ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1299–1317

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ТИПА ДИРАКА $2m$-ГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2023 г. Э. Дж. Ибадов

Рассматривается оператор типа Дирака с матричными коэффициентами. Устанавливаются оценки для корневых вектор-функций, критерии бесселевости и безусловной базисности в пространстве $L_2^{2m}(G)$, $G=(a,b)\subset\mathbb{R}$ – конечный интервал, систем корневых вектор-функций этого оператора.

DOI: 10.31857/S0374064123100011, EDN: OQXSAB

1. Формулировка основных результатов. В настоящей работе с помощью метода, разработанного В.А. Ильиным [1], исследован одномерный оператор типа Дирака $2m$-го порядка с суммируемым потенциалом и установлены антиаприорные оценки для корневых вектор-функций, критерий бесселевости и безусловной базисности в $L_2^{2m}(G)$ систем корневых вектор-функций. Будем понимать эти корневые вектор-функции в обобщённой трактовке, т.е. безотносительно к краевым условиям (см. [1]). Антиаприорные оценки впервые были установлены в статье [2] для обыкновенных дифференциальных операторов порядка n с гладкими коэффициентами. В дальнейшем установлению антиаприорных оценок было посвящено много работ (см., например, [3–8]). Эти оценки использовались при исследовании вопросов сходимости спектральных разложений.

Отметим, что при таком обобщённом понимании корневых функций (в смысле В.А. Ильина) [1] установлены необходимые и достаточные условия безусловной базисности в пространстве $L_2(G)$ систем корневых функций оператора

$$Lu=-u''+q(x)u,$$

где $q(x)\in L_1(G)$. Эти и другие вопросы изучались в [3, 6, 9–13] для обыкновенного дифференциального оператора высокого порядка и были установлены критерии бесселевости, базисности Рисса, безусловной базисности. Для оператора Дирака с потенциалом $P(x)\in L_2(G)$ критерии бесселевости и безусловной базисности сформулированы в работе [14]. Покомпонентная равномерная равносходимость на компакте, равномерная сходимость, базисность Рисса систем корневых вектор-функций, бесселевость, безусловная базисность для оператора типа Дирака изучались в статьях [15–20].

Свойствам базисности и другим спектральным свойствам корневых вектор-функций оператора Дирака (с краевыми условиями) посвящена обширная литература [21–31]. В работе [28], например, установлена базисность Рисса в случае, когда потенциал оператора Дирака принадлежит L_2 и краевые условия разделённые, а в [30] исследован случай с регулярными краевыми условиями и с потенциалом из класса L_2. Оператор Дирака с потенциалом из L_p, $p\geqslant 1$, исследован в статьях [26, 27]; для случая сильно регулярных краевых условий была доказана базисность Рисса, а в случае регулярных (но не сильно регулярных) краевых условий – базисность Рисса из подпространств. В [22, 23] исследована 2×2 система типа Дирака с потенциалами из класса L_1 и сильно регулярными краевыми условиями. Для $2m\times 2m$ системы Дирака с краевыми условиями Дирихле и потенциалом из L_2 базисность Рисса из подпространств доказана в работе [31]. В статье [24] показано, что система корневых векторов общей $n\times n$ системы типа Дирака при определённых граничных условиях образует базис Рисса со скобками.

Пусть $L_p^{2m}(G)$, $p \geqslant 1$, – пространство $2m$-компонентных вектор-функций

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{2m}(x))^{\mathrm{т}}$$

с нормой

$$\|f\|_{p,2m} = \left[\int\limits_G \left(\sum_{j=1}^{2m} |f_j(x)|^2\right)^{p/2} dx\right]^{1/p}.$$

В случае $p = \infty$ норма определяется равенством

$$\|f\|_{\infty,2m} = \sup_{x\in\overline{G}} \operatorname{vrai} |f(x)|.$$

Очевидно, что для произвольных функций $f(x) \in L_p^{2m}(G)$, $g(x) \in L_q^{2m}(G)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, определено "скалярное произведение"

$$(f, g) = \int\limits_G \sum_{j=1}^{2m} f_j(x)\overline{g_j(x)}\, dx.$$

Рассмотрим оператор типа Дирака $2m$-го порядка

$$D\psi = B\frac{d\psi}{dx} + \Omega(x)\psi, \quad \psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{2m}(x))^{\mathrm{т}},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_m), \quad T_2 = \operatorname{diag}(b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_{2m}),$$

$$(b_1 = b_2 = \ldots = b_m > 0, \quad b_{m+1} = \ldots = b_{2m} < 0),$$

$\Omega(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{2m}(x))$, $p_i(x)$, $i = \overline{1, 2m}$, – комплекснозначные функции, определённые на произвольном конечном интервале $G = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

Следуя работе [1], под *собственной функцией оператора* D, отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую тождественно не равную нулю комплекснозначную вектор-функцию $\overset{\circ}{\psi}(x)$, которая абсолютно непрерывна на любом замкнутом подынтервале интервала G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $D\overset{\circ}{\psi} = \lambda\overset{\circ}{\psi}$.

Аналогично под *присоединённой функцией порядка* $l \geqslant 1$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{\psi}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную вектор-функцию $\overset{l}{\psi}(x)$, которая абсолютно непрерывна на любом замкнутом подынтервале интервала G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $D\overset{l}{\psi} = \lambda\overset{l}{\psi} + \overset{l-1}{\psi}$.

Теорема 1. *Пусть функции* $p_i(x)$, $i = \overline{1, 2m}$, *принадлежат классу* $L_1^{\mathrm{loc}}(G)$. *Тогда для любого компакта* $K \subset G$ *существуют константы* $C^r(K, l, b_1, b_{m+1})$, $r = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, *не зависящие от* λ *и такие, что справедливы оценки*

$$\|\overset{l-1}{\psi}\|_{L^2_\infty(K)} \leqslant C^1(K, l, b_1, b_{m+1})(1 + |\operatorname{Im}\lambda|)\|\overset{l}{\psi}\|_{L^2_\infty(K)}, \tag{1}$$

$$\|\overset{l}{\psi}\|_{L^2_\infty(K)} \leqslant C^2(K, l, b_1, b_{m+1})(1 + |\operatorname{Im}\lambda|)^{1/p}\|\overset{l}{\psi}\|_{L^2_p(K)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{2}$$

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – произвольная система, составленная из собственных и присоединённых вектор-функций оператора D, $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – соответствующая ей система собственных значений. Кроме того, функция $\psi_k(x)$ входит в систему $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ вместе со всеми соответствующими ей присоединёнными функциями меньшего порядка. Это означает, что $D\psi_k = \lambda_k\psi_k + \theta_k\psi_{k-1}$, где θ_k равно либо нулю (в этом случае $\psi_k(x)$ – собственная вектор-функция), либо единице (в этом случае $\psi_k(x)$ – присоединённая вектор-функция, причём $\lambda_k = \lambda_{k-1}$).

Определение 1. Будем говорить, что для заданной системы функций $h_k(x) \in L_2^{2m}(G)$ выполняется *неравенство Бесселя*, если существует постоянная M такая, что для произвольной вектор-функции $f(x) \in L_2^{2m}(G)$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h_k, f)|^2 \leqslant M\|f\|_{2,2m}^2,$$

где M – константа, не зависящая от $f(x)$.

Теорема 2 (критерий бесселевости). *Пусть $\Omega(x) \in L_1(G)$, длины цепочек корневых вектор-функций равномерно ограничены и существует константа C_0 такая, что*

$$|\operatorname{Im} \lambda_k| \leqslant C_0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Тогда для того чтобы система функций $\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^{2m}(G)$ удовлетворяла неравенству Бесселя, необходимо и достаточно существование константы M_1 такой, что

$$\sum_{|\operatorname{Re} \lambda_k - \tau| \leqslant 1} 1 \leqslant M_1, \tag{4}$$

где τ – произвольное действительное число.

Обозначим через D^* формально сопряжённый оператор к оператору D:

$$D^* = -B^* \frac{d}{dx} + \Omega^*(x),$$

где $\Omega^*(x)$ – сопряжённая матрица к матрице $\Omega(x)$. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – биортогонально сопряжённая к $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^{2m}(G)$ система, состоящая из корневых вектор-функций оператора D^* (т.е. $D^*\varphi_k = \overline{\lambda_k}\varphi_k + \theta_{k+1}\varphi_{k+1}$).

Теорема 3 (о безусловной базисности). *Пусть $\Omega(x) \in L_1(G)$, длины цепочек корневых вектор-функций равномерно ограничены, одна из систем $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ или $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $L_2^{2m}(G)$ и выполняется условие (3). Тогда необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_2^{2m}(G)$ каждой из этих систем является существование постоянных M_1 и M_2, обеспечивающих справедливость неравенства (4) и*

$$\|\psi_k\|_{2,2m}\|\varphi_k\|_{2,2m} \leqslant M_2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Замечание 1. Отметим, что при условиях теоремы 3 выполнение неравенств (4) и (5) является необходимым и достаточным условием для базисности Рисса каждой из систем

$$\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{\varphi_k(x)\|\varphi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$$

в пространстве $L_2^{2m}(G)$.

Определение 2. Система $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^{2m}(G)$ называется *квадратично близкой* в $L_2^{2m}(G)$ к системе $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^{2m}(G)$, если имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\tau_k - \psi_k\|_{2,2m}^2 < \infty.$$

Теорема 4 (об эквивалентной базисности). *Пусть $\Omega(x) \in L_1(G)$, выполняются условия (3)–(5) и система $\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ квадратично близка к некоторому базису $\{z_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ пространства $L_2^{2m}(G)$. Тогда системы $\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_k(x)\|\psi_k\|_{2,2m}\}_{k=1}^{\infty}$ являются* *базисами в* $L_2^{2m}(G)$, *причём эквивалентны соответственно базису* $\{z_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и его биортогонально сопряжённой системе.*

2. Вспомогательные леммы. Для доказательств теорем 1–3 необходимы некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (формула сдвига). *Если функции* $p_i(x)$, $i=\overline{1,2m}$, *принадлежат классу* $L_1^{\mathrm{loc}}(G)$ *и точки* $x-t$, x, $x+t$ *находятся в области* G, *то справедливы следующие формулы:*

$$\overset{l}{\psi}(x+t)=\left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}tI-\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right]\overset{l}{\psi}(x)+$$

$$+B^{-1}\int\limits_x^{x+t}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi+x)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi+x)I\right)[\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)-\overset{l-1}{\psi}(\xi)]\,d\xi,\quad(6)$$

$$\overset{l}{\psi}(x-t)=\left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}tI+\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right]\overset{l}{\psi}(x)+$$

$$+B^{-1}\int\limits_{x-t}^{x}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t+\xi-x)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t+\xi-x)I\right)[\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)-\overset{l-1}{\psi}(\xi)]\,d\xi,\quad(7)$$

$$\overset{l}{\psi}(x+t)+\overset{l}{\psi}(x-t)=2\overset{l}{\psi}(x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t+B^{-1}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{sign}(\xi-x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I\right)[\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)-\overset{l-1}{\psi}(\xi)]\,d\xi,\quad(8)$$

где I *– единичный оператор в* E^{2m}, *а* E^{2m} *является* $2m$*-мерным евклидовым пространством.*

Доказательство. Для вывода формул (6) и (7) достаточно применить к уравнению

$$D\overset{l}{\psi}(\xi)=\lambda\overset{l}{\psi}(\xi)+\overset{l-1}{\psi}$$

оператор

$$\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I-\operatorname{sign}(\xi-x)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\right)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}$$

и проинтегрировать по параметру ξ от x до $x+t$ (от $x-t$ до x), а затем провести интегрирование по частям в выражении

$$\int\limits_x^{x+t}\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi+x)I-\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi+x)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)Bd\overset{l}{\psi}(\xi)$$

$$\left(\int\limits_{x-t}^{x}\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t+\xi-x)I+\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t+\xi-x)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)Bd\overset{l}{\psi}(\xi)\right)$$

и сгруппировать подобные члены. Формула (8) вытекает из формул (6) и (7). Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $p_i(x)$, $i=\overline{1,2m}$, *– функции из класса* $L_1^{\mathrm{loc}}(G)$ *и точки* $x-t$, x, $x+t$ *принадлежат области* G, *то справедлива формула*

$$\frac{2t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\sin\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l-1}{\psi}(x)=2\cos\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l}{\psi}(x)-\overset{l}{\psi}(x+t)-\overset{l}{\psi}(x-t)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I+\operatorname{sign}(\xi-x)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right]\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\int\limits_{x-t}^{x+t}(t-|x-\xi|)\times$$

$$\times\left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I-\operatorname{sign}(\xi-x)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right](\Omega(\xi)\overset{l-1}{\psi}(\xi)-\overset{l-2}{\psi}(\xi))\,d\xi. \tag{9}$$

Доказательство. Вычитая из (6) равенство (7), будем иметь

$$\overset{l}{\psi}(x+t)-\overset{l}{\psi}(x-t)=-2\sin\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l}{\psi}(x)+$$

$$+B^{-1}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(\operatorname{sign}(\xi-x)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I\right)[\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)-\overset{l-1}{\psi}(\xi)]\,d\xi. \tag{10}$$

Запишем формулу (8) в следующем виде:

$$\overset{l}{\psi}(x+t)+\overset{l}{\psi}(x-t)=2\cos\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l}{\psi}(x)+$$

$$+B^{-1}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\operatorname{sign}(\xi-x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I\right)\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-$$

$$-B^{-1}\int\limits_{0}^{t}\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-r)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\left\{\overset{l-1}{\psi}(x+r)+\overset{l-1}{\psi}(x-r)\right\}dr+$$

$$+B^{-1}\int\limits_{0}^{t}\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-r)I\left\{\overset{l-1}{\psi}(x+r)-\overset{l-1}{\psi}(x-r)\right\}dr.$$

Подставляя формулы (8) и (10) при $l-1$ в последнее равенство, меняя порядки интегрирования в двойных интегралах и учитывая, что $B^{-1}=-B/|b_1b_{m+1}|$ и $(B^{-1})^2=-I/|b_1b_{m+1}|$, получаем

$$\overset{l}{\psi}(x+t)+\overset{l}{\psi}(x-t)=2\cos\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l}{\psi}(x)+\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sign}(\xi-x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right]\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{2}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\times$$

$$\times \int\limits_0^t \left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r \sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t-r) + \sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r \cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t-r)\right] dr \overset{l-1}{\psi}(x) -$$

$$- \int\limits_{x-t}^{x+t} d\xi \int\limits_{|x-\xi|}^{t} \left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t-r)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(r-|x-\xi|)\frac{I}{|b_1 b_{m+1}|} + \right.$$

$$+ \operatorname{sign}(\xi - x)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t-r)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(r-|x-\xi|)\frac{B}{|b_1 b_{m+1}|^{3/2}} +$$

$$+ \operatorname{sign}(\xi - x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t-r)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(r-|x-\xi|)\frac{B}{|b_1 b_{m+1}|^{3/2}} -$$

$$\left. - \cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t-r)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(r-|x-\xi|)\frac{I}{|b_1 b_{m+1}|}\right](\Omega(\xi)\overset{l-1}{\psi}(\xi) - \overset{l-2}{\psi}(\xi))\,dr.$$

Отсюда следует, что

$$\overset{l}{\psi}(x+t) + \overset{l}{\psi}(x-t) = 2\cos\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\overset{l}{\psi}(x) - \frac{2t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\sin\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\overset{l-1}{\psi}(x) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I + \operatorname{sign}(\xi - x) \times \right.$$

$$\left. \times \cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\right]\Omega(\xi)\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi + \int\limits_{x-t}^{x+t}(t-|x-\xi|) \times$$

$$\times \left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{I}{|b_1 b_{m+1}|} - \operatorname{sign}(\xi - x) \times \right.$$

$$\left. \times \sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{|b_1 b_{m+1}|^{3/2}}\right](\Omega(\xi)\overset{l-1}{\psi}(\xi) - \overset{l-2}{\psi}(\xi))\,d\xi.$$

Из последнего равенства вытекает формула (9). Лемма доказана.

Лемма 3. *При условиях леммы 2 справедливы следующие формулы:*

$$\overset{l}{\psi}(x+t) = \overset{l}{\psi}(x) + \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|}\int\limits_{x}^{x+t}(\Omega(\xi) - \lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|}\int\limits_{x}^{x+t}\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi, \tag{11}$$

$$\overset{l}{\psi}(x-t) = \overset{l}{\psi}(x) - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|}\int\limits_{x-t}^{x}(\Omega(\xi) - \lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|}\int\limits_{x-t}^{x}\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi, \tag{12}$$

$$2t\overset{l-1}{\psi}(x) = B\{\overset{l}{\psi}(x+t) - \overset{l}{\psi}(x-t)\} + \int\limits_{x-t}^{x+t}(\Omega(\xi) - \lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi -$$

$$- \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|}\int\limits_0^t dr\int\limits_{x-r}^{x+r}\operatorname{sign}(\xi - x)\{(\Omega(\xi) - \lambda I)\overset{l-1}{\psi}(\xi) - \overset{l-2}{\psi}(\xi)\}\,d\xi. \tag{13}$$

Доказательство. Проинтегрируем уравнение $D\overset{l}{\psi}(\xi)=\lambda\overset{l}{\psi}(\xi)+\overset{l-1}{\psi}(\xi)$ по ξ от x до $x+t$:

$$B\int\limits_x^{x+t}d\overset{l}{\psi}(\xi)+\int\limits_x^{x+t}\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi=\lambda\int\limits_x^{x+t}\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi+\int\limits_x^{x+t}\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi.$$

После интегрирования по частям в первом интеграле в левой части имеем

$$B[\overset{l}{\psi}(x+t)-\overset{l}{\psi}(x)]=-\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi+\int\limits_x^{x+t}\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда, в свою очередь, следует равенство

$$\overset{l}{\psi}(x+t)-\overset{l}{\psi}(x)=-B^{-1}\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi+B^{-1}\int\limits_x^{x+t}\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi,$$

из которого, учитывая, что $B^{-1}=-B/|b_1b_{m+1}|$, получаем равенство (11).

Аналогично доказывается формула (12).

Теперь докажем соотношение (13). Для этого (11) представим в виде

$$\overset{l}{\psi}(x+t)=\overset{l}{\psi}(x)+\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^{t}\overset{l-1}{\psi}(x+r)\,dr.$$

Учитывая в последнем интеграле значение $\overset{l-1}{\psi}(x+r)$ из (10), получаем

$$\overset{l}{\psi}(x+t)=\overset{l}{\psi}(x)+\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\overset{l-1}{\psi}(x)t-$$

$$-\frac{B^2}{|b_1b_{m+1}|^2}\int\limits_0^{t}dr\int\limits_x^{x+r}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi+\frac{B^2}{|b_1b_{m+1}|^2}\int\limits_0^{t}dr\int\limits_x^{x+r}\overset{l-2}{\psi}(\xi)\,d\xi.$$

Так как $B^2=-|b_1b_{m+1}|I$, из последнего равенства будем иметь

$$\overset{l}{\psi}(x+t)=\overset{l}{\psi}(x)+\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\overset{l-1}{\psi}(x)t+$$

$$+\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^{t}dr\int\limits_x^{x+r}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^{t}dr\int\limits_x^{x+r}\overset{l-2}{\psi}(\xi)\,d\xi. \qquad (14)$$

Аналогично находим, что

$$\overset{l}{\psi}(x-t)=\overset{l}{\psi}(x)-\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_{x-t}^{x}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\overset{l-1}{\psi}(x)t+\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^{t}dr\int\limits_{x-r}^{x}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^{t}dr\int\limits_{x-r}^{x}\overset{l-2}{\psi}(\xi)\,d\xi. \qquad (15)$$

Вычитая из (14) равенство (15), получаем

$$\overset{l}{\psi}(x+t)-\overset{l}{\psi}(x-t)=\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_{x-t}^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{2B}{|b_1b_{m+1}|}\overset{l-1}{\psi}(x)t+$$

$$+\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^t dr\int\limits_{x-r}^{x+r}\operatorname{sign}(\xi-x)\{(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l-1}{\psi}(\xi)-\overset{l-2}{\psi}(\xi)\}\,d\xi.$$

Из последнего соотношения следует формула (13). Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $K=[a',b']\subset G$. Докажем оценку (1) методом математической индукции.

Так как $\overset{-1}{\psi}\equiv 0$, то оценка (1) при $l=0$ будет справедливой с константой

$$C^1(K,0,b_1,b_{m+1})=1.$$

Предположим, что неравенство (1) справедливо при $l=k$. Так как функции $p_i(x)\in L_1(K)$, $i=\overline{1,2m}$, то можно выбрать число R_m таким, чтобы для любого множества $E_{2m}\subset K$, $\operatorname{mes}E_{2m}\leqslant 2\max\{1,\sqrt{|b_1b_{m+1}|}\}R_m$, выполнялось неравенство

$$\max\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\int\limits_{E_{2m}}\left[\sum_{i=1}^{2m}|p_i(\xi)|\right]d\xi,\ \frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_{E_{2m}}\left[\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)|+\sum_{i=m+1}^{2m}|b_1p_i(\xi)|\right]d\xi\right\}\leqslant\frac{1}{240}. \tag{16}$$

Выберем числа h_m и $h_{k+1,m}$ следующим образом:

$$0<h_m\leqslant\frac{1}{\max\{1,\sqrt{|b_1b_{m+1}|}\}}\min\left\{\frac{b'-a'}{4},R_m,\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right\},$$

$$0<h_{k+1,m}=\frac{1}{\max\{1,\sqrt{|b_1b_{m+1}|}\}}\times$$

$$\times\min\left\{\frac{1}{120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})(1+|\operatorname{Im}\lambda|)}\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right)^{-1},\frac{b'-a'}{4},R_m,\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right\}$$

и обозначим $h_m\sqrt{|b_1b_{m+1}|}=\delta_m$, $h_{k+1,m}\sqrt{|b_1b_{m+1}|}=\delta_{k+1,m}$.

Записав формулу (8) при $l=k$ в точках x, $x+t$, $x+2t$, где $t=\delta_m$, $x\in[a',(a'+b')/2]$, в силу неравенств

$$|\sin z|\leqslant 2,\quad |\cos z|\leqslant 2,\quad |\operatorname{Im}z|\leqslant 1 \tag{17}$$

находим, что

$$|\overset{k}{\psi}(x)|\leqslant 5\max_{x\in[a'+\delta_m,b'-\delta_m]}|\overset{k}{\psi}(x)|+2\left\{\frac{1}{\sqrt{b_1b_{m+1}}}\int\limits_x^{x+2\delta_m}\left[\sum_{i=1}^{2m}|p_i(\xi)|\right]d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+2\delta_m}\left[\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)|+\sum_{i=m+1}^{2m}|b_1p_i(\xi)|\right]d\xi\right\}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}+$$

$$+4\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

Отсюда в силу неравенства (16) для любого $x \in [a', (a'+b')/2]$ имеем оценку

$$|\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant 5 \max_{x\in[a'+\delta_m, b'-\delta_m]} |\overset{k}{\psi}(x)| + \frac{1}{2}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} +$$

$$+ 4\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}. \qquad (18)$$

Из формулы (8) аналогично получается неравенство (18) при $x \in [(a'+b')/2, b']$. Таким образом, при $x \in K$ справедливо

$$\frac{1}{2}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} - 4\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} \leqslant 5 \max_{x\in[a'+\delta_m, b'-\delta_m]} |\overset{k}{\psi}(x)|.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{10}\left[\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} - 8\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\right] \leqslant \max_{x\in[a'+\delta_m, b'-\delta_m]} |\overset{k}{\psi}(x)|. \qquad (19)$$

В силу неравенств (17) из формулы (9) при $t = \delta_m$, $x \in [a'+\delta_m, b'-\delta_m]$, $l = k+1$ будем иметь

$$2\delta_m|\sin(\lambda\delta_m)||\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant 6\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} + 2\left\{\frac{1}{\sqrt{b_1 b_{m+1}}}\int\limits_{x-\delta_m}^{x+\delta_m}\left[\sum_{i=1}^{2m}|p_i(\xi)|\right]d\xi +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|}\int\limits_{x-\delta_m}^{x+\delta_m}\left[\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m}|b_1 p_i(\xi)|\right]d\xi\right\}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} +$$

$$+ 2\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{b_1 b_{m+1}}}\int\limits_{x-\delta_m}^{x+\delta_m}\left[\sum_{i=1}^{2m}|p_i(\xi)|\right]d\xi + \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|}\int\limits_{x-\delta_m}^{x+\delta_m}\left[\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m}|b_1 p_i(\xi)|\right]d\xi\right\} \times$$

$$\times \|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} + \delta_m^2\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

Отсюда в силу неравенства (16) и произвольности точки $x \in [a'+\delta_m, b'-\delta_m]$ находим, что

$$\delta_m|\sin(\lambda\delta_m)| \max_{x\in[a'+\delta_m, b'-\delta_m]} |\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant 7\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} +$$

$$+ \frac{\delta_m}{60}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} + 4\delta_m^2\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}$$

или

$$|\sin(\lambda\delta_m)| \max_{x\in[a'+\delta_m, b'-\delta_m]} |\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant \frac{4}{\delta_m}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} +$$

$$+ \frac{1}{120}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} + 2\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

Объединив последнее неравенство с неравенством (19), получим

$$\frac{|\sin(\lambda\delta_m)|}{10}\left[\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} - 8\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\right] -$$

$$-\frac{1}{120}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} - 2\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} \leqslant \frac{4}{\delta_m}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

В силу предположения справедливости оценки (1) при $l = k$

$$\left\{\frac{|\sin(\lambda\delta_m)|}{10}\left[1 - 8\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right\}C^1(K,k,b_1,b_{m+1})(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\right] -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{120} - 2\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right\}C^1(K,k,b_1,b_{m+1})(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\right\}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\delta_m}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}. \tag{20}$$

Рассмотрим случай

$$|\lambda| \geqslant 2\max\{1, \sqrt{|b_1 b_{m+1}|}\} \times$$

$$\times \max\left\{\frac{4}{b'-a'}, \frac{1}{R_m}, 120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)\right\}(1+|\operatorname{Im}\lambda|).$$

Тогда из определения числа $\delta_{k+1,m}$ имеем $|\delta_{k+1,m}\lambda| \geqslant 2,$ $|\delta_{k+1,m}\operatorname{Im}\lambda| \leqslant 1.$ Нам понадобится следующее элементарное неравенство: $\sup\limits_{\alpha\in(1/2,1)} |\sin(\alpha z)| > 1/3$ при $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$ и $|z| \geqslant 2.$ Выбираем число $\alpha \in (1/2, 1)$ таким, чтобы выполнялось $|\sin(\alpha\lambda\delta_{k+1,m})| \geqslant 1/3.$ Тогда из неравенства (20), $\delta_m = \alpha\delta_{k+1,m},$ получим

$$\left\{\frac{1}{30}\left[1 - \frac{8}{120}\right] - \frac{1}{120} - \frac{1}{60}\right\}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} \leqslant \frac{4}{\delta_m}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

Следовательно,

$$\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} \leqslant \frac{1400}{\delta_{k+1,m}}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

С учётом определения числа $\delta_{k+1,m}$ имеем оценку

$$\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} \leqslant 1400\max\left\{\frac{4}{b'-a'}, \frac{1}{R_m}, 120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)\right\} \times$$

$$\times (1+|\operatorname{Im}\lambda|)\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}. \tag{21}$$

Рассмотрим случай

$$|\lambda| < 2\max\{1, \sqrt{|b_1 b_{m+1}|}\} \times$$

$$\times \max\left\{\frac{4}{b'-a'}, \frac{1}{R_m}, 120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)\right\}(1+|\operatorname{Im}\lambda|).$$

Выберем число

$$S_k \geqslant 2\max\{1, \sqrt{|b_1 b_{m+1}|}\}\max\left\{\frac{4}{b'-a'}, \frac{1}{R_m}, 120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)\right\}$$

таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{|b_1 b_{m+1}|}\int\limits_{E_{2m}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m}|b_1 p_i(\xi)|\right] + m|\lambda|(|b_1|+|b_{m+1}|)\right\}d\xi < \frac{1}{8}$$

для любого $E_{2m} \subset K$, $\operatorname{mes} E_{2m} \leqslant 1/(S_k(1+|\operatorname{Im}\lambda|))$. Это возможно в силу суммируемости функций $p_i(\xi)$, $i=\overline{1,2m}$, на компакте K. Определим число

$$\delta_m^{k+1} = \frac{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}{2S_k(1+|\operatorname{Im}\lambda|)}.$$

Тогда из формул (11) и (12) при $l=k$ находим, что

$$\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leqslant 2\max_{x\in[a'+\delta_m^{k+1},\, b'-\delta_m^{k+1}]} |\overset{k}{\psi}(x)| + \frac{1}{8}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + 2m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\delta_m^{k+1}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

Следовательно,

$$\frac{7}{16}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} - m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\delta_m^{k+1}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leqslant \max_{x\in[a'+\delta_m^{k+1},\, b'-\delta_m^{k+1}]} |\overset{k}{\psi}(x)|. \tag{22}$$

Из формулы (13) при $t=\delta_m^{k+1}$ и $l=k+1$ следует оценка

$$2\delta_m^{k+1}\max_{x\in[a'+\delta_m^{k+1},\, b'-\delta_m^{k+1}]} |\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant 2m(|b_1|+|b_{m+1}|)\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} +$$

$$+\frac{1}{8}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + \frac{1}{8}\delta_m^{k+1}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}(\delta_m^{k+1})^2\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает неравенство

$$\max_{x\in[a'+\delta_m^{k+1},\, b'-\delta_m^{k+1}]} |\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant \frac{m(|b_1|+|b_{m+1}|)+1/16}{\delta_m^{k+1}}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} +$$

$$+\frac{1}{16}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + \frac{m}{2}\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\delta_m^{k+1}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

Учитывая (22), из последнего соотношения имеем

$$\frac{3}{8}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leqslant \frac{3m}{2}\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\delta_m^{k+1}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + \left(m(|b_1|+|b_{m+1}|)+\frac{1}{16}\right)\frac{1}{\delta_m^{k+1}}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

В силу определений чисел δ_m^{k+1} и S_k получим оценку

$$\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leqslant 16S_k\left[m(|b_1|+|b_{m+1}|)+\frac{1}{16}\right]\left(3\sqrt{|b_1 b_{m+1}|} - 6m(|b_1|+|b_{m+1}|)\frac{1}{S_k}C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\right)^{-1}\times$$

$$\times(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}. \tag{23}$$

Из неравенств (21) и (23) следует оценка (1) при $l=k+1$.

Теперь докажем оценку (2). Запишем формулу (7) в точках x, $x+t$, $x\in[a',(a'+b')/2]$, $t\in[0,\delta_{l+1,m}]$, в виде

$$\overset{l}{\psi}(x) = \left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}tI + \sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}t\frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\right]\overset{l}{\psi}(x+t) +$$

$$+B^{-1}\int_x^{x+t}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(\xi-x)\frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(\xi-x)I\right)(\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi) - \overset{l-1}{\psi}(\xi))\,d\xi.$$

Проинтегрировав последнее равенство по t от 0 до $\delta_{l+1,m}$ и использовав неравенство (17), найдём

$$\delta_{l+1,m}|\overset{l}{\psi}(x)| \leqslant \left(2+\frac{2m(|b_1|+|b_{m+1}|)}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\int\limits_0^{\delta_{l+1,m}}|\overset{l}{\psi}(x+t)|\,dt + 2\delta_{l+1,m}\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\times\right.$$

$$\times\int\limits_x^{x+\delta_{l+1,m}}\left(\sum_{i=1}^{2m}|p_i(\xi)|\right)d\xi + \frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+\delta_{l+1,m}}\left(\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m}|b_1p_i(\xi)|\right)d\xi\left.\right\}\|\overset{l}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\delta_{l+1,m}^2\|\overset{l-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + 2m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\delta_{l+1,m}^2\|\overset{l-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

С помощью неравенства Гёльдера и оценки (1) из этого соотношения в силу (16) получим

$$\delta_{l+1,m}|\overset{l}{\psi}(x)| \leqslant \left(2+2m\frac{(|b_1|+|b_{m+1}|)}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\delta_{l+1,m}^{1-1/p}\|\overset{l}{\psi}\|_{L_p^{2m}(K)} + \frac{1}{60}\delta_{l+1,m}\|\overset{l}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} +$$

$$+2\delta_{l+1,m}^2\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right\}C^1(K,l,b_1,b_{m+1})(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\|\overset{l}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$|\overset{l}{\psi}(x)| \leqslant 2\left(1+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\delta_{l+1,m}^{-1/p}\|\overset{l}{\psi}\|_{L_p^{2m}(K)} + \left[\frac{1}{60} + 2\delta_{l+1,m}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right\}C^1(K,l,b_1,b_{m+1})(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\right]\|\overset{l}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(1+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\delta_{l+1,m}^{-1/p}\|\overset{l}{\psi}\|_{L_p^{2m}(K)} + \frac{1}{30}\|\overset{l}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

С учётом формулы (6) такое же неравенство получаем и при $x\in[(a'+b')/2,b']$. Следовательно,

$$\|\overset{l}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leqslant 3\left(1+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\left[\max\left\{\frac{4}{b'-a'},\frac{1}{R_m},120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right)\right\}\right]^{1/p}(1+|\operatorname{Im}\lambda|)^{1/p}\|\overset{l}{\psi}\|_{L_p^{2m}(K)}.$$

Справедливость оценки (2) установлена. Теорема 1 доказана.

Отметим, что оценки (1) и (2) в работе [14] ранее были получены для случая $m=1$, $b_1=-b_2=1$.

4. Доказательство критерия бесселевости. Необходимость. Пусть $G=(0,2\pi)$ и τ – произвольное действительное число. Введём множество индексов

$$I_\tau = \{k : |\operatorname{Re}\lambda_k-\tau|\leqslant 1,\quad |\operatorname{Im}\lambda_k|\leqslant C_0\},$$

где C_0 – постоянная из условия (3). Выберем положительные числа R^* и R такие, что $R\leqslant R^*$ и для любого множества $E\subset\overline{G}$, $\operatorname{mes}E\leqslant 2R^*$, выполняется неравенство

$$\omega(R) = \sup_{E\subset\overline{G}}\{\|\Omega\|_{1,E}\}\leqslant L^{-1},$$

где $\|\Omega\|_{1,E} = \int_E(\sum_{i=1}^{2m} |p_i(x)|)\,dx$, L – положительное число, выбор значения которого будет определён позже.

Пусть $k \in I_\tau$ и $x \in [0,\pi]$. Запишем формулу среднего значения (8) для точек x, $x+t$, $x+2t$ при $t \in [0,R]$:

$$\psi_k(x) = 2\psi_k(x+t)\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t - \psi_k(x+2t) +$$

$$+ B^{-1}\int\limits_x^{x+2t}\biggl\{\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x+t-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}} - \operatorname{sign}(\xi-x-t)\times$$

$$\times\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x+t-\xi|)I\biggr\}[\Omega(\xi)\psi_k(\xi)-\theta_k\psi_{k-1}(\xi)]\,d\xi.$$

Добавляя и вычитая $2\psi_k(x+t)\cos(\tau t/\sqrt{|b_1b_{m+1}|})$ в правой части этого равенства, проинтегрируем полученное соотношение по t от 0 до R и получим

$$\psi_k(x) = 2R^{-1}\int\limits_0^R\psi_k(x+t)\cos\frac{\tau}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt - R^{-1}\int\limits_0^R\psi_k(x+2t)\,dt +$$

$$+ 4R^{-1}\int\limits_0^R\psi_k(x+t)\sin\frac{\lambda_k+\tau}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\sin\frac{\tau-\lambda_k}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt +$$

$$+ R^{-1}B^{-1}\int\limits_0^R\int\limits_x^{x+2t}\biggl\{\sin\biggl(\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x+t-\xi|)\biggr)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}} -$$

$$-\operatorname{sign}(\xi-x-t)\cos\biggl(\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x+t-\xi|)\biggr)I\biggr\}[\Omega(\xi)\psi_k(\xi)-\theta_k\psi_{k-1}(\xi)]\,d\xi\,dt.$$

Применив формулу (6) в третьем слагаемом, будем иметь

$$\psi_k(x) = R^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\psi_k(t)\chi(t)\,dt +$$

$$+ 4R^{-1}\int\limits_0^R\biggl(\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}tI - \sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\biggr)\sin\frac{\lambda_k+\tau}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\times$$

$$\times\sin\frac{\tau-\lambda_k}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt\,\psi_k(x) + 4R^{-1}B^{-1}\int\limits_0^R\int\limits_x^{x+t}\biggl\{\biggl(\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|\xi-x|)\biggr)\times$$

$$\times\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}} - \biggl(\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|\xi-x|)I\biggr)\biggr\}[\Omega(\xi)\psi_k(\xi)-\theta_k\psi_{k-1}(\xi)]\,d\xi\times$$

$$\times\sin\frac{\tau+\lambda_k}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\sin\frac{\tau-\lambda_k}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt + R^{-1}B^{-1}\int\limits_0^R\int\limits_x^{x+2t}\biggl\{\biggl(\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x+t-\xi|)\biggr)\times$$

$$\times \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \left(\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t - |x+t-\xi|)\right) I \Bigg\} [\Omega(\xi)\psi_k(\xi) - \theta_k \psi_{k-1}(\xi)]\, d\xi\, dt =$$

$$= R^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \psi_k(t)\chi(t)\, dt + J_1 + J_2 + J_3, \qquad (24)$$

где $\chi(t) = 2\cos(\tau(x-t)/\sqrt{b_1 b_{m+1}}) - 1/2$ при $x \leqslant t \leqslant x+R$, $\chi(t) = -1/2$ при $x+R < t \leqslant x+2R$ и $\chi(t) = 0$ при $t \notin [x, x+2R]$.

Учитывая $k \in I_\tau$ и используя неравенства $|\sin z| \leqslant 2$, $|\cos z| \leqslant 2$ и $|\sin z| \leqslant 2|z|$ при $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant 1$, получаем для слагаемых J_1, J_2, J_3 оценки

$$|J_1| \leqslant 8Rm\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)|\tau - \lambda_k||\psi_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 8Rm\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)(1 + |\mathrm{Im}\,\lambda_k|)|\psi_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 8Rm\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)(1 + C_0)\|\psi_k\|_{\infty,2m},$$

$$|J_2| \leqslant 32m\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)\left(\omega(R)\|\psi_k\|_{\infty,2m} + \frac{R}{2}\|\theta_k\psi_{k-1}\|_{\infty,2m}\right),$$

$$|J_3| \leqslant 2m\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)(\omega(R)\|\psi_k\|_{\infty,2m} + R\|\theta_k\psi_{k-1}\|_{\infty,2m}),$$

с учётом которых в равенстве (24) приходим к неравенству

$$|\psi_k(x)| \leqslant R^{-1}\left|\int\limits_0^{2\pi} \psi_k(t)\chi(t)\, dt\right| + 8m\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)(R(1 + C_0) + 5\omega(R))\|\psi_k\|_{\infty,2m} +$$

$$+ 18Rm\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)\|\theta_k\psi_{k-1}\|_{\infty,2m}. \qquad (25)$$

Аналогично доказывается (25) в случае $x \in [\pi, 2\pi]$. При этом функция $\chi(t)$ определяется следующим образом: $\chi(t) = -1/2$ при $x - 2R \leqslant t < x - R$, $\chi(t) = 2\cos(\tau(x-t)/\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}) - 1/2$ при $x - R \leqslant t \leqslant x$, $\chi(t) = 0$ при $t \notin [x - 2R, x]$. Следовательно, неравенство (25) верно при любом $x \in [0, 2\pi]$.

Применив оценки (1) и (2), с учётом $1 + |\mathrm{Im}\,\lambda_k| \leqslant 1 + C_0$ из (25) получим

$$|\psi_k(x)| \leqslant R^{-1}\left|\int\limits_0^{2\pi} \psi_k(t)\chi(t)\, dt\right| + m\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right) \times$$

$$\times \{40\omega(R)C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1})(1 + C_0)^{1/2} + 8RC^2(G, n_k, b_1, b_{m+1})(1 + C_0)^{3/2} +$$

$$+ 18RC^1(G, n_k, b_1, b_{m+1})C^2(n_k, G, b_1, b_{m+1})\theta_k(1 + C_0)^{3/2}\}\|\psi_k\|_{2,2m}.$$

В силу равномерной ограниченности длин цепочек корневых вектор-функций выполняются неравенства

$$\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1}) \leqslant \gamma_1 = \mathrm{const},$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}+\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)C^1(G,n_k,b_1,b_{m+1})C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})\leqslant\gamma_2=\mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$|\psi_k(x)|\leqslant R^{-1}\left|\int\limits_0^{2\pi}\psi_k(t)\chi(t)\,dt\right|+\{40m\omega(R)\gamma_1(1+C_0)^{1/2}+$$

$$+8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2}+18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}\|\psi_k\|_{2,2m}.$$

Умножим обе части этого неравенства на $\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}$, возведём в квадрат и применим неравенство $|\sum_{j=1}^p a_j|^2\leqslant p\sum_{j=1}^p|a_j|^2$. В результате получим

$$|\psi_k(x)|^2\|\psi_k\|_{2,2m}^{-2}\leqslant(2m+1)R^{-2}\left\{\sum_{i=1}^{2m}\left|\int\limits_0^{2\pi}\psi_k^i(t)\chi(t)\,dt\right|^2\|\psi_k\|_{2,2m}^{-2}\right\}+$$

$$+(2m+1)\{40L^{-1}m\gamma_1(1+C_0)^{1/2}+8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2}+18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}^2,$$

где $\psi_k(t)=(\psi_k^1(t),\psi_k^2(t),\ldots,\psi_k^{2m}(t))^{\mathrm{т}}$.

Ввиду неравенства Бесселя для любого конечного множества $J\subset I_\tau$ выполняется соотношение

$$\sum_{k\in J}|\psi_k(x)|\|\psi_k\|_2^{-2}\leqslant 2m(2m+1)MR^{-2}\|\chi\|_{2m}^2+(2m+1)\{40L^{-1}m\gamma_1(1+C_0)^{1/2}+$$

$$+8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2}+18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}^2\sum_{k\in J}1. \tag{26}$$

Сначала учитываем здесь равенство $\|\chi\|_2^2=O(R)$, а затем выбираем число R настолько малым (соответственно и число L^{-1}), чтобы выполнялось условие

$$(2m+1)\{40L^{-1}m\gamma_1(1+C_0)^{1/2}+8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2}+18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}^2\leqslant\frac{1}{4\pi}.$$

Проинтегрировав неравенство (26), получим

$$\sum_{k\in J}1\leqslant\mathrm{const}R^{-1}=\mathrm{const}.$$

Отсюда, в силу произвольности множества $J\subset I_\tau$, следует (4). Необходимость неравенства (4) доказана.

Достаточность. Для определённости возьмём интервал $G=(0,2\pi)$. Записав формулу (6) для $\psi_k(x+t)$ при $x=0$ и умножив затем скалярно на вектор-функцию

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_{2m}(t))^{\mathrm{т}}\in L_2^{2m}(0,2\pi),$$

придём к выводу, что для выполнения неравенства Бесселя для системы

$$\varphi_k(t)=\psi_k(t)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1},\quad k\in\mathbb{N},$$

достаточно установить справедливость следующих неравенств:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}t\,dt\right|^2|\varphi_k^i(0)|^2\leqslant C\|f\|_{2,2m}^2,\quad i=\overline{1,2m}, \tag{27}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt\right|^2|\varphi_k^{2m+1-i}(0)|^2\leqslant C\|f\|_{2,2m}^2,\quad i=\overline{1,2m}, \tag{28}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int_0^t p_i(\xi)\varphi_k^i(\xi)\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\right|^2\leqslant C\|f\|_{2,2m}^2,\quad i=\overline{1,2m}, \tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int_0^t p_{2m+1-i}(\xi)\varphi_k^{2m+1-i}(\xi)\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\right|^2\leqslant C\|f\|_{2,2m}^2,\quad i=\overline{1,2m}, \tag{30}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\theta_k\int_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int_0^t \frac{\psi_{k-1}^i(\xi)}{\|\psi_k\|_{2,2m}}\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\right|^2\leqslant C\|f\|_{2,2m}^2,\quad i=\overline{1,2m}, \tag{31}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\theta_k\int_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int_0^t \frac{\psi_{k-1}^{2m+1-i}(\xi)}{\|\psi_k\|_{2,2m}}\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\right|^2\leqslant C\|f\|_{2,2m}^2,\quad i=\overline{1,2m}, \tag{32}$$

где $\varphi_k^i(\xi)=\psi_k^i(\xi)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}$.

Докажем оценку (27). В силу (2) и условий (3), (4)

$$|\varphi_k^i(0)|=|\psi_k^i(0)|\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\leqslant\|\psi_k\|_{\infty,2m}\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\leqslant C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})(1+C_0)^{1/2}\times$$

$$\times\|\psi_k\|_{2,2m}\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\leqslant C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})(1+C_0)^{1/2}\leqslant\mathrm{const},$$

так как последовательность $C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})$ ограничена. Поэтому для справедливости (27) достаточно выполнения неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt\right|^2\leqslant C\|f_i\|_2^2,\quad i=\overline{1,2m}. \tag{33}$$

При выполнении условий (3) и (4), $\tau\geqslant 1$, справедливость неравенства (33) установлена в работе [1]. Отсюда следует неравенство (33) при $\operatorname{Re}\lambda_k\in(-\infty,+\infty)$, $|\operatorname{Im}\lambda_k|\leqslant C_0$, так как по условию теоремы 2 выполняется условие (4) при любом $\tau\in(-\infty,+\infty)$. Точно также доказывается неравенство (28).

Убедимся в справедливости неравенства (29). Неравенство (30) доказывается аналогично. Обозначим

$$g_i(t,\xi)=\begin{cases}f_i(t+\xi), & 0\leqslant t\leqslant 2\pi-\xi,\\ 0, & 2\pi-\xi<t\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

где $\xi\in[0,2\pi]$, $i=\overline{1,2m}$. Тогда в силу оценки (2) и условий (3), (4) получим

$$J_k=\left|\int_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int_0^t p_i(\xi)\varphi_k^i(\xi)\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\right|^2=$$

$$=\int_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int_0^t p_i(\xi)\varphi_k^i(\xi)\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\int_0^{2\pi}f_i(t)\int_0^t\overline{p_i(\xi)\varphi_k^i(\xi)\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi}\,dt=$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} p_i(\xi)\varphi_k^i(\xi) \int\limits_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\,dt\,d\xi \int\limits_0^{2\pi} \overline{p_i(\tau)\varphi_k^i(\tau)} \int\limits_0^{2\pi} g_i(r,\tau) \overline{\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}} r\,dr\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p_i(\xi)\overline{p_i(\tau)}\varphi_k^i(\xi)\overline{\varphi_k^i(\tau)} \int\limits_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\,dt \,\times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi} g_i(r,\tau) \overline{\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}} r\,dr\,d\xi\,d\tau \leqslant [C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})]^2(1+C_0)\,\times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |p_i(\xi)||p_i(\tau)| \left| \int\limits_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\,dt \right| \left| \int\limits_0^{2\pi} g_i(r,t) \overline{\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}} r\,dr \right| d\xi\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |p_i(\xi)||p_i(\tau)| \left| \int\limits_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\,dt \right| \left| \int\limits_0^{2\pi} \overline{g_i(r,\tau)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r\,dr \right| d\xi\,d\tau,$$

где $i=\overline{1,2m}$. Отсюда для произвольного натурального числа N имеем

$$\sum_{k=1}^{N} J_k \leqslant \mathrm{const} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |p_i(\xi)||p_i(\tau)| \,\times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{N} \left| \int\limits_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\,dt \right| \left| \int\limits_0^{2\pi} \overline{g_i(r,\tau)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r\,dr \right| \right) d\xi\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |p_i(\xi)||p_i(\tau)| \|g_i(\,\cdot\,,\xi)\|_2 \|g_i(\,\cdot\,,\tau)\|_2\,d\xi\,d\tau, \quad i=\overline{1,2m}.$$

Учитывая, что для любого фиксированного $\xi\in[0,2\pi]$ имеет место неравенство $\|g_i(\,\cdot\,,\xi)\|_2 \leqslant$ $\leqslant |f_i\|_2$, получаем

$$\sum_{k=1}^{N} J_k \leqslant \mathrm{const}\|p_i\|_1^2 \|f_i\|_2^2 \leqslant \mathrm{const}\|f\|_{2,2m}^2, \quad i=\overline{1,2m}.$$

Отсюда, в силу произвольности числа N, следует справедливость неравенства (28).

Теперь докажем неравенство (31). В силу оценок (1), (2) и условий (3), (4)

$$\theta_k|\psi_{k-1}^i(\xi)|\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1} \leqslant \theta_k C^1(G,n_k,b_1,b_{m+1}) C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})(1+C_0)^{3/2} \|\psi_k\|_{2,2m} \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1} =$$

$$= \theta_k C^1(G,n_k,b_1,b_{m+1}) C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})(1+C_0)^{3/2} \leqslant C = \mathrm{const}, \quad i=\overline{1,2m}.$$

После изменения порядка интегрирования левые части неравенства (31) мажорируются рядом

$$C\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\,dt \right|^2 d\xi.$$

Этот ряд сходится в силу бесселевости системы $\{\sin(\lambda_k t/\sqrt{|b_1 b_{m+1|}})\}_{k=1}^{\infty}$, и его сумма ограничена сверху величиной $\text{const}\|f\|_{2,2m}^2$. Неравенство (31) доказано. Неравенство (32) устанавливается аналогично. Теорема 2 доказана.

Теоремы 3 и 4 доказываются аналогично соответствующим теоремам в статьях [15, 20].

Автор выражает глубокую благодарность проф. В.М. Курбанову за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединённых функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1048–1053.
2. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 5. С. 771–794.
3. *Будаев В.Д.* Критерии бесселевости и базисности Рисса систем корневых функций дифференциальных операторов. I // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2033–2044.
4. *Ломов И.С.* Оценки собственных и присоединённых функций обыкновенных дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 903–906.
5. *Керимов Н.Б.* Некоторые свойства собственных и присоединённых функций обыкновенных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1986. Т. 201. № 5. С. 1054–1056.
6. *Курбанов В.М.* О распределении собственных значений и критерий бесселевости корневых функций дифференциального оператора. I //Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 4. С. 464–478.
7. *Крицков Л.В.* Равномерная оценка порядка присоединённых функций и распределение собственных значений одномерного оператора Шрёдингера // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 7. С. 1121–1129.
8. *Тихомиров В.В.* Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шрёдингера со спектральным параметром // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 807–810.
9. *Будаев В.Д.* Критерии бесселевости и базисности Рисса систем корневых функций дифференциальных операторов. II //Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 23–33.
10. *Ломов И.С.* Неравенство Бесселя, теорема Рисса и безусловная базисность для корневых векторов обыкновенных дифференциальных операторов // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 5. С. 42–52.
11. *Керимов Н.Б.* О безусловной базисности системы собственных и присоединённых функций дифференциального оператора четвёртого порядка // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 4. С. 803–806.
12. *Курбанов В.М.* О распределении собственных значений и критерий бесселевости корневых функций дифференциального оператора. II // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 623–631.
13. *Kritskov L.V., Sersenbi A.M.* Basicity in of root functions for differential equations with involution // Electron J. Differ. Equat. 2015. V. 278. P. 1–9.
14. *Курбанов В.М.* О бесселевости и безусловной базисности систем корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 12. С. 1608–1617.
15. *Курбанов В.М., Гаджиева Г.Р.* Неравенство Бесселя и базисность для $2m \times 2m$ системы типа Дирака с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 584–594.
16. *Курбанов В.М., Исмайлова А.И.* Покомпонентная равномерная равносходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака с тригонометрическим разложением // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 648–662.
17. *Курбанов В.М., Исмайлова А.И.* Абсолютная и равномерная сходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака // Докл. РАН. 2012. Т. 446. № 4. С. 380–383.
18. *Курбанов В.М., Исмайлова А.И.* Неравенство Рисса для систем корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 334–340.
19. *Курбанов В.М., Исмайлова А.И.* Двусторонние оценки для корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 487–497.
20. *Kurbanov V.M., Abdullayeva A.M.* Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient // Operators and Matrices. 2018. V. 12. № 4. P. 943–954.
21. *Хасси С., Оридорога Л.Л.* Полнота и базисность Рисса ССПФ операторов Дирака с граничными условиями, зависящими от спектрального параметра // Мат. заметки. 2006. Т. 79. Вып. 4. С. 636–640.

22. *Лунев А.А., Маламуд М.М.* О базисном свойстве системы корневых векторов Рисса для системы типа 2×2 Дирака // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 3. Р. 255–260.
23. *Lunyov A.A., Malamud M.M.* On the Riesz basis property of the root vector system for Dirac-type systems // J. Math. Anal. and Appl. 2016. V. 441. № 1. P. 57–103.
24. *Lunyov A.A., Malamud M.M.* On the completeness and Riesz basis property of root supspaces of boundary value problems for first order systems and applications // J. Spectr. Theory. 2015. V. 5. P. 17–70.
25. *Лунев А.А., Маламуд М.М.* О характеристических определителях граничных задач для системы типа Дирака // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2022. Т. 516. С. 69–120.
26. *Savchuk A.M., Shkalikov A.A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. V. 96. № 5. P. 777–810.
27. *Савчук А.М., Садовничая И.В.* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Соврем. математика. Фундам. направления. 2015. Т. 58. С. 128–152.
28. *Trooshin I., Yamamota M.* Riesz basis of root vector of a nonsymmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems // Appl. Anal. 2001. V. 80. № 1–2. P. 19–51.
29. *Djakov P., Mityagin B.* Criteria for existence of Riesz bazis consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators // J. Funct. Anal. 2012. V. 263. P. 2300–2332.
30. *Djakov P., Mityagin B.* Unconditional convergense of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions // Indiana Univ. Math. J. 2012. V. 61. № 1. P. 359–398.
31. *Mykytnyk Ya.V., Puyda D.V.* Bari–Markus property of Dirac operators // Matematychni Studii. 2013. V. 40. № 2. P. 165–171.

Азербайджанский государственный
педагогический университет, г. Баку

Поступила в редакцию 24.05.2023 г.
После доработки 22.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.