_2 \mathcal{V}\, ds, \quad \mathcal{R}(x) := -A_{22}^{-1}A_{21}x + \mathcal{R}, \tag{8}$$

а $\mathcal{V} := \mathcal{B}[0, 1]$ – шар в $\mathbb{R}^r$ единичного радиуса с центром в нуле [10, § 3.4.1, после формулы (51)].

Отметим, что

$$0 \in \mathcal{R} \text{ – выпуклый компакт} \tag{9}$$

(см. [10, § 3.4.1, после формулы (51)]), и тем самым в (7) $\inf$ можно заменить на $\min$.

Опорная функция множества $\mathcal{R}$ при таком $\mathcal{V}$ вычисляется по формуле

$$\rho(l|\mathcal{R}) = \int\limits_0^{+\infty} \|B_2^* e^{A_{22}^* s} l\|\, ds \tag{10}$$

(см., например, [11, формулы (3.1) и (5.2)]).

Следствие 1. *Если* $\sigma(x, y) = \sigma_1(x)$, *то* $\sigma_0(x) = \sigma_1(x)$.

Следствие 2. *Если* $A_{21} = \mathcal{O}$, $\sigma(x, y) = \sigma_1(x) + \sigma_2(y)$, $\sigma_2(0) = 0$, $\nabla\sigma_2(0) = 0$, *то* $\sigma_0(x) = \sigma_1(x)$.

Здесь и далее $\mathcal{O}$, $\mathcal{I}$ – нулевая и единичная матрицы соответствующей размерности соответственно.

Доказательство. В силу (7) и (9) справедливы равенства

$$\sigma_0(x) = \min_{r\in\mathcal{R}}(\sigma_1(x) + \sigma_2(r - A_{22}^{-1}A_{21}x)) = \sigma_1(x) + \min_{r\in\mathcal{R}} \sigma_2(r) = \sigma_1(x) + \sigma_2(0) = \sigma_1(x).$$

Следствие доказано.

Утверждение 1. *Пусть* $G\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ *– выпуклая и непрерывно дифференцируемая на* $\mathbb{R}^{n+m}$ *функция,* $\mathbb{R}^m \supset \mathcal{R}$ *– выпуклый компакт, а* $G_0(x) := \min_{r\in\mathcal{R}} G(x, r)$. *Тогда* G_0 *– выпуклая и непрерывно дифференцируемая на* $\mathbb{R}^n$ *функция, при этом для любого* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *справедливо равенство*

$$\nabla G_0(x_0) = \nabla_x G(x_0, r_0), \tag{11}$$

где $r_0 \in \mathcal{R}$ *и* $G_0(x_0) = G(x_0, r_0)$. *Кроме того, если* G *– строго выпуклая функция, то и* G_0 *– строго выпуклая функция.*

Доказательство. По лемме 4.4 из [12, гл. 1, п. 1] G_0 – выпуклая функция. Тем самым G_0 непрерывна и субдифференцируема на $\mathbb{R}^n$ (см., например, [13, следствие 10.1.1 и теорема 23.4]).

По следствию 4 из [14, гл. 4, п. 5, формула (17)] (с $A = 0$, $M = \mathbb{R}^m$ и $L = \mathcal{R}$) получим, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$q \in \partial G_0(x_0) \to \quad \text{существуют} \ \ (p, r) \in \partial G(x_0, r_0) : (q - p) \in -N_{\mathbb{R}^m}(-r_0) = \{0\},$$

где $r_0 \in \mathcal{R}$ такова, что $G_0(x_0) = G(x_0, r_0)$. Здесь $N_{\mathbb{R}^m}(-r_0)$ – нормальный конус к $\mathbb{R}^m$ в точке $(-r_0)$ (см., например, [14, гл. 4, п. 1, определение 3 и предложение 9]). Поскольку функция G дифференцируема на $\mathbb{R}^{n+m}$, то

$$\partial G(x_0, r_0) = \left\{ \begin{pmatrix} \nabla_x G(x_0, r_0) \\ \nabla_r G(x_0, r_0) \end{pmatrix} \right\}.$$

Тем самым $q = p = \nabla_x G(x_0, r_0)$ и, следовательно, $G_0(x_0)$ дифференцируема в точке x_0 и $\nabla G_0(x_0) = \nabla_x G(x_0, r_0)$. Поскольку функция G_0 дифференцируема на всём $\mathbb{R}^n$, то она непрерывно дифференцируема на этом множестве [13, следствие 25.5.1].

Если G – строго выпуклая функция, то строгая выпуклость G_0 фактически доказана в той же лемме 4.4 из [12, гл. 1, п. 1], поскольку в силу (9) в доказательстве этой леммы можно обойтись без предельного перехода. Утверждение доказано.

Следствие 3. *Пусть выполнено условие (3), а σ_0 определена по формуле (7). Тогда $\sigma_0(x)$ – выпуклая и непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция. При этом для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ градиент функции σ_0 в точке x_0 вычисляется по формуле*

$$\nabla \sigma_0(x_0) = \nabla_x \sigma(x_0, y_0) - A_{21}^* (A_{22}^{-1})^* \nabla_y \sigma(x_0, y_0), \tag{12}$$

где $y_0 \in \mathcal{R}(x_0)$ – точка минимума функции $\sigma(x_0, \cdot)$ на $\mathcal{R}(x_0)$, т.е. $\sigma_0(x_0) = \sigma(x_0, y_0)$.

Если в дополнении к (3) функция σ строго выпукла, то и σ_0 строго выпукла.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$G(x, r) := \sigma(x, r - A_{22}^{-1} A_{21} x),$$

определённую на $\mathbb{R}^{n+m}$. Ввиду (3) эта функция выпукла (строго выпукла, если такова σ) и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^{n+m}$, а

$$\sigma_0(x) := \min_{r \in \mathcal{R}} G(x, r).$$

В силу утверждения 1 σ_0 – выпуклая (строго выпуклая, если σ – строго выпуклая) и непрерывно дифференцируемая функция. Формула (12) получается из формулы (11) по правилу дифференцируемости сложной функции. Следствие доказано.

Утверждение 2. *Пусть $\mathbb{R}^n \supset \Xi$ – выпуклое компактное множество, а $\{x_0, y_0\}$ – решение следующей экстремальной задачи: $\min\limits_{x \in \Xi, \ y \in \mathcal{R}(x)} \sigma(x, y)$. Тогда $\sigma_0(x_0) = \min\limits_{x \in \Xi} \sigma_0(x)$.*

Доказательство. С одной стороны, по определению $\{x_0, y_0\}$ для любого $y \in \mathcal{R}(x_0)$ справедливо неравенство $\sigma(x_0, y_0) \leqslant \sigma(x_0, y)$, поэтому $\sigma(x_0, y_0) \leqslant \sigma_0(x_0)$, а с другой – так как $y_0 \in \mathcal{R}(x_0)$, то

$$\sigma_0(x_0) = \min_{y \in \mathcal{R}(x_0)} \sigma(x_0, y) \leqslant \sigma(x_0, y_0).$$

Таким образом, $\sigma(x_0, y_0) = \sigma_0(x_0)$. Утверждение доказано.

Замечание 2. Если $A_{21} \neq \mathcal{O}$, $\sigma(z) = \sigma(x, y) := \sigma_1(x) + \sigma_2(y)$, $\sigma_2(0) = 0$, $\nabla \sigma_2(0) = 0$, то в общем случае $\sigma_0(x) \neq \sigma_1(x)$.

Пример. Пусть

$$n = m = r = k, \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & I \\ \varepsilon^{-1} I & -\varepsilon^{-1} I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1} I \end{pmatrix}, \quad \sigma(z) = \sigma(x, y) := \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2.$$

Тогда в силу (7), (8) и (10) имеем

$$\sigma_0(x) = \min_{\|y\|\leqslant 1} \sigma(x, y+x), \quad \mathcal{R} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s}\mathcal{V}\, ds = \mathcal{V} = B[0,1],$$

поэтому $\sigma_0(x) = \dfrac{1}{2}\|x(T)\|^2 + \dfrac{1}{2}\min\limits_{\|y\|\leqslant 1}\|y+x\|^2.$

Если $\|x\| \leqslant 1,$ то, взяв $y := -x,$ получим $\sigma_0(x) = \dfrac{1}{2}\|x\|^2 + \dfrac{1}{2}\cdot 0 = \dfrac{1}{2}\|x\|^2.$

Если $\|x\| > 1,$ то $\sigma_0(x) = \dfrac{1}{2}\|x\|^2 + \dfrac{1}{2}(\|x\|-1)^2.$ Или, что то же самое, функция

$$\sigma_0(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}(\|x\|^2 - 2\|x\| + 1) = \|x\|^2 - \|x\| + \frac{1}{2}$$

и является непрерывно дифференцируемой при $\|x\| \neq 0.$

Поэтому

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} \|x\|^2/2 & \text{при } \|x\| \leqslant 1, \\ \|x\|^2 - \|x\| + 1/2 & \text{при } \|x\| > 1, \end{cases} \quad \nabla\sigma_0(x) = \begin{cases} x & \text{при } \|x\| \leqslant 1, \\ 2x - x/\|x\| & \text{при } \|x\| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, если $\|x\| > 1,$ то $\sigma_0(x) \neq \sigma_1(x).$

2. Предельные теоремы. Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$ – множество достижимости при $t = T$ управляемой системы из (1), а

$$\mathcal{K}_0 := \{z \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in \Xi, \quad y \in \mathcal{R}(x)\}, \tag{13}$$

где Ξ – множество достижимости при $t = T$ управляемой системы из (6). Известно, что $\mathcal{K}_\varepsilon,$ Ξ и $\mathcal{K}_0$ – компактные множества, и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d_H(\mathcal{K}_\varepsilon, \mathcal{K}_0) = 0, \tag{14}$$

где $d_H(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – расстояние по Хаусдорфу [10, § 3.3, теорема 3.1].

Утверждение 3. *Если $z_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon,$ а $\bar z$ – произвольный частичный предел z_ε при $\varepsilon \to +0,$ то $\bar z \in \mathcal{K}_0.$*

Доказательство. Возьмём произвольное число $\mu > 0.$ В силу (14) существует $\varepsilon_\mu > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]$ справедливо неравенство $d_\varepsilon := d_H(\mathcal{K}_\varepsilon, \mathcal{K}_0) \leqslant \mu.$ Поэтому при таких ε выполняется соотношение $z_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon \in \mathcal{K}_0 + B[0, d_\varepsilon] \subset \mathcal{K}_0 + B[0,\mu]$ – компактное множество. Тем самым $\bar z \in \mathcal{K}_0 + B[0,\mu],$ а значит, и

$$\bar z \in \bigcap_{\mu>0}(\mathcal{K}_0 + B[0,\mu]) = \mathcal{K}_0.$$

Утверждение доказано.

Пусть $u(\cdot)$ – допустимое управление. Через $x_\varepsilon(T,u),$ $y_\varepsilon(T,u)$ и $x_0(T,u)$ будем обозначать состояние управляемой системы (1) или (6) в момент времени $T,$ соответствующий управлению $u(\cdot).$

Теорема 1. *Если $u_\varepsilon^{\rm opt}$ – оптимальное управление в задаче (1), (2), а $u^{\rm opt}$ – оптимальное управление в задаче (6), то $J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\rm opt}) \to J_0(u^{\rm opt}).$*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \Xi$ и $y_0 \in \mathcal{R}(x_0)$ таковы, что $\sigma(x_0, y_0) = \min\limits_{z\in\mathcal{R}_0}\sigma(z).$ Тогда в силу (13) по утверждению 2 справедливы равенства

$$\sigma(x_0, y_0) = \sigma_0(x_0) = \min_{x\in\Xi}\sigma_0(x) = J(u^{\rm opt}) = \sigma_0(x_0(T, u^0)). \tag{15}$$

Пусть $\bar{J}$ – произвольный частичный предел $J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})$ при $\varepsilon \to +0$, а $\bar{x}$, $\bar{y}$ – соответствующие частичные пределы $x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})$ и $y_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})$. Тогда $\bar{z} \in \mathcal{K}_0$ по утверждению 3. Поэтому с учётом (15)

$$\bar{J} = \sigma(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant \sigma_0(x_0) = J(u^{\mathrm{opt}}). \tag{16}$$

С другой стороны, из (14) следует, что существует такое допустимое управление $\tilde{u}_\varepsilon$, что

$$x_\varepsilon(T, \tilde{u}_\varepsilon) \to x_0, \quad y_\varepsilon(T, \tilde{u}_\varepsilon) \to y_0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0,$$

поэтому

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}) \leqslant J_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \to \sigma(x_0, y_0) = J_0(u^{\mathrm{opt}}). \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что

$$J_0(u^{\mathrm{opt}}) \leqslant \liminf_{\varepsilon \to +0} J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}) \leqslant \limsup_{\varepsilon \to +0} J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}) \leqslant J_0(u^{\mathrm{opt}}),$$

и тем самым $J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}) \to J_0(u^{\mathrm{opt}})$ при $\varepsilon \to +0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}$ *– оптимальное управление в задаче (1), (2),* u^{opt} *– оптимальное управление в задаче (6),* z_0 *– точка минимума функции* σ *на* $\mathcal{K}_0$.

Если функция $\sigma(x, y)$ *строго выпукла, то*

$$x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}) \to x_0(T, u^{\mathrm{opt}}) = x_0, \quad y_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}) \to y_0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Если $\sigma(x, y) = \sigma_1(x)$ *строго выпукла, то*

$$x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}) \to x_0(T, u^{\mathrm{opt}}) = x_0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим первый случай.

В силу строгой выпуклости функции σ и выпуклости множества $\mathcal{K}_0$ точка минимума σ на $\mathcal{K}_0$ единственная. В силу теоремы 1 имеем

$$\sigma(x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}), y_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})) \to \sigma(x_0, y_0) = \sigma(z_0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Пусть $\bar{z}$ – произвольный частичный предел $z_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})$ при $\varepsilon \to +0$. Тогда ввиду утверждения 3 и непрерывности функции σ получим $\sigma(\bar{x}, \bar{y}) = \sigma(x_0, y_0)$. Тем самым $\bar{z} = z_0$.

Во втором случае, в силу строгой выпуклости функции σ_1 и выпуклости множества Ξ, точка x_0 – единственная точка минимума функции $\sigma_0 = \sigma_1$ на Ξ. Теорема доказана.

3. Определяющие векторы в исходной и предельной задачах. Здесь с помощью принципа максимума найдём структуру оптимального управления в исходной и в предельной задачах, а также соотношения на векторы, определяющие его.

Отметим, что в теоремах из [3], на которые будем ссылаться в этом пункте, в качестве одного из условий используется понятие нормальной задачи управления [3, п. 2.2, определение перед теоремой 3].

Определение 3. Под *нормальной задачей управления* понимается такая, при которой два управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, переводящие начальную точку в одну и ту же граничную точку множества достижимости к моменту времени T, совпадают почти всюду на отрезке $[t_0, T]$.

Покажем, что для линейной стационарной системы управления

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u, \quad t \in [0, T],$$

$$z(0) = z^0, \quad u \in \mathcal{U},$$

со строго выпуклым компактным множеством $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ строго выпуклое, если его на границе нет отрезков не нулевой длины) из вполне управляемости следует нормальность. Действительно, в этом случае в силу [3, п. 2.2, теорема 3] нужно показать, что если $l \neq 0$ для любого $t \in \in [0,T]$ и любых двух управлений $u_1(t), u_2(t) \subset \mathcal{U} : u_1(t) \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in\mathcal{U}}\langle \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l, u\rangle \ni u_2(t),$ то $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду.

Функция $\psi(t) := \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l$ аналитична при $t \in \mathbb{R},$ поэтому возможны только два случая: $\psi(t) \equiv 0$ либо на отрезке $[0,T]$ функция $\psi(t)$ имеет не более конечного числа нулей. Но в силу вполне управляемости из условия $\psi(t) \equiv 0$ следует, что $l = 0,$ что невозможно по условию. Если $\psi(t) \neq 0,$ то $\mathcal{L}_t(u) := \langle \psi(t), u\rangle$ не может достигать экстремума во внутренних точках множества $\mathcal{U},$ поскольку $\nabla_u \mathcal{L}_t(u) = \psi(t) \neq 0.$ Если $u_1(t),$ $u_2(t)$ – две различные точки максимума на $\mathcal{U},$ то в силу линейности $\mathcal{L}_t(u)$ достигает максимума на всём отрезке $[u_1, u_2].$ Но с учётом строгой выпуклости $\mathcal{U}$ точка $(u_1 + u_2)/2$ внутренняя для $\mathcal{U},$ что приводит к противоречию.

Замечание 3. Отметим, что в книге [3] вместо понятия “нормальная задача” используется в качестве синонима “нормальная система” (см., например, [3, п. 3.5, теорема 13]).

Предположение 3. Пары матриц $(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ и (A_{22}, B_2) вполне управляемы.

Согласно [15, теорема 1] выполнение предположений 2 и 3 является достаточным условием выполнения предположения 1. Таким образом, при выполнении предположений 2 и 3 задача (4), (5), а также задача (6), разрешимы, и оптимальное управление в поставленных задачах единственное [3, п. 3.5, следствие после теоремы 13].

При выполнении предположения 1 принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности, которое даёт единственное решение задачи (4), (5) [3, п. 3.5, теорема 14]. Для рассматриваемой задачи этот принцип имеет следующий вид: существует единственная пара (z, ω) – решение системы уравнений

$$\dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}, \quad \dot{\omega}_\varepsilon = -\mathcal{A}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon \tag{18}$$

с граничными условиями

$$z_\varepsilon(0) = z^0, \quad \omega_\varepsilon(T) = -\nabla\sigma(z_\varepsilon(T)), \tag{19}$$

где единственное оптимальное управление $u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}$ определяется из принципа максимума [3, теорема 14]

$$-\frac{\varepsilon^\alpha}{2}\|u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(t)\|^2 + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon(t), u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(t)\rangle = \max_{\|u_\varepsilon(t)\|\leqslant 1}\left(-\frac{\varepsilon^\alpha}{2}\|u_\varepsilon(t)\|^2 + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\rangle\right) \tag{20}$$

и является оптимальным управлением в задаче (4), (5).

Применив условие максимума (20), выразим оптимальное управление $u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(t)$ через функцию $\mathcal{B}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon(t)$ (аналогично тому, как это было сделано в статье [16]):

$$u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(s) := \frac{\varepsilon^{-\alpha}\mathcal{B}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon(s)}{S(\|\varepsilon^{-\alpha}\mathcal{B}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon(s)\|)}, \quad S(\xi) := \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \\ \xi, & \xi > 1. \end{cases} \tag{21}$$

Тогда состояния системы и сопряжённой системы (18) запишутся в виде

$$z_\varepsilon(t) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} z^0 + \int_0^t e^{\mathcal{A}_\varepsilon (t-s)} \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(s)\, ds, \quad \omega_\varepsilon(t) = e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^*(t-T)}\omega_\varepsilon(T). \tag{22}$$

Пусть $\lambda_\varepsilon := \omega_\varepsilon(T),$ тогда в силу (18) и (19) $\omega_\varepsilon(s) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T-s)}\lambda_\varepsilon,$ где $\lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon \end{pmatrix}.$ Кроме того, согласно граничным условиям (19), уравнению (22), оптимальному управлению (21) и с помощью замены переменной $s := T - t$ получим уравнение

$$-\omega_\varepsilon(T) = \nabla\sigma\left(e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z^0 + \int_0^T \mathcal{C}_\varepsilon(s) u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(T-s)\, ds\right),$$

или, что то же самое,

$$-\lambda_\varepsilon = \nabla\sigma\left(e^{\mathcal{A}_\varepsilon T}z^0 + \int\limits_0^T \frac{\mathcal{C}_\varepsilon(t)\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon\|)}\,dt\right) = \nabla\sigma(z_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})), \tag{23}$$

где

$$u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(T-s) := \frac{\mathcal{C}_\varepsilon^*(s)\lambda_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|\mathcal{C}_\varepsilon^*(s)\lambda_\varepsilon\|)}, \quad \mathcal{C}_\varepsilon(s) := e^{\mathcal{A}_\varepsilon s}\mathcal{B}_\varepsilon, \quad S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon^\alpha, \\ \xi, & \xi > \varepsilon^\alpha. \end{cases}$$

Замечание 4. Оптимальное управление в задаче (4), (5) непрерывно во всех точках.

Если функция σ_0 дифференцируема на Ξ, то в силу принципа максимума (см., например, теорему из [17, п. 6.1.3]) значение сопряжённой переменной l_0 в момент времени T для задачи (6) удовлетворяет равенству

$$-l_0 = \nabla\sigma_0(x(T, u^{\mathrm{opt}})), \tag{24}$$

где u^{opt} – оптимальное управление в задаче (6). При этом если $l_0 \neq 0$, то единственное оптимальное управление u^{opt} задаётся равенством

$$u^{\mathrm{opt}}(T-t) = \frac{\mathcal{C}_0^*(t)l_0}{\|\mathcal{C}_0^*(t)l_0\|}, \quad \mathcal{C}_0(t) := e^{A_0 t}B_0,$$

а вектор l_0 в силу (24) есть единственное решение уравнения

$$-l_0 = \nabla\sigma_0\left(e^{AT}x_0 + \int\limits_0^T \frac{\mathcal{C}_0(t)\mathcal{C}_0^*(t)l_0}{\|\mathcal{C}_0^*(t)l_0\|}\,dt\right). \tag{25}$$

Отметим, что $l_0 = 0$ тогда и только тогда, когда в задаче (6) ограничения на управление не по существу. В этом случае оптимальное управление, вообще говоря, не единственно.

Замечание 5. Если $\mathcal{C}_0^*(\bar t)l_0 = 0$, то оптимальное управление в задаче (6) разрывно в точке $\bar t$.

Определение 4. Вектор λ_ε – решение уравнения (23) – назовём *определяющим вектором в задаче (4), (5).*

Определение 5. Вектор $l_0 \neq 0$ – решение уравнения (25) – назовём *определяющим вектором в задаче (6).*

Предположение 4. В дальнейшем будем предполагать, что в задачах терминального управления ограничения на управление по существу, т.е. точка глобального минимума функции σ не принадлежит соответствующему множеству достижимости Ξ.

Из следствия 3 и теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть z_0 – точка минимума строго выпуклой функции σ на $\mathcal{K}_0$. Тогда при $\varepsilon \to +0$*

$$-\nabla_x\sigma(x_0, y_0) = l_\varepsilon \to l_0 = -\nabla\sigma_0(x_0), \quad \rho_\varepsilon \to -\nabla_y\sigma(x_0, y_0).$$

Если $\sigma(x, y) = \sigma_1(x)$ – строго выпуклая и непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция, x_0 – точка минимума функции σ_1 на Ξ, то

$$l_\varepsilon \to l_0 = -\nabla\sigma_1(x_0) = -\nabla\sigma_0(x_0), \quad \rho_\varepsilon \equiv 0.$$

Рассмотрим частный случай критерия качества (5):

$$J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon) := \sigma_1(x_\varepsilon(T, u_\varepsilon)) + \sigma_2(y_\varepsilon(T, u_\varepsilon)) + \frac{\varepsilon^\alpha}{2}\int\limits_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2\,dt, \tag{26}$$

где $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(y)$ – непрерывно дифференцируемые и выпуклые функции, определённые на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.

Тогда вектор λ_ε будет определяться из уравнения (23):

$$-l_\varepsilon = \nabla\sigma_1(x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})) =$$

$$= \nabla\sigma_1\left([e^{\mathcal{A}_\varepsilon T}]_{11}x^0 + [e^{\mathcal{A}_\varepsilon T}]_{12}y^0 + \int\limits_0^T \frac{[\mathcal{C}_\varepsilon(t)]_{11}([\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{11}l_\varepsilon + [\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{12}\rho_\varepsilon)}{S_\varepsilon(\|[\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{11}l_\varepsilon + [\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{12}\rho_\varepsilon\|)}\,dt\right), \tag{27}$$

$$-\rho_\varepsilon = \nabla\sigma_2(y_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})) =$$

$$= \nabla\sigma_2\left([e^{\mathcal{A}_\varepsilon T}]_{21}x^0 + [e^{\mathcal{A}_\varepsilon T}]_{22}y^0 + \int\limits_0^T \frac{[\mathcal{C}_\varepsilon(t)]_{21}([\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{11}l_\varepsilon + [\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{12}\rho_\varepsilon)}{S_\varepsilon(\|[\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{11}l_\varepsilon + [\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{12}\rho_\varepsilon\|)}\,dt\right), \tag{28}$$

где при $i, j \in \{1, 2\}$ под обозначением $[(\cdot)]_{ij}$ понимается блочный элемент матрицы $(\cdot)$, находящийся в i-й строке и в j-м столбце.

4. Управление системой материальных точек в среде с сопротивлением с терминальной частью, зависящей только от медленных переменных. Рассмотрим задачу (4), (26) при следующих условиях:

$$n = m = r = k, \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{O} & -\varepsilon^{-1}\mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1}\mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \sigma_2(y) \equiv 0. \tag{29}$$

В этом случае (с учётом (27) и (28))

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & \varepsilon(1 - e^{-t/\varepsilon})\mathcal{I} \\ \mathcal{O} & e^{-t/\varepsilon}\mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_\varepsilon(t) := e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} (1 - e^{-t/\varepsilon})\mathcal{I} \\ \varepsilon^{-1}e^{-t/\varepsilon}\mathcal{I} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad l_\varepsilon \in \mathbb{R}^k, \quad \mathcal{C}_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon = (1 - e^{-t/\varepsilon})l_\varepsilon, \quad \nabla\sigma_1(x) = x.$$

Поскольку $\mathcal{A}_0 = \mathcal{O}$, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{I}$, то $\mathcal{C}_0(t) \equiv \mathcal{I}$, и управляемая система в предельной задаче (6) в этом случае имеет вид

$$\dot{x}_0 = u,$$

откуда справедливо равенство

$$x_0(T) = x^0 + \int\limits_0^T u(t)\,dt, \quad \text{причём} \quad \left\|\int\limits_0^T u(t)\,dt\right\| \leqslant T. \tag{30}$$

Так как абсолютный минимум функции $\sigma_0 = \sigma_1$ достигается в нуле, то предположение 4 имеет вид условия $0 \notin \Xi(T, x^0)$, которое выполняется тогда и только тогда, когда

$$\|x^0\| > T.$$

Достаточность этого условия следует из (30). С другой стороны, если это неравенство не выполняется, то управление $u(t) = -a(t)x^0$ (где $a(t) = 1$ на $[0, t^*)$ и $a(t) = 0$ на $[t^*, T]$) переводит x^0 в нуль, где $t^* = \|x^0\|$.

При выполнении условия $\|x^0\| > T$ определяющий вектор l_0 удовлетворяет уравнению (25):

$$-l_0 = x^0 + \frac{l_0}{\|l_0\|}T. \tag{31}$$

Из (31) получим, что $\|x^0\| = \|l_0\| + T$ и тем самым

$$l_0 = -x^0 \frac{\|x^0\| - T}{\|x^0\|} \neq 0. \tag{32}$$

Подставим вектор l_ε в уравнение (27) (в силу теоремы 3 $\rho_\varepsilon \equiv 0$):

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon(1 - e^{-T/\varepsilon})y^0 + \int\limits_0^T \frac{(1 - e^{-t/\varepsilon})^2 l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|(1 - e^{-t/\varepsilon})l_\varepsilon\|)}\,dt, \quad S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon^\alpha, \\ \xi, & \xi > \varepsilon^\alpha. \end{cases} \tag{33}$$

Найдём точку смены вида оптимального управления: $\|(1 - e^{-t/\varepsilon})l_\varepsilon\| = \varepsilon^\alpha$, откуда

$$t_\varepsilon = \varepsilon \ln\biggl(\frac{\|l_\varepsilon\|}{\|l_\varepsilon\| - \varepsilon^\alpha}\biggr). \tag{34}$$

Тогда уравнение из (33) запишется в виде

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon(1 - e^{-T/\varepsilon})y^0 + \int\limits_0^{t_\varepsilon} \frac{(1 - e^{-s/\varepsilon})^2 l_\varepsilon}{\varepsilon^\alpha}\,ds + \int\limits_{t_\varepsilon}^T \frac{(1 - e^{-s/\varepsilon})^2 l_\varepsilon}{(1 - e^{-s/\varepsilon})\|l_\varepsilon\|}\,ds,$$

откуда получим

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon(1 - e^{-T/\varepsilon})y^0 + \frac{l_\varepsilon}{\varepsilon^\alpha}\biggl(t_\varepsilon + 2\varepsilon(e^{-t_\varepsilon/\varepsilon} - 1) - \frac{\varepsilon}{2}(e^{-2t_\varepsilon/\varepsilon} - 1)\biggr) +$$

$$+ \frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}(T - t_\varepsilon + \varepsilon(e^{-T/\varepsilon} - e^{-t_\varepsilon/\varepsilon}))$$

и с учётом определения t_ε из (34) и приведения подобных слагаемых

$$0 = l_\varepsilon + x^0 + \varepsilon y^0 + \varepsilon e^{-T/\varepsilon}\biggl(\frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|} - y^0\biggr) + \frac{l_\varepsilon T}{\|l_\varepsilon\|} +$$

$$+ \varepsilon \ln\biggl(\frac{\|l_\varepsilon\|}{\|l_\varepsilon\| - \varepsilon^\alpha}\biggr)\biggl(\frac{1}{\varepsilon^\alpha} - \frac{1}{\|l_\varepsilon\|}\biggr)l_\varepsilon + \frac{\varepsilon^{\alpha+1} l_\varepsilon}{2\|l_\varepsilon\|^2} - \frac{2\varepsilon l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}. \tag{35}$$

При этом в силу того, что $l_\varepsilon \to l_0 \neq 0$ (см. (32)), представление

$$\ln\biggl(\frac{\|l_\varepsilon\|}{\|l_\varepsilon\| - \varepsilon^\alpha}\biggr) = \ln\biggl(1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{\|l_\varepsilon\| - \varepsilon^\alpha}\biggr) = \frac{\varepsilon^\alpha}{\|l_\varepsilon\| - \varepsilon^\alpha} + O(\varepsilon^{2\alpha}) \tag{36}$$

справедливо и раскладывается в степенной ряд относительно ε^α и компонент вектора $\Delta l := = l_\varepsilon - l_0$. Величины $\|l_\varepsilon\|^{-1}$ и $\|l_\varepsilon\|^{-2}$ также раскладываются в степенные ряды по компонентам вектора Δl.

Уравнение (35) имеет вид $0 = F(\Delta l, \varepsilon)$, где функция F бесконечно дифференцируема по Δl и $\varepsilon > 0$ и раскладывается в степенной ряд относительно $\varepsilon > 0$ и компонент вектора $\Delta l = l_\varepsilon - l_0$. В силу (35) и (36)

$$F(\Delta l, \varepsilon) = \Delta l + \varepsilon y^0 - \frac{\varepsilon l_0}{\|l_0\|} + \frac{T}{\|l_0\|^3}(\|l_0\|^2 \Delta l - l_0\langle l_0, \Delta l\rangle) + O(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2),$$

поэтому оператор первого приближения $\mathcal{F}(\Delta l)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(\Delta l) := \Delta l + \frac{T}{\|l_0\|^3}(\|l_0\|^2 \Delta l - l_0\langle \Delta l_0, \Delta l\rangle).$$

Поскольку с учётом неравенства Коши–Буняковского

$$\langle \mathcal{F}(\Delta l), \Delta l\rangle = \|\Delta l\|^2 + \frac{T}{\|l_0\|^3}(\|l_0\|^2\|\Delta l\|^2 - \langle l_0, \Delta l\rangle^2) > 0,$$

то оператор первого приближения $\mathcal{F}$ обратим. Поэтому (в формуле (6.1) ряд при $\varepsilon\ln\varepsilon$ равен нулю [18, теорема 1]) вектор l_ε при $\varepsilon \to +0$ раскладывается в асимптотический степенной ряд по степеням ε. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнено предположение 4. Определяющий вектор l_ε в задаче (4), (26), (29) при $\varepsilon \to 0$ раскладывается в асимптотический ряд по степеням ε следующего вида:*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \varepsilon l_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k l_k, \quad \varepsilon \to +0,$$

причём

$$l_0 = -x^0\frac{\|x^0\| - T}{\|x^0\|} \neq 0, \quad l_1 = \frac{\|l_0\|}{\|l_0\| + T}\left(\frac{l_0}{\|l_0\|} - y^0 + \frac{Tl_0}{\|l_0\|^3}\langle l_0, l_1\rangle\right), \quad \langle l_0, l_1\rangle = \|l_0\| - \langle y^0, l_0\rangle.$$

Поскольку в рассматриваемом случае

$$J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}) = \frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2 + \frac{\varepsilon^\alpha\|l_\varepsilon\|^2}{\varepsilon^{2\alpha}}\int_0^{t_\varepsilon}(1 - e^{-s/\varepsilon})^2\,ds + \varepsilon^\alpha\int_{t_\varepsilon}^{T}1\,ds = \frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2 + \varepsilon\|l_\varepsilon\| + \varepsilon^\alpha\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

то асимптотическое разложение вектора l_ε даёт асимптотическое разложение оптимального значения функционала качества. При этом в силу теоремы 4 справедливы представления

$$\frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2 = O(1), \quad \varepsilon^\alpha\left(T + \frac{\varepsilon}{2}\right) = O(\varepsilon^\alpha),$$

т.е. вклад от затрат на управление существенно ниже терминального слагаемого.

5. Управление системой материальных точек в среде без сопротивления с терминальной частью, зависящей только от медленных переменных. Рассмотрим задачу (4), (26) при следующих условиях:

$$n = m = r = k, \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix}\mathcal{O} & \mathcal{I}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix}\mathcal{O}\\ \varepsilon^{-1}\mathcal{I}\end{pmatrix}, \quad \sigma_1(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \sigma_2(y) \equiv 0. \tag{37}$$

Отметим, что для задачи (4), (26), (37) выполнено предположение 1, но не выполнено предположение 2, поэтому в данном случае предельные теоремы 1 и 2 не применимы.

В силу (37), (27) и (28) имеем

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix}\mathcal{I} & t\mathcal{I}\\ \mathcal{O} & \mathcal{I}\end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_\varepsilon(t) := e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\begin{pmatrix}t\mathcal{I}\\ \mathcal{I}\end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon = \frac{t}{\varepsilon}l_\varepsilon, \quad \lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix}l_\varepsilon\\ \mathcal{O}\end{pmatrix}, \quad l_\varepsilon \in \mathbb{R}^k.$$

Уравнение (27) тогда имеет вид

$$-l_\varepsilon = x^0 + Ty^0 + \int_0^T \frac{t^2}{\varepsilon^2}\frac{l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|\varepsilon^{-1}tl_\varepsilon\|)}\,dt, \quad S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases}\varepsilon^\alpha, & 0 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon^\alpha,\\ \xi, & \xi > \varepsilon^\alpha.\end{cases} \tag{38}$$

Обозначим

$$\mathcal{D} := x^0 + Ty^0, \quad I_\varepsilon := \int_0^T t\frac{\varepsilon^{-1}t}{S_\varepsilon(\|\varepsilon^{-1}tl_\varepsilon\|)}\,dt,$$

причём $I_\varepsilon > 0$, и из равенства $l_\varepsilon(1+\varepsilon^{-1}I_\varepsilon) = -\mathcal{D}$ выразим вектор $l_\varepsilon := -p_\varepsilon\mathcal{D}$, где $p_\varepsilon := (1 + \varepsilon^{-1}I_\varepsilon)^{-1} > 0$, тем самым l_ε и $\mathcal{D}$ – противоположно направленные векторы.

Найдём точку смены вида оптимального управления: $\|\varepsilon^{-1}tl_\varepsilon\| = \varepsilon^\alpha$, откуда $t_\varepsilon = \varepsilon^{\alpha+1}/\|l_\varepsilon\|$.

Тогда уравнение (38) запишется в виде

$$-l_\varepsilon = \mathcal{D} + \frac{l_\varepsilon}{\varepsilon^{2+\alpha}}\int\limits_0^{t_\varepsilon} s^2\,ds + \frac{l_\varepsilon}{\varepsilon\|l_\varepsilon\|}\int\limits_{t_\varepsilon}^{T} s\,ds,$$

откуда получим

$$-l_\varepsilon = \mathcal{D} - \frac{1}{6}\frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|^3}\varepsilon^{2\alpha+1} + \frac{T^2}{2\varepsilon}\frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}. \qquad (39)$$

Таким образом, после умножения уравнения (39) на ε уравнение для p_ε имеет вид

$$\varepsilon p = \varepsilon + \frac{\varepsilon^{2\alpha+2}}{6\|\mathcal{D}\|^3p^2} - \frac{T^2}{2\|\mathcal{D}\|}. \qquad (40)$$

Сделаем замену $p = \varepsilon^{\alpha+1}\tilde{p}$, тогда уравнение (40) примет вид

$$\varepsilon^{\alpha+2}\tilde{p} = \varepsilon + \frac{1}{6\|\mathcal{D}\|^3\tilde{p}^2} - \frac{T^2}{2\|\mathcal{D}\|}.$$

Отметим, что имеет место неравенство

$$\varepsilon + \frac{1}{6\|\mathcal{D}\|^3\tilde{p}^2} - \frac{T^2}{2\|\mathcal{D}\|} > 0,$$

поэтому $\tilde{p}_\varepsilon$ не может иметь ни нулевого частичного предела, ни бесконечно большого. Тем самым показано, что

$$\tilde{p}_\varepsilon \to \tilde{p}_0 = \frac{1}{T\sqrt{3}\|\mathcal{D}\|}.$$

Обозначим $\Delta p := \tilde{p}_\varepsilon - \tilde{p}_0$ и для Δp получим уравнение

$$0 = F(\Delta p, \varepsilon) = -\varepsilon^{\alpha+2}(\tilde{p}_0 + \Delta p) + \varepsilon + \frac{1}{6\|\mathcal{D}\|^3(\tilde{p}_0 + \Delta p)^2} - \frac{T^2}{2\|\mathcal{D}\|}.$$

При этом функция F бесконечно дифференцируема по Δp и $\varepsilon > 0$ и раскладывается в степенной ряд по степеням $\varepsilon > 0$ и Δp:

$$F(\Delta p, \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\Delta p}{3\|\mathcal{D}\|^3\tilde{p}_0^3} + O(\varepsilon^2 + \Delta\rho^2).$$

Таким образом, как и в п. 4, $\tilde{p}_\varepsilon$ раскладывается в асимптотический ряд по степеням ε. Поэтому справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнено предположение 4. Определяющий вектор l_ε в задаче (4), (26), (37) при $\varepsilon \to 0$ раскладывается в асимптотический ряд по степеням ε следующего вида:*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} -\mathcal{D}\varepsilon^{\alpha+1}\left(\tilde{p}_0 - 3\varepsilon\|\mathcal{D}\|^3\tilde{p}_0^3 + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{p}_k\right), \quad \varepsilon \to +0.$$

Так как в рассматриваемом случае выполняются неравенства

$$J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon^0) = \frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2 + \frac{\varepsilon^\alpha\|l_\varepsilon\|^2}{\varepsilon^{2+2\alpha}}\int\limits_0^{t_\varepsilon} s^2\,ds + \varepsilon^\alpha\int\limits_{t_\varepsilon}^{T} 1\,ds = \frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2 + \varepsilon^\alpha\left(T - \frac{2\varepsilon^{\alpha+1}}{3\|l_\varepsilon\|}\right), \quad \varepsilon \to +0,$$

то асимптотическое разложение вектора l_ε даёт асимптотическое разложение оптимального значения функционала качества. При этом в силу теоремы 5

$$\frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2 = O(\varepsilon^{2\alpha+2}), \quad \varepsilon^\alpha\left(T - \frac{2\varepsilon^{\alpha+1}}{3\|l_\varepsilon\|}\right) = O(\varepsilon^\alpha),$$

т.е. вклад от затрат на управление существенно выше терминального слагаемого.

6. Управление системой материальных точек в среде без сопротивления с терминальной частью, зависящей как от медленных, так и от быстрых переменных. Рассмотрим управление движением материальной точки в среде без сопротивления, но с критерием качества (26), т.е. задачу (4), (26) при следующих условиях:

$$n = m = r = k, \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1}\mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \sigma_2(y) := \frac{1}{2}\|y\|^2. \tag{41}$$

Как и в п. 5, для этой задачи выполнено предположение 1, но не выполнено предположение 2, поэтому предельные теоремы 1 и 2 не применимы.

В силу (41), (27) и (28) имеем

$$-l_\varepsilon = x_0 + Ty_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \frac{t(tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon)}{S_{1,\varepsilon}(\|tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon\|)}\,dt, \quad -\rho_\varepsilon = y_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \frac{tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon}{S_{1,\varepsilon}(\|tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon\|)}\,dt,$$

где

$$S_{1,\varepsilon} := \begin{cases} \varepsilon^{\alpha+1}, & 0 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon^{\alpha+1}, \\ \xi, & \xi > \varepsilon^{\alpha+1}. \end{cases}$$

Рассмотрим такие x^0, y^0, при которых ограничения на управление не по существу, т.е. для которых имеет место оценка $\|l_\varepsilon t + \rho_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon^{\alpha+1}$. Тогда

$$-l_\varepsilon = x_0 + Ty_0 + \frac{T^3}{3\varepsilon^{\alpha+2}}l_\varepsilon + \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}}\rho_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad -x_0 - Ty_0 = l_\varepsilon\left(1 + \frac{T^3}{3\varepsilon^{\alpha+2}}\right) + \rho_\varepsilon\left(\frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}}\right),$$

$$-\rho_\varepsilon = y_0 + \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}}l_\varepsilon + \frac{T}{\varepsilon^{\alpha+2}}\rho_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad -y_0 = l_\varepsilon\left(\frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}}\right) + \rho_\varepsilon\left(1 + \frac{T}{\varepsilon^{\alpha+2}}\right).$$

Посчитаем определители получившейся системы линейных уравнений:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{T^3}{3\varepsilon^{\alpha+2}} & \dfrac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}} \\ \dfrac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}} & 1 + \dfrac{T}{\varepsilon^{\alpha+2}} \end{vmatrix} = 1 + \frac{T}{3\varepsilon^{\alpha+2}}(3 + T^2) + \frac{T^4}{12\varepsilon^{2\alpha+4}},$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} -x^0 - Ty^0 & \dfrac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}} \\ -y^0 & 1 + \dfrac{T}{\varepsilon^{\alpha+2}} \end{vmatrix} = -x^0 - Ty^0 - \frac{T}{\varepsilon^{\alpha+2}}x^0 - \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}}y^0,$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{T^3}{3\varepsilon^{\alpha+2}} & -x^0 - Ty^0 \\ \dfrac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}} & -y^0 \end{vmatrix} = -y^0 + \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}}x^0 + \frac{T^3}{6\varepsilon^{\alpha+2}}y^0.$$

Применив формулы Крамера, получим значения

$$l_\varepsilon = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{12\varepsilon^{2\alpha+4}(-2x^0\varepsilon^{\alpha+2} - 2Ty^0\varepsilon^{\alpha+2} - 2Tx^0 - T^2y^0)}{2\varepsilon^{\alpha+2}(12\varepsilon^{2\alpha+4} + 4\varepsilon^{\alpha+2}(3 + T^2) + T^4)}, \tag{42}$$

$$\rho_\varepsilon = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{12\varepsilon^{2\alpha+4}(-6y^0\varepsilon^{\alpha+2} + 3T^2x^0 + T^3y^0)}{6\varepsilon^{\alpha+2}(12\varepsilon^{2\alpha+4} + 4\varepsilon^{\alpha+2}(3+T^2) + T^4)}, \tag{43}$$

откуда следует, что

$$l_\varepsilon = \frac{6}{T^4}(-2Tx^0 - T^2y^0)\varepsilon^{\alpha+2} + O(\varepsilon^{\alpha+3}), \quad \rho_\varepsilon = \frac{2}{T^4}(3T^2x^0 + T^3y^0)\varepsilon^{\alpha+2} + O(\varepsilon^{\alpha+3}) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, оптимальное управление имеет вид

$$u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(t) = \left(\frac{6t}{T^4}(-2Tx^0 - T^2y^0) + \frac{2}{T^4}(3T^2x^0 + T^3y^0)\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2) =: (tA+B)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

а функционал качества

$$J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}) = \frac{1}{2}\| - l_\varepsilon\|^2 + \frac{1}{2}\| - \rho_\varepsilon\|^2 + \frac{\varepsilon^{\alpha+2}}{2}\int\limits_0^T (tA+B)^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}(A^2+B^2)\varepsilon^{2\alpha+4} + \frac{1}{2}\left(A^2\frac{T^3}{3} + ABT^2 + B^2T\right)\varepsilon^{\alpha+2} + O(\varepsilon^{\alpha+3}) = O(\varepsilon^{\alpha+2}) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где $A := 6T^{-4}(-2Tx^0 - T^2y^0)$, $B := 2T^{-4}(3T^2x^0 + T^3y^0)$.

Эти асимптотические оценки не зависят от x^0 и y^0. Из них следует, что $\|tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon^{\alpha+1}$ при всех достаточно малых ε, т.е. существует $\varepsilon_0(x_0, y_0)$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ справедливо неравенство $\|tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon^{\alpha+1}$.

Таким образом, как и в п. 5, l_ε и ρ_ε раскладываются в асимптотический ряд по степеням ε. Поэтому справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнено предположение 4. Определяющий вектор λ_ε в задаче (4), (26), (37) при $\varepsilon \to 0$ находится по формулам (42) и (43) и раскладывается в асимптотический ряд по степеням ε, начиная с порядка $\varepsilon^{\alpha+2}$.*

Отметим, что как и в предыдущей задаче вклад от затрат на управление в рассматриваемой задаче существенно больше величины терминального слагаемого.

Заключение. Решение задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и “дешёвым” управлением, вообще говоря, более регулярно зависит от малого параметра, чем решение задачи быстродействия.

При рассмотрении отдельных примеров показано, что учёт энергозатрат на реализацию оптимального управления может как существенно влиять на значение величины оптимального функционала качества (задачи управления точкой в среде без сопротивления), так и наоборот, быть несущественным по отношению к величине оптимального значения функционала качества (задача управления точкой в среде с сопротивлением).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М., 1968.
3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., 1972.
4. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
5. *Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.* Асимптотика решения одной сингулярно возмущённой задачи Коши, возникающей в теории оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 4. С. 601–612.
6. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Асимптотическое решение линейноквадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 124–139.

7. *Данилин А.Р., Ильин А.М.* Асимптотическое поведение решения задачи быстродействия для линейной системы при возмущении начальных данных // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 155–157.
8. *Данилин А.Р., Ильин А.М.* О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4. № 3. С. 905–926.
9. *Данилин А.Р., Коврижных О.О.* Асимптотическое представление решения сингулярно возмущенной линейной задачи быстродействия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 67–79.
10. *Дончев А.* Системы оптимального управления: возмущения, приближения и анализ чувствительности. М., 1987.
11. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М., 2001.
12. *Демьянов В.М., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М., 1981.
13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., 1973.
14. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М., 1988.
15. *Kokotovic P.V., Haddad A.H.* Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. 20. № 1. P. 111–113.
16. *Шабуров А.А.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 2. С. 280–289.
17. *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Краткий курс теории экстремальных задач. М., 1989.
18. *Данилин А.Р., Коврижных О.О.* Асимптотика решения одной задачи быстродействия с неограниченным целевым множеством для линейной системы в критическом случае // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28. № 1. С. 58–73.

Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 21.02.2022 г.
После доработки 20.04.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.