ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 100–114

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ УПРАВЛЕНИЕМ НА ОСНОВЕ МАСШТАБИРОВАНИЯ ВРЕМЕНИ И ОДНОКРАТНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

© 2023 г. Д. А. Фетисов

Доказывается необходимое и достаточное условие линеаризуемости нелинейных систем с одним управлением в классе преобразований, содержащих масштабирования времени и сохраняющих многообразие состояний. Даётся описание систем, которые получены однократным продолжением нелинейной системы с одним управлением и являются A-орбитально линеаризуемыми. Доказывается, что из A-орбитальной линеаризуемости системы, полученной однократным продолжением аффинной системы с одним управлением, следует A-орбитальная линеаризуемость и исходной системы. Показывается, что если система, полученная k-кратным продолжением нелинейной системы с одним управлением, где $k \geqslant 2$, A-орбитально линеаризуема, то и система, полученная из исходной системы её однократным продолжением, также A-орбитально линеаризуема.

DOI: 10.31857/S0374064123010090, EDN: OCWPMQ

Введение. Задача преобразования нелинейных систем с управлением в линейные управляемые системы занимает одно из центральных мест в современной теории управления. Начало исследованиям в этой области было положено в работе [1], где для аффинных систем с одним управлением получены условия линеаризуемости в специальном классе преобразований. Впоследствии (см. [2, 3]) эти условия были обобщены и приняли вид известных до настоящего времени условий статической линеаризуемости обратной связью. Двойственный аналог этих условий получен в статье [4]. Условия статической линеаризуемости обратной связью для многих систем не выполняются, поэтому дальнейшие исследования в этой области были нацелены на распространение результатов в области линеаризации на более широкие классы систем – так появились понятия: приближённая линеаризация обратной связью [5], частичная линеаризация обратной связью [6], линеаризация обратной связью по выходу [7, с. 225] и др.

Важным обобщением понятия статической линеаризуемости обратной связью стало понятие плоскостности [8]. Напомним, что *плоской* называют систему, траектории которой могут быть параметризованы набором гладких функций и их производных по времени до некоторого порядка. При этом сами функции указанного набора называют *плоским выходом системы*. Известно, что система с одним управлением является плоской тогда и только тогда, когда она статически линеаризуема обратной связью (см. [9]). Для систем с векторным управлением статическая линеаризуемость обратной связью является частным случаем плоскостности и характеризуется сохранением многообразия состояний при линеаризующих преобразованиях.

Обобщением понятия плоскостности на случай, когда дополнительно к заменам состояний и управлений используются масштабирования времени [10], является понятие орбитальной плоскостности [11]. Систему называют *орбитально плоской*, если распределение, порождённое бесконечномерным векторным полем, соответствующим системе, диффеоморфно распределению, порождённому бесконечномерным векторным полем тривиальной линейной управляемой системы (системы без внутренней динамики). Масштабирования времени и линеаризация нелинейных систем на их основе применяются для решения разнообразных прикладных задач [12, 13]. Частными случаями орбитальной плоскостности являются введённые для аффинных систем понятия орбитальной линеаризуемости [14] и A-орбитальной линеаризуемости [15].

Орбитальная линеаризация основана на масштабированиях времени, зависящих только от состояния. Условия орбитальной линеаризуемости для систем с одним управлением можно найти в работах [14, 16], для систем с векторным управлением – в статье [17].

A-орбитальная линеаризация аффинных систем основана на масштабированиях времени, зависящих как от состояния, так и от управления. Напомним основные понятия, связанные с A-орбитальной линеаризуемостью аффинных систем с одним управлением. Пусть рассматривается система

$$\Sigma_{\text{aff}}: \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n) \in X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, – состояние, X – открытое множество, $u \in \mathbb{R}$ – управление, f и g – гладкие векторные поля. Под гладкостью в настоящей работе всюду понимается бесконечная дифференцируемость.

Следуя работе [18], будем говорить, что система Σ_{aff} A-орбитально линеаризуема в окрестности точки $x_0 \in X$, если существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0, для которой найдутся невырожденная матрица $A = (\alpha^i_j)^{i=0,1}_{j=0,1}$, $\alpha^i_j \in C^\infty(V(x_0))$, и диффеоморфизм $\Phi : V(x_0) \to \to \Phi(V(x_0))$ такие, что заменой независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha^0_0(x) + \alpha^0_1(x)u,$$

заменой управления

$$v = \frac{\alpha^1_0(x) + \alpha^1_1(x)u}{\alpha^0_0(x) + \alpha^0_1(x)u}$$

и заменой состояния $y = \Phi(x)$ система Σ_{aff} преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x,u) : x \in \in V(x_0), \alpha^0_0(x) + \alpha^0_1(x)u \neq 0\}$ в систему

$$(y^1)' = y^2, \quad \ldots, \quad (y^{n-2})' = y^{n-1}, \quad (y^{n-1})' = v, \quad (y^n)' = 1, \tag{1}$$

определённую на множестве $M_{yv} = \{(y,v) : y \in \Phi(V(x_0)), \alpha^1_1(\Phi^{-1}(y)) - \alpha^0_1(\Phi^{-1}(y))v \neq 0\}$. Отметим, что в системе (1) штрих обозначает дифференцирование по переменной τ.

Очевидно, что в системе (1) переменную состояния y^n можно рассматривать как независимую переменную, а саму систему (1) можно считать линейной управляемой системой $(n-1)$-го порядка

$$(y^1)' = y^2, \quad \ldots, \quad (y^{n-2})' = y^{n-1}, \quad (y^{n-1})' = v. \tag{2}$$

Условие A-орбитальной линеаризуемости системы Σ_{aff} в окрестности точки x_0 известно из работы [19]. Чтобы его сформулировать, сопоставим системе Σ_{aff} кораспределение $\mathcal{I} = = (\operatorname{span}_{C^\infty}\{f, g\})^\perp$ и построим его производный флаг, т.е. последовательность кораспределений $\mathcal{I}^0 \supset \mathcal{I}^1 \supset \mathcal{I}^2 \supset \ldots$, составляемых по правилу

$$\mathcal{I}^0 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}^{j+1} = \{\omega \in \mathcal{I}^j : d\omega \equiv 0 \mod \mathcal{I}^j\}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $d\omega$ – внешний дифференциал формы ω. Напомним, что характеристическим кораспределением гладкого кораспределения $\mathcal{K}$, имеющего постоянный ранг в окрестности точки x_0, называют кораспределение $\mathcal{CK} = \{\xi \in \mathcal{K}^\perp : \text{ для любой } \omega \in \mathcal{K} \ \ \xi \lrcorner d\omega \in \mathcal{K}\}^\perp$, где $\xi \lrcorner d\omega$ – внутреннее произведение векторного поля ξ и дифференциальной формы $d\omega$. Отметим, что если $\mathcal{CK}$ является в окрестности точки x_0 гладким кораспределением постоянного ранга, то оно вполне интегрируемо в окрестности этой точки.

Справедлива следующая

Теорема 1 [19]. *Система Σ_{aff} A-орбитально линеаризуема в окрестности точки $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда элементы $\mathcal{I}^j$, $j = \overline{0, n-2}$, производного флага кораспределения $\mathcal{I}$ удовлетворяют следующим двум условиям:*

1) ранги кораспределений $\mathcal{I}^j$, $j = \overline{0, n-2}$, постоянны в окрестности точки x_0;

2) $\mathcal{CI}^{n-3}(x_0) \not\subset \mathcal{I}(x_0)$.

Из доказательства теоремы 1 следует (см. [19]), что если система Σ_{aff} A-орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0, то $f(x_0)$ и $g(x_0)$ линейно независимы, а ранги кораспределений $\mathcal{I}^j$, $j = \overline{0, n-2}$, удовлетворяют равенствам $\operatorname{rank}\mathcal{I}^j = n - j - 2$.

Отметим, что условие A-орбитальной линеаризуемости для систем с векторным управлением получено в статье [19].

В настоящей работе для нелинейных систем с одним управлением рассматривается задача линеаризации в классе преобразований, содержащих масштабирования времени и сохраняющих многообразие состояний. Наряду с этим исследуется возможность линеаризации систем, полученных из нелинейной системы её k-кратным продолжением. Отметим, что система, полученная k-кратным продолжением нелинейной системы, является аффинной по управлению, в связи с чем задача линеаризации k-кратного продолжения может быть решена с привлечением техники A-орбитальной линеаризации. В работе описывается множество систем, которые получены однократным продолжением нелинейной системы и являются A-орбитально линеаризуемыми. Отдельно рассматривается вопрос об A-орбитальной линеаризации систем, полученных однократным продолжением аффинной системы. Доказывается, что из A-орбитальной линеаризуемости однократного продолжения следует A-орбитальная линеаризуемость и исходной аффинной системы. Показывается, что из A-орбитальной линеаризуемости k-кратного продолжения $(k \geqslant 2)$ нелинейной системы следует A-орбитальная линеаризуемость и её однократного продолжения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную систему

$$\Sigma: \quad \dot{x} = F(x,u),$$

в которой $x = (x^1,\ldots,x^n)$, $n \geqslant 3$, – состояние, u – управление, $(x,u) \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, M – открытое множество, F – гладкое векторное поле. Будем полагать, что система Σ рассматривается в окрестности некоторой точки $(x_0,u_0) \in M$, для которой выполняется условие $F(x_0,u_0) \neq 0$.

Рассмотрим задачу нахождения отображения $(\tau,y,v) = \Psi(t,x,u)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $y=(y^1,\ldots,y^n) \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}$, которое задаётся соотношениями

$$\dot{\tau} = \theta(x,u), \quad y = \varphi(x), \quad v = \psi(x,u) \tag{4}$$

и удовлетворяет условиям:

а) функции θ и ψ являются гладкими в окрестности точки (x_0,u_0), функция φ является гладкой в окрестности точки x_0;

б) имеют место соотношения

$$\theta(x_0,u_0) \neq 0, \quad \det\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0) \neq 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u}(x_0,u_0) \neq 0;$$

в) равенства (4) преобразуют систему Σ в окрестности точки (x_0,u_0) в систему (1).

Как отмечено выше, систему (1) можно рассматривать как линейную управляемую систему (2) порядка $n-1$. В связи с этим будем говорить, что рассматриваемая задача – это задача линеаризации системы Σ в окрестности точки (x_0,u_0) в классе преобразований (4).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Система Σ линеаризуема в окрестности точки (x_0,u_0) в классе преобразований (4) тогда и только тогда, когда существуют гладкие замены состояния и управления*

$$y = \varphi(x), \quad v = \psi(x,u), \quad \det\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0) \neq 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u}(x_0,u_0) \neq 0, \tag{5}$$

для которых найдётся гладкая функция $h(y,v)$ такая, что $h(\varphi(x_0),\psi(x_0,u_0)) \neq 0$, и с помощью (5) система Σ в окрестности точки (x_0,u_0) преобразуется в систему

$$\dot{y}^1 = y^2 h(y,v), \quad \ldots, \quad \dot{y}^{n-2} = y^{n-1}h(y,v), \quad \dot{y}^{n-1} = vh(y,v), \quad \dot{y}^n = h(y,v). \tag{6}$$

Доказательство леммы очевидно. Отметим, что если замена (5), удовлетворяющая условиям леммы, найдена, то в линеаризующем преобразовании Ψ замены состояния и управления задаются соотношениями (5), а функция θ, определяющая линеаризующую замену независимой переменной, связана с функцией h равенством $\theta(x,u) = h(\varphi(x),\psi(x,u))$.

Согласно лемме задачу линеаризации системы Σ в классе преобразований (4) можно рассматривать как задачу поиска замены (5) и функции h таких, что заменой (5) система Σ преобразуется в систему (6).

2. Условие линеаризуемости. С системой Σ естественным образом ассоциируется кораспределение $\mathcal{J} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dx^i - F^i(x,u)\,dt,\ \ i=\overline{1,n}\}$, заданное на множестве $M\times\mathbb{R}$ изменения переменных x, u, t. Для того чтобы решить задачу линеаризации системы Σ в классе преобразований (4), свяжем с системой Σ кораспределение

$$\mathcal{I} = \{\omega\in\mathcal{J} : \omega(\partial/\partial t) = 0\}.$$

Установим вид кораспределения $\mathcal{I}$. С этой целью будем искать формы, порождающие $\mathcal{I}$, в виде $\omega = \sum_{i=1}^n \lambda_i(dx^i - F^i(x,u)\,dt)$, где λ_i – гладкие функции, подлежащие определению. Из условия $\omega(\partial/\partial t) = 0$ получаем уравнение $\sum_{i=1}^n \lambda_i F^i(x,u) = 0$. Поскольку $F(x_0,u_0)\neq 0$, то это уравнение в окрестности точки (x_0,u_0) имеет $n-1$ линейно независимых решений. Обозначим их через $\lambda^1(x,u),\ \ldots,\ \lambda^{n-1}(x,u)$. Тогда кораспределение $\mathcal{I}$ порождается формами

$$\omega^l = \sum_{i=1}^n \lambda_i^l(x,u)(dx^i - F^i(x,u)\,dt) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^l(x,u)\,dx^i,\quad l=\overline{1,n-1}.$$

Таким образом, $\mathcal{I}$ – кораспределение ранга $n-1$, заданное на множестве M и имеющее вид

$$\mathcal{I} = \operatorname{span}_{C^\infty}\biggl\{\sum_{i=1}^n \lambda_i^l(x,u)\,dx^i,\ l=\overline{1,n-1}\biggr\}. \tag{7}$$

Главным результатом в этом пункте является следующая теорема (в её формулировке и доказательстве используется производный флаг $\mathcal{I}^j$, $j=0,1,2,\ldots,$ кораспределения $\mathcal{I}$, составленный по правилу (3)).

Теорема 2. *Система Σ линеаризуема в окрестности точки $(x_0,u_0)\in M$ в классе преобразований (4) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) ранги кораспределений $\mathcal{I}^j$, $j=\overline{0,n-1}$, постоянны в окрестности точки (x_0,u_0);

2) в окрестности точки (x_0,u_0) имеет место включение $\mathcal{CI}^{n-2}\subset\operatorname{span}_{C^\infty}\{dx^1,\ldots,dx^n\}$;

3) $\mathcal{CI}^{n-2}(x_0,u_0)\not\subset\mathcal{I}(x_0,u_0)$.

Доказательство. Достаточность. Как показано в работе [19], выполнение условий 1) и 3) означает, что ранги кораспределений $\mathcal{I}^j$, $j=\overline{0,n-1}$, удовлетворяют условию $\operatorname{rank}\mathcal{I}^j = n-j-1$. Обозначим через ω дифференциальную 1-форму, порождающую кораспределение $\mathcal{I}^{n-2}$, так что $\mathcal{I}^{n-2} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\omega\}$. Согласно [19] характеристическое кораспределение $\mathcal{CI}^{n-2}$ кораспределения $\mathcal{I}^{n-2}$ в окрестности точки (x_0,u_0) является вполне интегрируемым кораспределением ранга 3 и, следовательно, может быть представлено в виде $\mathcal{CI}^{n-2} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dz^1,dz^2,dz^3\}$, где z^1, z^2, z^3 – гладкие функции, независимые в окрестности точки (x_0,u_0).

Выполнение условия 2) означает, что для любого $k=1,2,3$ в окрестности точки (x_0,u_0) имеют место равенства $(z^k)'_u = 0$. Таким образом, интегралы характеристического кораспределения $\mathcal{CI}^{n-2}$ являются функциями только состояния x: $z^k = z^k(x)$, $k=1,2,3$.

Из условия 3) теоремы следует, что по крайней мере одна из функций z^k, $k=1,2,3$, например z^3, удовлетворяет условию $dz^3(x_0)\notin\mathcal{I}(x_0,u_0)$. В статье [19] показано, что кораспределение $\mathcal{L} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\omega, dz^3\}$ в окрестности точки (x_0,u_0) вполне интегрируемо и представимо в виде $\mathcal{L} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1,dy^n\}$, где $y^n = z^3$, а y^1 – гладкая функция, такая, что y^1 и y^n независимы в окрестности точки (x_0,u_0). Согласно [19] все кораспределения $\mathcal{I}^j$, $j=\overline{0,n-2}$, в окрестности точки (x_0,u_0) могут быть представлены в виде

$$\mathcal{I}^j = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1 - y^2\,dy^n,\ldots,dy^{n-j-1} - y^{n-j}\,dy^n\},\quad j=\overline{1,n-2},$$
$$\mathcal{I}^0 = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1 - y^2\,dy^n,\ldots,dy^{n-2} - y^{n-1}\,dy^n, dy^{n-1} - v\,dy^n\}, \tag{8}$$

где $y^1,\ \ldots,\ y^n,\ v$ – гладкие функции, независимые в окрестности точки (x_0,u_0).

Покажем, что $(y^j)'_u \equiv 0$, $j=\overline{1,n-1}$, в окрестности точки (x_0,u_0). Действительно, ранее показано, что $(y^n)'_u \equiv 0$, поэтому если для некоторого $j\in\{1,\dots,n-1\}$ в любой окрестности точки (x_0,u_0) найдётся точка $(\tilde x,\tilde u)$ такая, что $(y^j)'_u(\tilde x,\tilde u)\neq 0$, то в подпространстве $\mathcal{I}(\tilde x,\tilde u)$ содержится форма $\tilde\omega$, удовлетворяющая сравнению $\tilde\omega\equiv du \bmod \{dx^1,\dots,dx^n\}$, чего согласно (7) быть не может.

Обозначим через Φ диффеоморфизм, заданный системой функций $y^j=y^j(x)$, $j=\overline{1,n}$, $v=v(x,u)$. Пусть $(y_0,v_0)=\Phi(x_0,u_0)$. Образующими кораспределения $\mathcal{J}$ являются формы

$$\overline{\omega}^i = dy^i - y^{i+1}\,dy^n,\quad i=\overline{1,n-2},\quad \overline{\omega}^{n-1} = dy^{n-1} - v\,dy^n, \tag{9}$$

которые согласно (8) порождают кораспределение $\mathcal{I}$, и некоторая форма, содержащаяся в $\mathcal{J}$ и не зависящая линейно от $\overline{\omega}^i$, $i=\overline{1,n-1}$. Пусть производная функции y^n в силу системы Σ задаётся выражением $\dot y^n=\theta(x,u)$. Тогда очевидно, что в кораспределении $\mathcal{J}$ содержится дифференциальная 1-форма $dy^n-h(y,v)\,dt$, где $h(y,v)=\theta(\Phi^{-1}(y,v))$. Указанная форма не зависит линейно от $\overline{\omega}^i$, $i=\overline{1,n-1}$. Следовательно, кораспределение $\mathcal{J}$ может быть представлено в виде

$$\mathcal{J}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1-y^2\,dy^n,\dots,dy^{n-2}-y^{n-1}\,dy^n,dy^{n-1}-v\,dy^n,dy^n-h(y,v)\,dt\}$$

или (что то же самое)

$$\mathcal{J}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1-y^2h(y,v)\,dt,\dots,dy^{n-2}-y^{n-1}h(y,v)\,dt,dy^{n-1}-vh(y,v)\,dt,dy^n-h(y,v)\,dt\}.$$

Отсюда вытекает, что диффеоморфизм Φ преобразует систему Σ в окрестности точки (x_0,u_0) в систему (6). Отметим, что $h(y_0,v_0)\neq 0$, так как противное означало бы выполнение равенства $F(x_0,u_0)=0$. Как было отмечено выше, при переходе в системе (6) к новой независимой переменной y^n получим линейную управляемую систему (2).

Необходимость. Пусть система Σ в окрестности точки (x_0,u_0) преобразуется в классе преобразований (4) в систему (6), где $h(y,v)$ – некоторая функция, гладкая в окрестности точки $(y_0,v_0)=\Phi(x_0,u_0)$ и такая, что $h(y_0,v_0)\neq 0$. Системе (6) соответствует кораспределение

$$\hat{\mathcal{J}}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1-y^2h(y,v)\,dt,\dots,dy^{n-2}-y^{n-1}h(y,v)\,dt,\ dy^{n-1}-vh(y,v)\,dt,\ dy^n-h(y,v)\,dt\}.$$

Кораспределение $\hat{\mathcal{I}}=\{\omega\in\hat{\mathcal{J}}:\omega(\partial/\partial t)=0\}$ имеет вид

$$\hat{\mathcal{I}}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1-y^2\,dy^n,\dots,dy^{n-2}-y^{n-1}\,dy^n,\ dy^{n-1}-v\,dy^n\}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что производный флаг кораспределения $\hat{\mathcal{I}}$ образован кораспределениями

$$\hat{\mathcal{I}}^0=\hat{\mathcal{I}},\quad \hat{\mathcal{I}}^j=\operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^i-y^{i+1}\,dy^n,\ i=\overline{1,n-j-1}\},\quad j=\overline{1,n-2},\quad \hat{\mathcal{I}}^{n-1}=\mathcal{O},$$

где $\mathcal{O}:(y,v)\mapsto\{0\}$ – тривиальное кораспределение. Легко видеть, что ранги всех кораспределений $\hat{\mathcal{I}}^j$, $j=\overline{0,n-1}$, постоянны в окрестности точки (y_0,v_0). Кораспределение $\hat{\mathcal{I}}^{n-2}$ имеет вид $\hat{\mathcal{I}}^{n-2}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1-y^2\,dy^n\}$, его характеристическое кораспределение – вид $\mathcal{C}\hat{\mathcal{I}}^{n-2}= =\operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1,dy^2,dy^n\}$. Отсюда вытекает, что в окрестности точки (y_0,v_0) имеет место включение $\mathcal{C}\hat{\mathcal{I}}^{n-2}\subset\operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1,\dots,dy^n\}$ и выполнено условие $\mathcal{C}\hat{\mathcal{I}}^{n-2}(y_0,v_0)\not\subset\hat{\mathcal{I}}(y_0,v_0)$. Следовательно, кораспределение $\mathcal{I}$, соответствующее системе Σ, удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. *Из доказательства достаточности вытекает, что функция $y^n=y^n(x)$ удовлетворяет условию $dy^n(x_0)\notin\mathcal{I}(x_0,u_0)$. Следовательно, в аннуляторе кораспределения $\mathcal{I}$, которым, как нетрудно видеть, является распределение*

$$\mathcal{P}=\operatorname{span}_{C^\infty}\bigg\{\sum_{i=1}^n F^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial u}\bigg\},$$

найдётся векторное поле ξ *такое, что* $dy^n(\xi)(x_0, u_0) \neq 0$. *Поскольку* $(y^n)'_u \equiv 0$, *то таким векторным полем является поле* F. *Следовательно, новая независимая переменная* y^n *удовлетворяет условию* $dy^n(F)(x_0, u_0) \neq 0$.

Следствие 2. *Каждая из форм* $\overline{\omega}^i$, $i = \overline{1, n-1}$, *задаваемых соотношениями (9), обращается в нуль на векторных полях, порождающих распределение* $\mathcal{P}$, *в том числе и на поле* F. *Действительно,* $\overline{\omega}^i \in \mathcal{P}^\perp$, $i = \overline{1, n-1}$. *Следовательно,* $\overline{\omega}^i(F) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$. *Запишем эти равенства в виде*

$$(dy^i - y^{i+1}\, dy^n)(F) = 0, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad (dy^{n-1} - v\, dy^n)(F) = 0$$

и заметим, что поскольку $dy^n(F)(x_0, u_0) \neq 0$, *то в окрестности точки* (x_0, u_0) *справедливы соотношения*

$$y^{i+1} = \frac{dy^i(F)}{dy^n(F)}, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad v = \frac{dy^{n-1}(F)}{dy^n(F)}. \tag{10}$$

Эти формулы позволяют, зная y^1 *и* y^n, *найти остальные переменные состояния и управление в системе (2).*

Замечание 1. В частном случае, когда система Σ аффинна по управлению, связь между A-орбитальной линеаризуемостью системы и линеаризуемостью системы в классе преобразований (4) описывается следующим образом. Если система Σ аффинна по управлению и A-орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0, то для любого u_0 такого, что $\alpha_0^0(x_0) + \alpha_1^0(x_0)u_0 \neq 0$, система Σ линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4). Если система Σ аффинна по управлению и линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4), то система Σ A-орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0 и выполняется условие $\alpha_0^0(x_0) + \alpha_1^0(x_0)u_0 \neq 0$.

3. Алгоритм линеаризации. Для того чтобы линеаризовать систему Σ в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4), требуется выполнить следующие действия. Построим кораспределение $\mathcal{J} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dx^i - F^i(x,u)\, dt, \ i = \overline{1, n}\}$, ассоциированное с системой Σ. Найдём кораспределение $\mathcal{I} = \{\omega \in \mathcal{J} : \omega(\partial/\partial t) = 0\}$ и построим его производный флаг. Проверим, что ранги всех кораспределений, составляющих производный флаг, постоянны в окрестности точки (x_0, u_0). Из доказательства теоремы 2 следует, что если для некоторого $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ ранг кораспределения $\mathcal{I}^j$ отличен от $n - j - 1$, то система Σ не линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4). Для кораспределения $\mathcal{I}^{n-2} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\omega\}$ построим характеристическое кораспределение $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-2}$ и найдём полную систему z^1, z^2, z^3 его интегралов. В результате характеристическое кораспределение $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-2}$ будет представлено в виде $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-2} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dz^1, dz^2, dz^3\}$. Проверим выполнение равенств $(z^k)'_u \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. Если хотя бы одно из них не выполнено, то система Σ не линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4). В противном случае определим, существует ли номер $k \in \{1, 2, 3\}$, для которого имеет место условие $dz^k(F)(x_0, u_0) \neq 0$. Если такого k не существует, то система Σ не линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4). В противном случае линеаризовать систему Σ в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4) возможно. Предположим для определённости, что $dz^3(F)(x_0, u_0) \neq 0$. Тогда принимаем $y^n = z^3$ и составляем кораспределение $\mathcal{L} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\omega, dy^n\}$. Как отмечено в доказательстве теоремы 2, кораспределение $\mathcal{L}$ вполне интегрируемо в окрестности точки x_0. Найдём интеграл y^1 кораспределения $\mathcal{L}$, независимый от y^n. Используя формулы (10), определим функции y^2, $\ldots$, y^{n-1}, v. Как показано выше, соотношения $y^j = y^j(x)$, $j = \overline{1, n}$, $v = v(x, u)$ задают линеаризующее преобразование системы Σ, причём y^n должна быть выбрана новой независимой переменной.

В качестве примера покажем, что система

$$\dot{x}^1 = u - 2x^4(u)^2 - 2u(x^4)^2 + x^4, \quad \dot{x}^2 = ux^4 + (x^4)^2,$$

$$\dot{x}^3 = ux^2 + x^2x^4 + 3(x^2)^2x^4u + 3(x^2)^2(x^4)^2, \quad \dot{x}^4 = (u)^2 + ux^4 \tag{11}$$

с состоянием $x \in \mathbb{R}^4$ и управлением $u \in \mathbb{R}$ линеаризуема в классе преобразований (4) в окрестности любой точки $(x_0, u_0) \in M = \{(x, u) : x^4 \neq 0, \ u + x^4 \neq 0\}$.

Системе (11) соответствуют векторное поле

$$F=(u-2x^4(u)^2-2u(x^4)^2+x^4)\frac{\partial}{\partial x^1}+(ux^4+(x^4)^2)\frac{\partial}{\partial x^2}+$$

$$+(ux^2+x^2x^4+3(x^2)^2x^4u+3(x^2)^2(x^4)^2)\frac{\partial}{\partial x^3}+((u)^2+ux^4)\frac{\partial}{\partial x^4}$$

и кораспределение

$$\mathcal{J}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{dx^1-(u-2x^4(u)^2-2u(x^4)^2+x^4)\,dt, dx^2-(ux^4+(x^4)^2)\,dt,$$

$$dx^3-(ux^2+x^2x^4+3(x^2)^2x^4u+3(x^2)^2(x^4)^2)\,dt, dx^4-((u)^2+ux^4)\,dt\}.$$

Кораспределение $\mathcal{I}=\{\omega\in\mathcal{J}:\omega(\partial/\partial t)=0\}$ имеет вид

$$\mathcal{I}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{x^4\,dx^1-(1-2x^4u)\,dx^2, x^4\,dx^3-(x^2+3(x^2)^2x^4)\,dx^2, x^4\,dx^4-u\,dx^2\}.$$

Его производный флаг образован кораспределениями

$$\mathcal{I}^0=\mathcal{I},\quad \mathcal{I}^1=\operatorname{span}_{C^\infty}\{x^4\,dx^1-\,dx^2+2(x^4)^2\,dx^4, x^4\,dx^3-(x^2+3(x^2)^2x^4)\,dx^2\},$$

$$\mathcal{I}^2=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\omega\},\quad \mathcal{I}^3=\mathcal{O},$$

где $\omega=dx^3-3(x^2)^2\,dx^2-2x^2x^4\,dx^4-x^2\,dx^1$.

Аннулятором кораспределения $\mathcal{I}^2$ является распределение $(\mathcal{I}^2)^\perp=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4\}$, в котором

$$\xi_1=\frac{\partial}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial}{\partial x^3},\quad \xi_2=\frac{\partial}{\partial x^2}+3(x^2)^2\frac{\partial}{\partial x^3},\quad \xi_3=2x^2x^4\frac{\partial}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x^4},\quad \xi_4=\frac{\partial}{\partial u}.$$

Построим характеристическое кораспределение $\mathcal{C}\mathcal{I}^2=\{\xi\in(\mathcal{I}^2)^\perp:\xi\lrcorner\,d\omega\in\mathcal{I}^2\}^\perp$ кораспределения $\mathcal{I}^2$. Нетрудно видеть, что $d\omega=dx^1\wedge dx^2+2x^4\,dx^4\wedge dx^2$, где $\wedge$ обозначает внешнее произведение дифференциальных форм. Поскольку справедливы равенства

$$\xi_k\lrcorner\,d\omega=\xi_k\lrcorner\,(dx^1\wedge dx^2+2x^4\,dx^4\wedge dx^2)=$$

$$=dx^1(\xi_k)\,dx^2-\,dx^2(\xi_k)\,dx^1+2x^4\,dx^4(\xi_k)\,dx^2-2x^4\,dx^2(\xi_k)\,dx^4,\quad k=\overline{1,4},$$

то

$$\xi_1\lrcorner\,d\omega=dx^2,\quad \xi_2\lrcorner\,d\omega=-\,dx^1-2x^4\,dx^4,\quad \xi_3\lrcorner\,d\omega=2x^4\,dx^2,\quad \xi_4\lrcorner\,d\omega=0.$$

Будем искать векторное поле $\xi\in(\mathcal{I}^2)^\perp$, удовлетворяющее условию $\xi\lrcorner\,d\omega\in\mathcal{I}^2$, в виде $\xi=\beta^1\xi_1+\beta^2\xi_2+\beta^3\xi_3+\beta^4\xi_4$, где β^k – гладкие функции, подлежащие определению, $k=1,2,3,4$. Вычислив внутреннее произведение векторного поля ξ и дифференциальной формы $d\omega$, будем иметь

$$\xi\lrcorner\,d\omega=(\beta^1\xi_1+\beta^2\xi_2+\beta^3\xi_3+\beta^4\xi_4)\lrcorner\,d\omega=\beta^1\,dx^2-\beta^2(dx^1+2x^4\,dx^4)+\beta^3 2x^4\,dx^2.$$

Следовательно, условие $\xi\lrcorner\,d\omega\in\mathcal{I}^2$ приводит к равенству

$$\beta^1\,dx^2-\beta^2(dx^1+2x^4\,dx^4)+\beta^3 2x^4\,dx^2=\gamma(dx^3-3(x^2)^2\,dx^2-2x^2x^4\,dx^4-x^2\,dx^1),$$

где γ – некоторая гладкая функция. Приравняв коэффициенты при dx^1, dx^2, dx^3 и dx^4 в левой и правой частях равенства, получим $\gamma=0$, $\beta^2=0$, $\beta^1=-\beta^3 2x^4$. Отсюда вытекает, что векторное поле $\xi\in(\mathcal{I}^2)^\perp$, удовлетворяющее условию $\xi\lrcorner\,d\omega\in\mathcal{I}^2$, описывается выражением

$$\xi=-\beta^3 2x^4\xi_1+\beta^3\xi_3+\beta^4\xi_4=\beta^3\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-2x^4\frac{\partial}{\partial x^1}\right)+\beta^4\frac{\partial}{\partial u}.$$

Следовательно,

$$(\mathcal{CI}^2)^\perp = \mathrm{span}_{C^\infty}\Big\{\frac{\partial}{\partial x^4} - 2x^4\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial u}\Big\}.$$

Аннулятором этого распределения является кораспределение

$$\mathcal{CI}^2 = \mathrm{span}_{C^\infty}\{dx^1 + 2x^4\,dx^4, dx^2, dx^3\}.$$

Его интегралы – функции $z^1(x) = x^1 + (x^4)^2$, $z^2(x) = x^2$, $z^3(x) = x^3$. Очевидно, что $(z^k)'_u \equiv 0$ для всех $k = 1, 2, 3$.

Нетрудно видеть, что $dz^1(F) = (dx^1 + 2x^4\,dx^4)(F) = u + x^4 \neq 0$ для всех $(x,u) \in M$. Положим $y^4 = z^1$ и составим кораспределение

$$\mathcal{L} = \mathrm{span}_{C^\infty}\{\omega, dy^4\} = \mathrm{span}_{C^\infty}\{dx^3 - 3(x^2)^2\,dx^2 - 2x^2x^4\,dx^4 - x^2\,dx^1, dx^1 + 2x^4\,dx^4\}.$$

Записав выражение для $\mathcal{L}$ как $\mathcal{L} = \mathrm{span}_{C^\infty}\{dx^3 - 3(x^2)^2\,dx^2, dx^1 + 2x^4\,dx^4\}$, видим, что в качестве интеграла кораспределения $\mathcal{L}$, независимого от y^4, может быть принята функция $y^1 = x^3 - (x^2)^3$.

Функции y^2, y^3 и v могут теперь быть вычислены по формулам (10):

$$y^2 = \frac{dy^1(F)}{dy^4(F)} = x^2, \quad y^3 = \frac{dy^2(F)}{dy^4(F)} = x^4, \quad v = \frac{dy^3(F)}{dy^4(F)} = u.$$

Непосредственная проверка показывает, что найденное преобразование линеаризует систему (11) не только локально, т.е. заменой

$$y^1 = x^3 - (x^2)^3, \quad y^2 = x^2, \quad y^3 = x^4, \quad y^4 = x^1 + (x^4)^2, \quad v = u$$

система (11) преобразуется на множестве M в линейную управляемую систему

$$(y^1)' = y^2, \quad (y^2)' = y^3, \quad (y^3)' = v$$

с независимой переменной y^4.

4. Линеаризация на основе однократного продолжения. Рассмотрим, наряду с системой Σ, систему, полученную из Σ её однократным продолжением, т.е. аффинную систему

$$\Sigma_1: \quad \dot{x} = F(x,u), \quad \dot{u} = u^1$$

с состоянием $(x,u) \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и управлением $u^1 \in \mathbb{R}$. Полагаем, как и выше, что система Σ_1 рассматривается в окрестности точки $(x_0,u_0) \in M$, для которой $F(x_0,u_0) \neq 0$. Так как система Σ_1 является аффинной по управлению, задача её линеаризации в окрестности точки (x_0,u_0) может быть решена с привлечением техники A-орбитальной линеаризации.

A-орбитальная линеаризуемость системы Σ_1 в окрестности точки (x_0,u_0) означает существование окрестности $V(x_0,u_0)$ точки (x_0,u_0), для которой найдутся невырожденная матрица $A = (\alpha^i_j)^{i=0,1}_{j=0,1}$, $\alpha^i_j \in C^\infty(V(x_0,u_0))$, и диффеоморфизм $\Phi : V(x_0,u_0) \to \Phi(V(x_0,u_0))$ такие, что заменой независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha^0_0(x,u) + \alpha^0_1(x,u)u^1,$$

заменой управления

$$v = \frac{\alpha^1_0(x,u) + \alpha^1_1(x,u)u^1}{\alpha^0_0(x,u) + \alpha^0_1(x,u)u^1}$$

и заменой состояния $y = \Phi(x,u)$ система Σ_1 преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x,u,u^1) : (x,u) \in V(x_0,u_0), \alpha^0_0(x,u) + \alpha^0_1(x,u)u^1 \neq 0\}$ в систему

$$(y^1)' = y^2, \quad \ldots, \quad (y^{n-1})' = y^n, \quad (y^n)' = v, \quad (y^{n+1})' = 1, \tag{12}$$

определённую на множестве $M_{yv} = \{(y,v) : y \in \Phi(V(x_0,u_0)), \alpha^1_1(\Phi^{-1}(y)) - \alpha^0_1(\Phi^{-1}(y))v \neq 0\}$.

Очевидно, что в системе (12) переменную состояния y^{n+1} можно рассматривать как независимую переменную, а саму систему (12) можно считать линейной управляемой системой n-го порядка
$$(y^1)' = y^2, \quad \ldots, \quad (y^{n-1})' = y^n, \quad (y^n)' = v.$$

Аффинной системе Σ_1 соответствуют векторные поля

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} F^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

В формулировке условия A-орбитальной линеаризуемости аффинных систем (см. теорему 1) используется аннулятор распределения, порождаемого векторными полями системы. Нетрудно видеть, что распределение $\mathcal{F}_{\Sigma_1} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1\}$, порождаемое полями f_0 и f_1, совпадает с распределением $\mathcal{P}$, сопоставленным ранее системе Σ. Следовательно, совпадают и аннуляторы этих распределений: $\mathcal{I}_{\Sigma_1} = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ – кораспределение, соответствующее системе Σ. Воспользовавшись теоремой 1, получим необходимое и достаточное условие A-орбитальной линеаризуемости системы Σ_1 и следствие из него, устанавливающее связь между линеаризуемостью системы Σ в классе преобразований (4) и A-орбитальной линеаризуемостью системы Σ_1. В формулировках теоремы и следствия используется производный флаг $\mathcal{I}^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, кораспределения $\mathcal{I}$, соответствующего системе Σ.

Теорема 3. *Система Σ_1 A-орбитально линеаризуема в окрестности точки $(x_0, u_0) \in M$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) ранги кораспределений $\mathcal{I}^j$, $j = \overline{0, n-1}$, постоянны в окрестности точки (x_0, u_0);

2) $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-2}(x_0, u_0) \not\subset \mathcal{I}(x_0, u_0)$.

Следствие 3. *Пусть:*

1) система Σ_1 A-орбитально линеаризуема в окрестности точки $(x_0, u_0) \in M$,

2) в окрестности точки (x_0, u_0) имеет место включение $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-2} \subset \operatorname{span}_{C^\infty}\{dx^1, \ldots, dx^n\}$.

Тогда система Σ линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4).

Замечание 2. Если в результате применения к системе Σ алгоритма линеаризации из п. 3 оказалось, что условия 1) и 3) теоремы 2 выполнены, но какой-либо интеграл кораспределения $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-2}$ зависит от u, то систему Σ нельзя линеаризовать в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4). Как вытекает из доказательства теоремы 2, проблема состоит в том, что если функция y^n зависит от u, то дифференциальная 1-форма вида $dy^n - h\,dt$ не содержится в кораспределении $\mathcal{J}$, ассоциированном с системой Σ. Продолжение системы Σ до системы Σ_1 устраняет эту проблему. Поскольку в системе Σ_1 есть уравнение $\dot u = u^1$, то и в кораспределении $\mathcal{J}_{\Sigma_1}$ форма $dy^n - h\,dt$ содержится даже в случае, если y^n зависит от u. Чтобы построить преобразования, A-орбитально линеаризующие систему Σ_1 в окрестности точки (x_0, u_0), воспользуемся алгоритмом A-орбитальной линеаризации, приведённым в работе [19], и тем фактом, что кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_1}$, соответствующее системе Σ_1, совпадает с кораспределением $\mathcal{I}$, сопоставленным системе Σ. Выполнение условия 3) теоремы 2 означает, что существуют интеграл $z = z(x,u)$ кораспределения $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-2}$ и векторное поле f_l, $l \in \{0, 1\}$, для которых имеет место условие $dz(f_l)(x_0, u_0) \neq 0$. Положим $y^{n+1} = z(x,u)$ и составим кораспределение $\mathcal{L} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\omega, dy^{n+1}\}$, где ω – форма, порождающая кораспределение $\mathcal{I}^{n-2}$. Проинтегрировав $\mathcal{L}$, найдём его интеграл y^1, независимый от y^{n+1}. Положим

$$y^{i+1} = \frac{dy^i(f_l)}{dy^{n+1}(f_l)}, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{13}$$

Найдём производные функций y^{n+1} и y^n в силу системы Σ_1:

$$\dot y^{n+1} = \alpha_0^0(x,u) + \alpha_1^0(x,u)u^1, \quad \dot y^n = \alpha_0^1(x,u) + \alpha_1^1(x,u)u^1.$$

Линеаризующие преобразования в окрестности точки (x_0, u_0) определяются соотношениями $y^j = y^j(x,u)$, $j = \overline{1, n+1}$, и матрицей $A = (\alpha_j^i)_{j=0,1}^{i=0,1}$.

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x}^1 = -(u)^4, \quad \dot{x}^2 = 3(u)^3, \quad \dot{x}^3 = -3(u)^2, \quad \dot{x}^4 = u \tag{14}$$

на множестве $M = \{(x,u) : u \neq 0\}$. Покажем сначала, что система (14) не линеаризуема в классе преобразований (4) в окрестности любой точки $(x_0, u_0) \in M$.

С системой (14) ассоциировано кораспределение

$$\mathcal{J} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dx^1 + (u)^4\,dt, dx^2 - 3(u)^3\,dt, dx^3 + 3(u)^2\,dt, dx^4 - u\,dt\}.$$

Кораспределение $\mathcal{I} = \{\omega \in \mathcal{J} : \omega(\partial/\partial t) = 0\}$ имеет вид

$$\mathcal{I} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dx^1 + (u)^3\,dx^4, dx^2 - 3(u)^2\,dx^4, dx^3 + 3u\,dx^4\}.$$

Его производный флаг образован кораспределениями

$$\mathcal{I}^0 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}^1 = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dx^1 - (u)^2\,dx^3 - 2(u)^3\,dx^4, dx^2 + 2u\,dx^3 + 3(u)^2\,dx^4\},$$

$$\mathcal{I}^2 = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dx^1 + u\,dx^2 + (u)^2\,dx^3 + (u)^3\,dx^4\}, \quad \mathcal{I}^3 = \mathcal{O}.$$

Характеристическое кораспределение $\mathcal{CI}^2$ имеет вид $\mathcal{CI}^2 = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dz^1, dz^2, dz^3\}$, где

$$z^1(x,u) = x^1 + ux^2 + (u)^2x^3 + (u)^3x^4, \quad z^2(x,u) = x^2 + 2ux^3 + 3(u)^2x^4, \quad z^3(x,u) = u.$$

Очевидно, что ранги кораспределений $\mathcal{I}^j$, $j = 0,1,2,3$, постоянны, $dz^3 = du \notin \mathcal{I}$. Как видим, условия 1) и 3) теоремы 2 выполнены, но $(z^k)'_u \not\equiv 0$, $k = 1,2,3$, поэтому система (14) не линеаризуема в классе преобразований (4) в окрестности любой точки $(x_0, u_0) \in M$.

Рассмотрим теперь продолжение системы (14) – аффинную систему

$$\dot{x}^1 = -(u)^4, \quad \dot{x}^2 = 3(u)^3, \quad \dot{x}^3 = -3(u)^2, \quad \dot{x}^4 = u, \quad \dot{u} = u^1, \tag{15}$$

которой соответствуют векторные поля

$$f_0 = -(u)^4\frac{\partial}{\partial x^1} + 3(u)^3\frac{\partial}{\partial x^2} - 3(u)^2\frac{\partial}{\partial x^3} + u\frac{\partial}{\partial x^4}, \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Согласно теореме 3 система (15) A-орбитально линеаризуема в окрестности любой точки $(x_0, u_0) \in M$. Построим линеаризующие преобразования. Очевидно, что интеграл $z^3(x,u) = u$ кораспределения $\mathcal{CI}^2$ и векторное поле f_1 удовлетворяют условию $dz^3(f_1) = 1 \neq 0$, поэтому полагаем $y^5 = u$ и составляем кораспределение

$$\mathcal{L} = \mathcal{I}^2 + \operatorname{span}_{C^\infty}\{du\} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dx^1 + u\,dx^2 + (u)^2\,dx^3 + (u)^3\,dx^4, du\}.$$

Кораспределение $\mathcal{L}$ представимо в виде $\mathcal{L} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{dy^1, du\}$, где $y^1 = x^1 + ux^2 + (u)^2x^3 + (u)^3x^4$. Функции y^2, y^3 и y^4 могут быть найдены с использованием формул (13):

$$y^2 = \frac{dy^1(f_1)}{dy^5(f_1)} = x^2 + 2ux^3 + 3(u)^2x^4, \quad y^3 = \frac{dy^2(f_1)}{dy^5(f_1)} = 2x^3 + 6ux^4, \quad y^4 = \frac{dy^3(f_1)}{dy^5(f_1)} = 6x^4.$$

Таким образом, линеаризующая замена состояния задаётся соотношениями $y^j = y^j(x,u)$, $j = \overline{1,5}$, и переменная y^5 должна быть принята за новую независимую переменную. Поскольку производные функций y^5 и y^4 в силу системы (15) задаются выражениями $\dot{y}^5 = u^1$, $\dot{y}^4 = 6u$, то линеаризующая замена управления в системе (15) имеет вид

$$v = 6u/u^1.$$

Указанными заменами система (15) преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x, u, u^1) : u \neq 0, u^1 \neq 0\}$ в линейную управляемую систему

$$(y^1)' = y^2, \quad (y^2)' = y^3, \quad (y^3)' = y^4, \quad (y^4)' = v,$$

определённую на множестве $M_{yv} = \{(y, v) : v \neq 0\}$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда исходная нелинейная система является аффинной по управлению, т.е. рассмотрим продолжение

$$\Sigma_{\mathrm{aff},1}: \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad \dot{u} = u^1$$

системы Σ_{aff}. Отметим, что $(x, u) \in X \times \mathbb{R}$ – состояние системы $\Sigma_{\mathrm{aff},1}$, $u^1 \in \mathbb{R}$ – управление. Связь между A-орбитальной линеаризуемостью системы $\Sigma_{\mathrm{aff},1}$ и A-орбитальной линаризуемостью системы Σ_{aff} устанавливается в следующей теореме.

Теорема 4. *Если система $\Sigma_{\mathrm{aff},1}$ A-орбитально линеаризуема в окрестности точки $(x_0, u_0) \in X \times \mathbb{R}$, то система Σ_{aff} A-орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0.*

Доказательство. Сопоставим аффинной системе $\Sigma_{\mathrm{aff},1}$ векторные поля

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} (f^i(x) + g^i(x)u)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Из A-орбитальной линеаризуемости системы $\Sigma_{\mathrm{aff},1}$ в окрестности точки (x_0, u_0) вытекает, что $f_0(x_0, u_0)$ и $f_1(x_0, u_0)$ линейно независимы. Следовательно, $f(x_0) + g(x_0)u_0 \neq 0$. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $f^n(x_0) + g^n(x_0)u_0 \neq 0$. Тогда кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}} = (\mathrm{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1\})^\perp$ имеет вид $\mathcal{I}_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}} = \mathrm{span}_{C^\infty}\{\omega^1, \ldots, \omega^{n-1}\}$, где дифференциальные 1-формы ω^i задаются выражениями $\omega^i = (f^n(x) + g^n(x)u)\,dx^i - (f^i(x) + g^i(x)u)\,dx^n$, $i = \overline{1, n-1}$. Построим кораспределение $\mathcal{I}^1_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}} = \{\omega \in \mathcal{I}_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}} : d\omega \equiv 0 \mod \mathcal{I}_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}}\}$. Будем искать формы, порождающие $\mathcal{I}^1_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}}$, в виде $\omega = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \omega^i$, где $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ – гладкие функции, подлежащие определению. Нетрудно видеть, что справедливы сравнения

$$d\omega^i \equiv g^n(x)\,du \wedge dx^i - g^i(x)\,du \wedge dx^n \mod \mathcal{I}_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Поэтому соотношение $\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} = 0$ после алгебраических преобразований приводит к уравнению

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \begin{vmatrix} f^i(x) & g^i(x) \\ f^n(x) & g^n(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Так как система $\Sigma_{\mathrm{aff},1}$ A-орбитально линеаризуема, то кораспределение $\mathcal{I}^1_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}}$ в окрестности точки (x_0, u_0) имеет постоянный ранг $n-2$. Следовательно, хотя бы для одного $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ коэффициент при μ_i отличен от нуля в точке x_0. Для определённости предположим, что определитель

$$\begin{vmatrix} f^{n-1}(x_0) & g^{n-1}(x_0) \\ f^n(x_0) & g^n(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Выразив из (16) функцию μ_{n-1} и подставив полученное соотношение в формулу $\omega = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \omega^i$, получим, что кораспределение $\mathcal{I}^1_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}}$ имеет вид

$$\mathcal{I}^1_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}} = \mathrm{span}_{C^\infty}\left\{\begin{vmatrix} dx^i & dx^{n-1} & dx^n \\ f^i(x) & f^{n-1}(x) & f^n(x) \\ g^i(x) & g^{n-1}(x) & g^n(x) \end{vmatrix},\ i = \overline{1, n-2}\right\}.$$

Таким образом, $\mathcal{I}^1_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}}$ является кораспределением на множестве X. Поскольку система $\Sigma_{\mathrm{aff},1}$ A-орбитально линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0), кораспределения $\mathcal{I}^j_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}}$, $j = \overline{1, n-1}$, имеют постоянный ранг в окрестности точки x_0 и $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-2}_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}}(x_0) \not\subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\mathrm{aff},1}}(x_0, u_0)$.

С аффинной системой Σ_{aff} ассоциировано кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff}}} = (\text{span}_{C^\infty}\{f, g\})^\perp$. Несложно проверить, что имеет место равенство $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff}}} = \mathcal{I}^1_{\Sigma_{\text{aff},1}}$. Отсюда вытекает, что для всех $j = \overline{0, n-2}$ справедливы соотношения $\mathcal{I}^j_{\Sigma_{\text{aff}}} = \mathcal{I}^{j+1}_{\Sigma_{\text{aff},1}}$. Следовательно, кораспределения $\mathcal{I}^j_{\Sigma_{\text{aff}}}$, $j = \overline{0, n-2}$, имеют постоянный ранг в окрестности точки x_0.

Покажем, что $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-3}_{\Sigma_{\text{aff}}}(x_0) \not\subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff}}}(x_0)$. Предположив противное, получим $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-2}_{\Sigma_{\text{aff},1}}(x_0) \subset \subset \mathcal{I}^1_{\Sigma_{\text{aff},1}}(x_0)$. Согласно правилу построения производного флага $\mathcal{I}^1_{\Sigma_{\text{aff},1}}(x_0) \subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}(x_0, u_0)$, поэтому приходим к включению $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-2}_{\Sigma_{\text{aff},1}}(x_0) \subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}(x_0, u_0)$, являющемуся противоречием. Таким образом, $\mathcal{C}\mathcal{I}^{n-3}_{\Sigma_{\text{aff}}}(x_0) \not\subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff}}}(x_0)$. Согласно теореме 1 система Σ_{aff} A-орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0.

Замечание 3. Таким образом, из A-орбитальной линеаризуемости однократного продолжения аффинной системы Σ_{aff} в окрестности точки (x_0, u_0) следует A-орбитальная линеаризуемость самой системы Σ_{aff} в окрестности точки x_0. Как видно из теоремы 3 и следующего за ней примера, свойство, установленное в теореме 4, является характерной особенностью аффинных систем. Для систем, не аффинных по управлению, однократное продолжение может быть линеаризуемым и в случае, если исходная система не линеаризуема в классе преобразований (4).

5. Линеаризация на основе k-кратного продолжения. Рассмотрим теперь, наряду с системой Σ, систему, полученную из Σ её k-кратным продолжением:

$$\Sigma_k: \quad \dot{x} = F(x, u^0), \quad \dot{u}^0 = u^1, \quad \ldots, \quad \dot{u}^{k-1} = u^k.$$

Введём обозначение $\overline{u} = (u^0, \ldots, u^{k-1})$ и отметим, что $(x, \overline{u}) \in M \times \mathbb{R}^{k-1}$ – состояние системы Σ_k, а $u^k \in \mathbb{R}$ – управление. Система Σ_k является аффинной по управлению. Будем рассматривать задачу A-орбитальной линеаризации системы Σ_k в окрестности точки $(x_0, \overline{u}_0)$. A-орбитальная линеаризуемость системы Σ_k в окрестности точки $(x_0, \overline{u}_0)$ означает существование окрестности $V(x_0, \overline{u}_0)$ точки $(x_0, \overline{u}_0)$, для которой найдутся невырожденная матрица $A = (\alpha^i_j)^{i=0,1}_{j=0,1}$, $\alpha^i_j \in C^\infty(V(x_0, \overline{u}_0))$, и диффеоморфизм $\Phi : V(x_0, \overline{u}_0) \to \Phi(V(x_0, \overline{u}_0))$ такие, что заменой независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha^0_0(x, \overline{u}) + \alpha^0_1(x, \overline{u}) u^k,$$

заменой управления

$$v = \frac{\alpha^1_0(x, \overline{u}) + \alpha^1_1(x, \overline{u}) u^k}{\alpha^0_0(x, \overline{u}) + \alpha^0_1(x, \overline{u}) u^k}$$

и заменой состояния $y = \Phi(x, \overline{u})$ система Σ_k в окрестности точки $(x_0, \overline{u}_0)$ преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x, \overline{u}, u^k) : (x, \overline{u}) \in V(x_0, \overline{u}_0),\ \alpha^0_0(x, \overline{u}) + \alpha^0_1(x, \overline{u}) u^k \neq 0\}$ в систему

$$(y^1)' = y^2, \quad \ldots, \quad (y^{n+k-2})' = y^{n+k-1}, \quad (y^{n+k-1})' = v, \quad (y^{n+k})' = 1, \tag{17}$$

определённую на множестве $M_{yv} = \{(y, v) : y \in \Phi(V(x_0, \overline{u}_0)),\ \alpha^1_1(\Phi^{-1}(y)) - \alpha^0_1(\Phi^{-1}(y)) v \neq 0\}$. В системе (17) переменную состояния y^{n+k} можно рассматривать как независимую переменную, а саму систему (17) можно считать линейной управляемой системой $(n+k-1)$-го порядка

$$(y^1)' = y^2, \quad \ldots, \quad (y^{n+k-2})' = y^{n+k-1}, \quad (y^{n+k-1})' = v.$$

Выясним связь между A-орбитальной линеаризуемостью системы Σ_k, $k \geqslant 2$, и A-орбитальной линеаризуемостью системы Σ_1.

Теорема 5. *Пусть система Σ_k, $k \geqslant 2$, A-орбитально линеаризуема в окрестности точки $(x_0, \overline{u}_0) \in M \times \mathbb{R}^{k-1}$. Тогда система Σ_1 A-орбитально линеаризуема в окрестности точки (x_0, u^0_0).*

Доказательство. Аффинной системе Σ_k соответствуют векторные поля

$$\tilde{f}_0 = \sum_{i=1}^{n} F^i(x, u^0) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{l=0}^{k-2} u^{l+1} \frac{\partial}{\partial u^l}, \quad \tilde{f}_1 = \frac{\partial}{\partial u^{k-1}}.$$

Из A-орбитальной линеаризуемости системы Σ_k в окрестности точки $(x_0, \overline{u}_0)$ следует, что векторы $\tilde{f}_0(x_0, \overline{u}_0)$ и $\tilde{f}_1(x_0, \overline{u}_0)$ линейно независимы.

Покажем сначала, что невозможен случай $F(x_0, u_0^0) = 0$. Предположим противное. Тогда из линейной независимости векторов $\tilde{f}_0(x_0, \overline{u}_0)$ и $\tilde{f}_1(x_0, \overline{u}_0)$ вытекает существование номера $\rho \in \{1, \ldots, k-1\}$ такого, что $u_0^\rho \neq 0$. Покажем, что из A-орбитальной линеаризуемости системы Σ_k следует условие $u_0^1 \neq 0$. Предположим, что это не так, и пусть $r \in \{2, \ldots$ $\ldots, k-1\}$ – наименьший номер, удовлетворяющий условию $u_0^r \neq 0$. В этом случае аннулятором распределения $\mathcal{F}_{\Sigma_k} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1\}$ является кораспределение

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^n; u^r\,du^l - u^{l+1}\,du^{r-1},\ l = \overline{0, k-2},\ l \neq r-1\},$$

где $\tilde{\omega}^i = u^r\,dx^i - F^i(x, u^0)\,du^{r-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Построение производного флага кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}$ даёт следующий результат:

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k}^j = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^n; u^r\,du^l - u^{l+1}\,du^{r-1},\ l = \overline{0, k-j-2},\ l \neq r-1\}, \quad j = \overline{0, k-2-r},$$

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1-r} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^n; u^r\,du^l - u^{l+1}\,du^{r-1},\ l = \overline{0, r-2}\}.$$

Найдём кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-r}$. Обозначим через

$$\tilde{\omega}^i = u^r\,du^{i-n-1} - u^{i-n}\,du^{r-1}, \quad i = \overline{n+1, n+r-1},$$

последние $r-1$ форм, порождающих кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1-r}$. Будем искать формы, порождающие кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-r}$ в виде $\omega = \sum_{i=1}^{n+r-1} \mu_i \tilde{\omega}^i$, где $\mu_1, \ldots, \mu_{n+r-1}$ – гладкие функции, подлежащие определению из условия $\sum_{i=1}^{n+r-1} \mu_i d\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{n+r-1} = 0$. Поскольку

$$d\tilde{\omega}^i \equiv \begin{cases} du^r \wedge dx^i, & i = \overline{1, n}, \\ du^r \wedge du^{i-n-1}, & i = \overline{n+1, n+r-1}, \end{cases} \mod \mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1-r},$$

то равенство $\sum_{i=1}^{n+r-1} \mu_i d\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{n+r-1} = 0$ после алгебраических преобразований приводит к уравнению

$$\mu_1 F^1(x, u^0) + \ldots + \mu_n F^n(x, u^0) + \mu_{n+1} u^1 + \ldots + \mu_{n+r-1} u^{r-1} = 0$$

относительно $\mu_1, \ldots, \mu_{n+r-1}$. Так как $F(x_0, u_0^0) = 0$ и $u_0^1 = \ldots = u_0^{r-1} = 0$, в точке $(x_0, \overline{u}_0)$ полученное уравнение имеет $n+r-1$ линейно независимых решений. Как следствие, ранг кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-r}$ в окрестности точки $(x_0, \overline{u}_0)$ не может быть равен $n+r-2$. Отсюда вытекает, что система Σ_k не является A-орбитально линеаризуемой в окрестности точки $(x_0, \overline{u}_0)$. Полученное противоречие доказывает, что $u_0^1 \neq 0$.

Нетрудно убедиться в том, что если $u_0^1 \neq 0$, то:

– кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}$ может быть представлено в виде

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\hat{\omega}^1, \ldots, \hat{\omega}^n; u^1\,du^l - u^{l+1}\,du^0,\ l = \overline{1, k-2}\},$$

где $\hat{\omega}^i = u^1\,dx^i - F^i(x, u^0)\,du^0$, $i = \overline{1, n}$;

– первыми $k-2$ элементами производного флага кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}$ являются кораспределения

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k}^j = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\hat{\omega}^1, \ldots, \hat{\omega}^n; u^1\,du^l - u^{l+1}\,du^0,\ l = \overline{1, k-j-2}\}, \quad j = \overline{0, k-3};$$

– $(k-1)$-м элементом производного флага кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}$ является кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-2} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\hat{\omega}^1, \ldots, \hat{\omega}^n\}$.

Будем искать формы, порождающие кораспределение $\mathcal{I}^{k-1}_{\Sigma_k}$, в виде $\omega=\sum_{i=1}^n \mu_i\hat\omega^i$, где μ_1, $\ldots$, μ_n – гладкие функции, которые необходимо найти из условия $\sum_{i=1}^n \mu_i d\hat\omega^i\wedge\hat\omega^1\wedge\ldots\wedge\hat\omega^n = 0$. Поскольку $d\hat\omega^i\equiv du^1\wedge dx^i \mod \mathcal{I}^{k-2}_{\Sigma_k}$, то из соотношения $\sum_{i=1}^n \mu_i d\hat\omega^i\wedge\hat\omega^1\wedge\ldots\wedge\hat\omega^n=0$ получаем уравнение

$$\mu_1F^1(x,u^0)+\ldots+\mu_nF^n(x,u^0)=0$$

относительно μ_1, $\ldots$, μ_n. Так как $F(x_0,u_0^0)=0$, то в точке (x_0,u_0^0) полученное уравнение имеет n линейно независимых решений. Следовательно, ранг кораспределения $\mathcal{I}^{k-1}_{\Sigma_k}$ в окрестности этой точки не может быть равен $n-1$. Этот результат противоречит A-орбитальной линеаризуемости системы Σ_k в окрестности точки $(x_0,\overline{u}_0)$.

Таким образом, возможен лишь случай, когда $F(x_0,u_0^0)\neq 0$. Не ограничивая общности, будем полагать, что $F^n(x_0,u_0^0)\neq 0$. Тогда аннулятором распределения $\mathcal{F}_{\Sigma_k}$ является кораспределение

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k}=\mathrm{span}_{C^\infty}\{\omega^1,\ldots,\omega^{n-1};F^n(x,u^0)\,du^l-u^{l+1}\,dx^n,\ l=\overline{0,k-2}\},$$

где $\omega^i=F^n(x,u^0)\,dx^i-F^i(x,u^0)\,dx^n$, $i=\overline{1,n-1}$. Построим производный флаг кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}$. Непосредственные вычисления показывают, что его первые k элементов имеют вид

$$\mathcal{I}^j_{\Sigma_k}=\mathrm{span}_{C^\infty}\{\omega^1,\ldots,\omega^{n-1};F^n(x,u^0)\,du^l-u^{l+1}\,dx^n,\ l=\overline{0,k-j-2}\},\quad j=\overline{0,k-2},$$

$$\mathcal{I}^{k-1}_{\Sigma_k}=\mathrm{span}_{C^\infty}\{\omega^1,\ldots,\omega^{n-1}\}.$$

Таким образом, $\mathcal{I}^{k-1}_{\Sigma_k}$ является кораспределением на множестве M. Нетрудно видеть, что $\mathcal{I}^{k-1}_{\Sigma_k}=\mathcal{P}^\perp=\mathcal{I}_{\Sigma_1}$.

Согласно теореме 1 из A-орбитальной линеаризуемости системы Σ_k в окрестности точки $(x_0,\overline{u}_0)$ следует, что ранги кораспределений $\mathcal{I}^j_{\Sigma_k}$, $j=\overline{k-1,n+k-2}$, постоянны в окрестности точки (x_0,u_0^0) и $\mathcal{CI}^{n+k-3}_{\Sigma_k}(x_0,u_0^0)\not\subset\mathcal{I}_{\Sigma_k}(x_0,\overline{u}_0)$. Так как $\mathcal{I}^{k-1}_{\Sigma_k}=\mathcal{I}^0_{\Sigma_1}$, то ранги кораспределений $\mathcal{I}^j_{\Sigma_1}$, $j=\overline{0,n-1}$, составляющих производный флаг кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_1}$, постоянны в окрестности точки (x_0,u_0^0). Таким образом, условие 1) теоремы 3 выполнено. Покажем, что кораспределение $\mathcal{CI}^{n-2}_{\Sigma_1}$ удовлетворяет условию 2) теоремы 3. Предположив, что $\mathcal{CI}^{n-2}_{\Sigma_1}(x_0,u_0^0)\subset\mathcal{I}^0_{\Sigma_1}(x_0,u_0^0)$, получим включение

$$\mathcal{CI}^{n+k-3}_{\Sigma_k}(x_0,u_0^0)\subset\mathcal{I}^{k-1}_{\Sigma_k}(x_0,u_0^0)\subset\mathcal{I}_{\Sigma_k}(x_0,\overline{u}_0).$$

Полученный результат противоречит A-орбитальной линеаризуемости системы Σ_k в окрестности точки $(x_0,\overline{u}_0)$. Таким образом, $\mathcal{CI}^{n-2}_{\Sigma_1}(x_0,u_0^0)\not\subset\mathcal{I}_{\Sigma_1}(x_0,u_0^0)$, и это означает, что система Σ_1 A-орбитально линеаризуема в окрестности точки (x_0,u_0^0).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-07-00279).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brockett R.W.* Feedback invariants for nonlinear systems // Proc. of IFAC Congress. Helsinki, 1978. P. 1115–1120.
2. *Jakubczyk B., Respondek W.* On linearization of control systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1980. V. 28. P. 517–522.
3. *Hunt L.R., Su R.* Linear equivalents of nonlinear time-varying systems // Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems. 1981. P. 119–123.
4. *Gardner R.B., Shadwick W.F.* The GS algorithm for exact linearization to Brunovsky normal form // IEEE Trans. on Automat. Control. 1992. V. 37. № 2. P. 224–230.
5. *Krener A.* Approximate linearization by state feedback and coordinate change // Systems and Control Lett. 1984. № 5. P. 181–185.

6. *Marino R.* On the largest feedback linearizable subsystem // Systems and Control Lett. 1986. № 6. P. 345–351.
7. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London, 1995.
8. *Fliess M., Levine J., Martin P., Rouchon P.* Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples // Int. J. of Control. 1995. V. 61. P. 1327–1361.
9. *Charlet B., Levine J., Marino R.* On dynamic feedback linearization // System Control Lett. 1989. V. 13. P. 143–151.
10. *Sampei M., Furuta K.* On time scaling for nonlinear systems: application to linearization // IEEE Trans. on Automat. Control. 1986. V. 31. P. 459–462.
11. *Fliess M., Levine J., Martin P., Rouchon P.* A Lie-Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. IEEE Trans. on Automat. Control. 1999. V. 44. № 5. P. 922–937.
12. *Kiss B., Szadeczky-Kardoss E.* Tracking control of the orbitally flat kinematic car with a new time-scaling input // 46th IEEE Conf. on Decision and Control. New Orleans, 2007. P. 1969–1974.
13. *Vollmer U., Raisch J.* Control of batch cooling crystallisers based on orbital flatness // Int. J. of Control. 2003. V. 76. P. 1635–1643.
14. *Respondek W.* Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems // Proc. of the IFAC Sympos. on Nonlinear Control Systems. Enschede, 1998. P. 499–504.
15. *Фетисов Д.А.* А-орбитальная линеаризация аффинных систем // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1518–1532.
16. *Guay M.* An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems // Systems and Control Lett. 1999. V. 38. № 4–5. P. 271–281.
17. *Li S.-J., Respondek W.* Orbital feedback linearization for multi-input control systems // Int. J. of Robust and Nonlin. Control. 2015. V. 25. № 9. P. 1352–1378.
18. *Fetisov D.A.* A-orbital feedback linearization of multiinput control affine systems // Int. J. of Robust and Nonlin. Control. 2020. V. 30. № 14. P. 5602–5627.
19. *Fetisov D.A.* On some approaches to linearization of affine systems // IFAC-PapersOnline. 2019. V. 52. № 16. P. 700–705.

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 09.10.2022 г.
После доработки 09.10.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.