КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.837.2

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. Е. М. Мухсинов

В банаховом пространстве исследуется разрешимость задачи преследования в смысле Л.С. Понтрягина для одной дифференциальной игры, динамика которой описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа.

DOI: 10.31857/S0374064123010132, EDN: ODQUSP

В банаховом пространстве X рассматривается квазилинейная дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)-\sum_{i=1}^{n}B_ix(t-h_i)\right)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{n}A_ix(t-h_i)+f(u(t),v(t),t) \tag{1}$$

и замкнутым терминальным множеством $M\subset X,$ где заканчивается игра.

В игре (1) $t\geqslant 0,$ $0<h_1<h_2<\ldots<h_n=h,$ $x(t)\in X,$ $U([0,\infty),Y)$ – множество всех измеримых отображений, действующих из множества $[0,\infty)$ в банахово пространство $Y,$ причём на $[0,\infty)$ рассматривается мера Лебега, $u(\cdot)\in U([0,\infty),Y)$ – управления преследования, $v(\cdot)\in U([0,\infty),Z)$ – управления убегания, Z – банахово пространство, $A_i: X\to X$ – линейные ограниченные операторы, а $A: D\to X$ – линейный замкнутый оператор, имеющий плотную в X область определения $D,$ порождающий сильно непрерывную полугруппу $S(t)$ [1, с. 316]. В дальнейшем предполагаем, что линейные ограниченные операторы $B_i: X\to X$ такие, что линейные операторы AB_i ограничены [2, с. 259]. Используя полугруппу $S(t),$ можно построить фундаментальное решение $\Phi(t)$ [2, с. 267], для которого справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi(t)-\sum_{i=1}^{n}B_i\Phi(t-h_i)\right)=A\Phi(t)+\sum_{i=1}^{n}A_i\Phi(t-h_i),$$

$\Phi(0)=I$ – единичный оператор, а $\Phi(t)=0$ при $t<0.$

На основании работы [2], следуя А. Фридману [3, с. 95] и Ю.С. Осипову [4, с. 1314], дадим следующее

Определение. Если отображение $t\to f(u(t),v(t),t)$ локально интегрируемо, то *решением задачи Коши* для уравнения (1) с начальным положением

$$x(s)=\varphi(s),\quad -h\leqslant s\leqslant 0, \tag{2}$$

и соответствующими управлениями $u(\cdot),$ $v(\cdot)$ будем называть отображение

$$x(t)=\left[\Phi(t)-\sum_{i=1}^{n}\Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0)+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-h_i}^{0}\Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau)+B_i\dot\varphi(\tau)]\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\Phi(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

где $\varphi(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция и интеграл понимается в смысле Бохнера [1, с. 93].

В дальнейшем предполагаем, что отображение $f : Y \times Z \times [0,\infty) \to X$ измеримо по $t \in [0,\infty)$ и непрерывно по $(u,v) \in Y \times Z$, и существует локально суммируемая функция $\xi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ такая, что при любых $u \in Y$, $v \in Z$, $t \in [0,\infty)$ имеет место неравенство $||f(u,v,t)|| \leqslant \xi(t)$. Это предположение обеспечивает локальную интегрируемость отображения $t \to f(u(t),v(t),t)$ по Бохнеру.

Для игры (1) исследуем разрешимость задачи преследования в смысле Л.С. Понтрягина [5, с. 308; 6, с. 233; 7, с. 130].

Для доказательства основного результата нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения). *Пусть отображения* $P : [0,\infty) \to 2^Y$ *и* $\varphi : [0,\infty) \to X$ *измеримы, а отображение* $g : Y \times Z \times [0,\infty) \to X$ *непрерывно по* $(u,v) \in Y \times Z$ *и измеримо по* $t \in [0,\infty)$. *Если для любых* $v(\cdot) \in U([0,\infty),Z)$ *и почти всех* $t \in [0,\infty)$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in g(P(t),v(t),t)$, *то отображение* $t \to \{u \in P(t) : \varphi(t) = g(u,v(t),t)\}$ *замкнутозначно, измеримо и имеет измеримый селектор, т.е. существует измеримое отображение* $u(\cdot) : [0,\infty) \to Y$ *такое, что* $u(t) \in P(t)$ *и* $\varphi(t) = g(u(t),v(t),t)$ *для почти всех* $t \in [0,\infty)$.

Доказательство леммы 1 следует из работ [8, с. 56; 9, с. 86].

Лемма 2. *Пусть* E *– отделимое линейное топологическое пространство, отображение* $\varphi : [a,b] \to E$ *непрерывно, а отображение* $P : [a,b] \to 2^E$ *секвенциально замкнуто. Тогда множество* $\{t \in [a,b] : \varphi(t) \in P(t)\}$ *замкнуто.*

Доказательство. Если $t_n \in [a,b]$, $t_n \to t$, $\varphi(t_n) \in P(t_n)$, то в силу непрерывности φ имеем $\varphi(t_n) \to \varphi(t)$. Из секвенциальной замкнутости отображения P следует, что $\varphi(t) \in P(t)$, а это означает, что множество $\{t \in [a,b] : \varphi(t) \in P(t)\}$ замкнуто. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть отображение* $P : [a,b] \to 2^E$ *секвенциально замкнуто, где* E *– отделимое линейное топологическое пространство, полученное в результате наделения банахова пространства* X *ослабленной топологией* $\sigma(X,X^*)$ *[10, с. 239]. Если* M *– компактное подмножество* E *относительно топологии* $\sigma(X,X^*)$, *то отображение* $t \to M + P(t)$, *действующее из* $[a,b]$ *в* 2^E, *секвенциально замкнуто.*

Лемма 3 доказана в статье [11, с. 81].

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) X, Y *– сепарабельные банаховы пространства, а терминальное множество* M *выпукло и компактно относительно топологии* $\sigma(X,X^*)$;

2) начальное положение $\varphi(s)$, $-h \leqslant s \leqslant 0$, *абсолютно непрерывно, и при некотором* $T \geqslant 0$ *имеет место включение*

$$\Bigl[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n}\Phi(T-h_i)B_i\Bigr]\varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-h_i}^{0}\Phi(T-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot\varphi(\tau)]\,d\tau \in M - W(T), \tag{4}$$

где $W(t) = \int_0^t \bigcap_{v\in Z}\Phi(t-\tau)f(Y,v,\tau)\,d\tau$;

3) отображение $t \to W(t)$, $t \in [0,T]$, *замкнуто относительно топологии* $\sigma(X,X^*)$ *и при каждом* t *непусто и выпукло;*

4) существует отображение $w : Y \to Z$ *такое, что при всех* $u \in Y$, $t \in [0,T]$, $0 \leqslant s \leqslant t$, *выполняется включение*

$$\Phi(t-s)f(u,w(u),s) \in \bigcap_{v\in Z}\Phi(t-s)f(Y,v,s),$$

и для каждого $u(\cdot)$ *суперпозиция* $w(u(\cdot))$ *измерима.*

Тогда из начального положения φ возможно завершение преследования за оптимальное время

$$T_0 = \min\{T \geqslant 0 : \textit{для которых выполняется (4)}\}.$$

Доказательство. В силу условия 3) отображение $t \to W(t)$ замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Следовательно, оно секвенциально замкнуто относительно этой топологии. С другой стороны, в силу условия 1) множество M компактно относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Поэтому согласно лемме 3 отображение $t \to M - W(t)$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Тогда в силу непрерывности отображения

$$t \to \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi(t - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\, d\tau,$$

которое следует из [2, с. 268], в силу условия 2) и доказанной леммы 2 множество $\{T \geqslant 0 :$ для которых выполняется $(5)\}$ замкнуто. А это влечёт за собой следующее включение:

$$\left[\Phi(T_0) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_0 - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi(T_0 - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\, d\tau \in M - W(T_0). \quad (5)$$

На основании (5) существуют некоторая точка $m \in M$ и такой интегрируемый селектор $p(\cdot)$ отображения

$$\tau \to \bigcap_{v \in Z} \Phi(T_0 - \tau) f(Y, v, \tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T_0,$$

что имеет место равенство

$$\left[\Phi(T_0) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_0 - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi(T_0 - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\, d\tau = m - \int\limits_{0}^{T_0} p(\tau)\, d\tau. \quad (6)$$

Если выбрано произвольное управление убегания $v(\cdot) \in U([0, T_0], Z)$, то в силу леммы 1 найдётся такое управление преследования $u(\cdot) \in U([0, T_0], Y)$, что будет иметь место равенство

$$p(\tau) = \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) \quad (7)$$

для почти всех $\tau \in [0, T_0]$.

Учитывая (6) и (7), для решения (3) задачи (1), (2) имеем

$$x(T_0) = \left[\Phi(T_0) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_0 - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi(T_0 - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{0}^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau)\, d\tau = m - \int\limits_{0}^{T_0} p(\tau)\, d\tau + \int\limits_{0}^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau)\, d\tau =$$

$$= m - \int\limits_{0}^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau)\, d\tau + \int\limits_{0}^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau)\, d\tau = m \in M.$$

Отметим, что $u(\tau)$ выбирается по формуле (7), исходя из информации о $v(\tau)$. Если при выборе $u(\tau)$ использовать информацию о $v(\tau)$ и $x(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau$, то время достижения множества M будет не более числа T_0. Далее, в силу определения числа T_0 заключаем, что при всех $t \in [0, T_0)$ имеет место следующее соотношение:

$$\left(\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\,d\tau + W(t)\right) \bigcap M = \varnothing. \quad (8)$$

Если $\varepsilon \in (0, T_0)$, то значения $v(t)$ управления убегания $v(\cdot) \in U([0, T_0], Z)$ на отрезке $[0, \varepsilon]$ выбираем произвольно, а при $t \in (\varepsilon, T_0)$ – специальным образом: $v(t) = w(u(t-\varepsilon))$. Тогда в задаче (1), (2) для решения $x(\cdot)$, соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на $[0, T_0)$, имеем

$$x(t) = \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t} \Phi(t-\tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau)\,d\tau = \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\,d\tau + \int\limits_{0}^{\varepsilon} \Phi(t-\tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau)\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon}^{t} \Phi(t-\tau) f(u(\tau), w(u(\tau-\varepsilon)), \tau)\,d\tau.$$

В силу равенства (8), условий 1), 3) и теоремы о строгой отделимости (см. [10, с. 109]) множества M и

$$\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\,d\tau + W(t)$$

при всех $t \in [0, T_0)$ строго отделимы, т.е. при всех $t \in [0, T_0)$ можно найти такой непрерывный линейный функционал $\psi \in X^*$ и такие константы c и $\delta > 0$, что справедливы оценки

$$\psi(x) \leqslant c - \delta < c \leqslant \psi(m) \quad (9)$$

при всех

$$x \in \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\,d\tau + W(t)$$

и $m \in M$. Если $\overline{p}(\cdot)$ – произвольный интегрируемый селектор отображения

$$\tau \to \bigcap_{v \in Z} \Phi(t-\tau) f(Y, v, \tau), \quad \tau \in [0, \varepsilon],$$

то на основании условия 4) и неравенств (9) имеем

$$\psi(x(t)) = \psi\left(\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\,d\tau +\right.$$

$$+\int_0^{\varepsilon}\Phi(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)\,d\tau+\int_{\varepsilon}^{t}\Phi(t-\tau)f(u(\tau),w(u(\tau-s)),\tau)\,d\tau\biggr)=$$

$$=\psi\biggl(\biggl[\Phi(t)-\sum_{i=1}^{n}\Phi(t-h_i)B_i\biggr]\varphi(0)+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau)+B_i\dot{\varphi}(\tau)]\,d\tau+\int_0^{\varepsilon}\overline{p}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_{\varepsilon}^{t}\Phi(t-\tau)f(u(\tau),w(u(\tau-s)),\tau)\,d\tau\biggr)+\psi\biggl(\int_0^{\varepsilon}\Phi(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)\,d\tau-\int_0^{\varepsilon}\overline{p}(\tau)\,d\tau\biggr)\leqslant$$

$$\leqslant c-\delta+\int_0^{\varepsilon}\psi\biggl(\Phi(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)-\overline{p}(\tau)\biggr)\,d\tau.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует число $\varepsilon=\theta>0$ такое, что

$$\biggl|\int_0^{\theta}\psi(\Phi(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)-\overline{p}(\tau))\,d\tau\biggr|<\frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, $\psi(x(t))\leqslant c-\delta/2<c$. Поэтому число $\varepsilon=\theta>0$ и соответствующее ему управление $v(\cdot)$ можно выбрать таким образом, что $x(t)\notin M$ при всех $t\in[0,T_0)$, а это и доказывает оптимальность времени преследования T_0. Теорема доказана.

Замечание. Полученный результат обобщает соответствующие результаты работ [11, с. 81; 12, с. 519; 13, с. 70].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
2. *Datko R.* Linear Autonomous Neutral Differential Equations is a Banach Space // J. of Differ. Equat. 1977. № 25. P. 258–274.
3. *Friedman A.* Differential games of pursuit in banach space // J. of Math. Analysis and Appl. 1969. V. 25. P. 93–113.
4. *Осипов Ю.С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределёнными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1314–1317.
5. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112 (154). № 3. С. 307–331.
6. *Мухсинов Е.М., Муродова М.Н.* Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний в гильбертовом пространстве // Вестн. Таджикского нац. ун-та. Сер. естеств. наук. 2016. № 1/1 (192). С. 233–236.
7. *Мамадалиев Н.* Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148.
8. *Rockafellar T.R.* Convex Integral Functionals and Duality // Contribution to Nonlinear Functional Analysis. New York; London, 1971. P. 215–236.
9. *Castaing C., Valadier M.* Convex analysis and measurable multifunctions // Lect. Not. Math. 1977. V. 580. P. 1–278.
10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.
11. *Мухсинов Е.М.* Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх // Управляемые системы. Вып. 22. Новосибирск, 1982. С. 80–87.
12. *Гусятников П.Б., Никольский М.С.* Об оптимальности времени преследования // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 3. С. 518–521.
13. *Мухсинов Е.М.* О задаче преследования для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2022. № 2. С. 66–82.

Таджикский государственный
университет права, бизнеса и политики,
г. Худжанд

Поступила в редакцию 29.06.2021 г.
После доработки 20.08.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.