ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 138–141

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.912

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ОБЫКНОВЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. А. А. Косов, Э. И. Семенов

Рассмотрено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка специального вида, частный случай которого возникает при построении точных решений уравнения нелинейной теплопроводности со степенным коэффициентом. Получены условия на параметры, при которых уравнение допускает однократное интегрирование. Приведён ряд примеров построения точных решений, выражаемых через элементарные функции или через функцию Ламберта.

DOI: 10.31857/S0374064123010120, EDN: ODHRIB

В данной работе рассматривается автономное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка относительно неизвестной функции $y = y(x)$ следующего вида:

$$yy'' + \frac{1}{\lambda}\,y'^2 + (Ay + By^{p-1})y' + \alpha y^2 + \beta y^p = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \neq 0$, $p \neq 2$, A, B, α, β – параметры. Отметим, что требование $p \neq 2$ является существенным, так как в противном случае уравнение (1) приводится к виду

$$yy'' + \frac{1}{\lambda}\,y'^2 + (A+B)yy' + (\alpha+\beta)y^2 = 0. \tag{2}$$

С помощью замены $y'(x) = w(x)y(x)$ ОДУ (2) сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными $w' + (1 + 1/\lambda)w^2 + (A+B)w + \alpha + \beta = 0$, которое легко интегрируется в элементарных функциях. Уравнение (2) с $\lambda = -1$ рассматривал Пенлеве [1, с. 505]. Уравнение (1) при $p = 1$ возникает при построении точных решений многомерного уравнения нелинейной теплопроводности (см. [2])

$$U_t = \nabla\cdot(U^\lambda \nabla U), \quad U = U(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

которое подстановкой $U(t,\mathbf{x}) = u(\xi,t)^{1/\lambda}$, $\xi = \|\mathbf{x}\|$, сводится к уравнению

$$u_t = uu_{\xi\xi} + \frac{1}{\lambda}u_\xi^2 + \frac{n-1}{\xi}uu_\xi.$$

В работе [2] показано, что, отыскивая автомодельные решения этого уравнения в виде $u(\xi,t) = (\theta t - T)^{-\sigma}W(z)$, $z = \xi(\theta t - T)^{(\sigma-1)/2}$, приходим к ОДУ

$$WW_{zz} + \frac{1}{\lambda}W_z^2 + \left(\frac{n-1}{z}\,W + \frac{\theta(1-\sigma)}{2}\,z\right)W_z + \theta\sigma W = 0,$$

которое, в свою очередь, заменой $W(z) = z^2y(x)$, $x = \ln z$, приводится к уравнению (1) с параметрами $p = 1$, $A = n + 2 + 4/\lambda$, $B = \theta(1-\sigma)/2$, $\alpha = 2(n + 2/\lambda)$, $\beta = \theta$. ОДУ (1) появляется также при построении решений типа "бегущей волны" одномерного нелинейного уравнения в частных производных следующего вида [3, с. 17]:

$$V_t = V_{\eta\eta} + BV^{\lambda(p-2)/(\lambda+1)}V_\eta + \alpha_1 V + \beta_1 V^{(\lambda(p-1)+1)/(\lambda+1)}, \quad V = V(t,\eta), \quad \lambda \neq -1. \tag{4}$$

В случае $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ уравнение (4) представляет собой обобщённое уравнение Бюргерса [3, с. 17], а если к тому же положить $p = 3 + 1/\lambda$, то (4) сводится к классическому уравнению Бюргерса $V_t = V_{\eta\eta} + BVV_\eta$. Отыскивая решения уравнения (4) как $V(t,\eta) = y(x)^{(1+\lambda)/\lambda}$, $x = \eta - At$, в результате редукции придём к ОДУ (1) при следующих соотношениях на параметры: $\beta = \lambda\beta_1/(1+\lambda)$, $\alpha = \lambda\alpha_1(1+\lambda)$.

Уравнение (1) подстановкой $y'(x) = w(y)$ сводится к уравнению Абеля второго рода

$$yww' + \frac{1}{\lambda}\,w^2 + (Ay + By^{p-1})w + \alpha y^2 + \beta y^p = 0, \quad w = w(y), \tag{5}$$

решения которого для некоторых значений параметров можно найти в работе [4, с. 93]. Ниже будет показано, что если между параметрами существуют определённые зависимости, то можно осуществить непосредственное однократное интегрирование уравнения (1) и, как следствие, получить решения для широкого класса параметров.

Утверждение 1. *Если $\lambda \neq -1$ и выполнены равенства*

$$A = \alpha + \frac{1}{\lambda} + 1, \quad B = \frac{(\lambda(p-1)+1)\beta}{\lambda+1}, \tag{6}$$

то общее решение уравнения (1) определяется из ОДУ первого порядка

$$y' + \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}\,y + \frac{\beta\lambda}{\lambda+1}\,y^{p-1} = C_1\exp\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}\,x\right)y^{-1/\lambda}, \tag{7}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Доказательство. Умножив обе части уравнения (7) на $\exp((\lambda+1)x/\lambda)y^{1/\lambda}$ и продифференцировав полученное выражение по x, приходим к уравнению (1), параметры которого удовлетворяют соотношениям (6). Утверждение доказано.

В частном случае при $C_1 = 0$ уравнение (7) легко интегрируется и его решение имеет вид

$$y(x) = \left[-\frac{\beta}{\alpha} + C_2\exp\left(\frac{\alpha\lambda(p-2)}{\lambda+1}\,x\right)\right]^{1/(2-p)}, \tag{8}$$

где C_2 – произвольная постоянная. В силу утверждения 1 функция (8) будет частным решением ОДУ (1), в котором параметры связаны равенствами (6). Если для уравнения (1) поставить задачу Коши с начальными условиями в начале координат $x = 0$, то, как показывает найденное решение (8), в зависимости от параметра p возможны различные типы начальных условий. Если $p \in (-\infty, 1)$ и $C_2 = \beta/\alpha$, то из формулы (8) получим решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$; при $p = 1$ и $C_2 = \beta/\alpha$ – с условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = -\lambda\beta/(\lambda+1)$; при $p \in (1,2)$ и $C_2 = \beta/\alpha$ – с нулевыми начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; если $p \in (2, +\infty)$ и $C_2 = \beta/\alpha$ – с условиями $y(0) = \infty$, $y'(0) = \infty$.

Пример 1. Пусть $p = 1 - 1/\lambda$, тогда из второго равенства формулы (6) имеем $B = 0$. В этом случае уравнение (1) упростится и примет вид

$$yy'' + \frac{1}{\lambda}\,y'^2 + \left(\alpha + \frac{1}{\lambda} + 1\right)yy' + \alpha y^2 + \beta y^{(\lambda-1)/\lambda} = 0. \tag{9}$$

Общее решение ОДУ (9) в силу утверждения 1 определяется из уравнения

$$y' + \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}\,y = \left(C_1\exp\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}\,x\right) - \frac{\beta\lambda}{\lambda+1}\right)y^{-1/\lambda}.$$

Это ОДУ является дифференциальным уравнением Бернулли, общее решение которого задаётся формулой

$$y(x) = \left[\frac{C_1(\lambda+1)}{(\alpha-1)\lambda-1}\exp\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}\,x\right) + C_2\exp(-\alpha x) - \frac{\beta}{\alpha}\right]^{\lambda/(\lambda+1)},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Если имеет место равенство $\alpha = (\lambda+1)^2/(\lambda(\lambda(p-1)+1))$, $p \neq 1 - 1/\lambda$, то ОДУ первого порядка (7) заменой $y(x) = \exp(-(\lambda+1)x/(\lambda(p-1)+1))Z(x)$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой функции $Z(x)$:

$$Z' = \exp\biggl(\frac{(\lambda+1)(2-p)}{\lambda(p-1)+1}\,x\biggr)\biggl(C_1Z^{-1/\lambda} - \frac{\beta\lambda}{\lambda+1}\,Z^{p-1}\biggr), \quad Z = Z(x).$$

Пример 2. Пусть $\lambda = -1/3$, $p = 3$, $\alpha = -4$. Тогда ОДУ

$$yy'' - 3y'^2 + \biggl(-6y + \frac{\beta}{2}\,y^2\biggr)y' - 4y^2 + \beta y^3 = 0$$

имеет общее решение, выражающееся через специальную W-функцию Ламберта [5, с. 5]:

$$y(x) = -\frac{\beta e^{-2x}}{2C_1}\biggl[W\biggl(-\frac{1}{2C_1}\,\exp(f(x))\biggr)+1\biggr]^{-1}, \quad f(x) = -\frac{\beta^2}{8C_1}\,e^{-2x} + C_2,$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Пусть $\lambda = -1/2$ и $p = 1$. Тогда ОДУ (7) является уравнением Риккати, которое подстановкой

$$y(x) = -\frac{e^{-x}}{C_1}\,\frac{u'(x)}{u(x)} \tag{10}$$

приводится к следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$u'' - (\alpha+1)u' + C_1\beta e^x u = 0.$$

Общее решение этого ОДУ выражается через бесселевы функции первого и второго рода [4, с. 185]. Таким образом, по формуле (10) найдено общее решение нелинейного уравнения

$$yy'' - 2y'^2 + ((\alpha-1)y + 2\beta)y' + \alpha y^2 + \beta y = 0.$$

В утверждении 1 требуется выполнение условия $\lambda \neq -1$. Если отказаться от этого условия, то при определённых предположениях на параметры можно также произвести непосредственное однократное интегрирование уравнения (1). Так, справедливо

Утверждение 2. *Если выполнены равенства*

$$A = \alpha + \frac{1}{\lambda} + 1, \quad \beta = \alpha, \quad B = p + \frac{1}{\lambda} - 1, \tag{11}$$

то общее решение уравнения (1) определяется из ОДУ первого порядка

$$y' + y + y^{p-1} = C_1e^{-\alpha x}y^{-1/\lambda}, \tag{12}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Доказательство. Умножив обе части уравнения (12) на $e^{\alpha x}y^{1/\lambda}$ и продифференцировав полученное выражение по x, приходим к уравнению (1), параметры которого удовлетворяют соотношениям (11). Утверждение доказано.

С учётом равенств (11) уравнение (1) запишется как

$$yy'' + \frac{1}{\lambda}\,y'^2 + \biggl[\biggl(\alpha + \frac{1}{\lambda} + 1\biggr)y + \biggl(p + \frac{1}{\lambda} - 1\biggr)y^{p-1}\biggr]y' + \alpha y^2 + \alpha y^p = 0. \tag{13}$$

Пусть $p \neq 2$, тогда при $C_1 = 0$ из (12) получим частное решение ОДУ (13) вида

$$y(x) = \biggl[\frac{C_2}{e^{(p-2)x} - C_2}\biggr]^{1/(p-2)},$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Пример 4. Пусть $p = 1 - 1/\lambda$, соответственно $B = 0$. Тогда уравнение (13) упростится и примет вид

$$yy'' + \frac{1}{\lambda}\,y'^2 + \biggl(\alpha + \frac{1}{\lambda} + 1\biggr)yy' + \alpha y^2 + \alpha y^{(\lambda-1)/\lambda} = 0. \tag{14}$$

Общее решение ОДУ (14) в силу утверждения 2 определяется из уравнения Бернулли

$$y' + y = (C_1 \exp(-\alpha x) - 1)y^{-1/\lambda}, \quad y = y(x),$$

общее решение которого задаётся формулами

$$y(x) = \biggl[\frac{C_1(\lambda+1)}{(1-\alpha)\lambda+1}\exp(-\alpha x) + C_2 \exp\biggl(-\frac{1+\lambda}{\lambda}\,x\biggr) - 1\biggr]^{\lambda/(\lambda+1)}, \quad \lambda \neq -1,$$

$$y(x) = C_2 \exp\biggl(-2x + \frac{C_1}{\alpha}\,e^{-\alpha x}\biggr), \quad \lambda = -1,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Если имеет место равенство $\alpha = p - 1 + 1/\lambda$, то подстановкой $y(x) = e^{-x}Z(x)$ ОДУ (13) сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой функции $Z(x)$:

$$Z' = (C_1 Z^{-1/\lambda} - Z^{p-1})e^{(2-p)x}, \quad Z = Z(x). \tag{15}$$

Пример 5. Пусть $\lambda = 1$, $p = 4$. Тогда из уравнения (15) в зависимости от знака C_1 по формуле $y(x) = e^{-x}Z(x)$ получим для ОДУ

$$yy'' + y'^2 + (6y + 4y^3)y' + 4y^2 + 4y^4 = 0$$

решения следующих видов:

$$y(x) = \pm e^{-x}[\sqrt{C_1}\,\mathrm{th}\,(C_2 - \sqrt{C_1}\,e^{-2x})]^{1/2}, \quad C_1 > 0,$$

$$y(x) = \pm e^{-x}[\sqrt{-C_1}\,\mathrm{tg}\,(\sqrt{-C_1}\,e^{-2x} + C_2)]^{1/2}, \quad C_1 < 0,$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 – произвольные постоянные.

Замечание. Уравнение (5) является уравнением Абеля второго рода и сводится [4, с. 93] к более простому виду, не содержащему квадрат искомой функции. Для такого уравнения в [4] приводится множество случаев интегрируемости при различных значениях параметров. Например, для $B = 0$ таких интегрируемых случаев набирается около двадцати, в каждом из которых будут свои условия на параметры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00819).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
2. *Косов А.А., Семенов Э.И.* О точных решениях уравнения нелинейной диффузии // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60. № 1. С. 123–140.
3. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Нелинейные уравнения математической физики: в 2 ч. Ч. 1. М., 2017.
4. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.
5. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.* W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики. Саров, 2006.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 07.03.2022 г.
После доработки 06.08.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.