ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1318–1334

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+517.929

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2023 г. Р. И. Кадиев

Исследованы вопросы моментной устойчивости решений по части переменных относительно начальных данных для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последействием модифицированным методом регуляризации, основанным на выборе вспомогательного уравнения и применении теории неотрицательно обратимых матриц. Для упомянутых систем получены достаточные условия устойчивости в терминах неотрицательной обратимости матриц, построенных по параметрам этих систем. Проверена выполнимость этих условий для конкретных классов систем линейных уравнений Ито с последействием.

DOI: 10.31857/S0374064123100023, EDN: OOKKIZ

Введение. Стохастические дифференциальные уравнения описывают многие реальные практически важные процессы современной физики, биологии, иммунологии, экономики, кибернетики и т.д. Изучение таких процессов привело к необходимости исследований вопросов устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений, т.е. к созданию соответствующего направления в теории устойчивости.

Математические модели многих реальных процессов, учитывающие состояния не только в текущий, но и в предшествующие моменты времени, описывают развитие процессов более точно. В этом случае поведение процесса, подверженного случайным воздействиям, описывается стохастическими дифференциальными уравнениями с последействием. Примеры показывают, что поведение решений уравнений без учёта запаздывания, даже при малой его величине, может существенно отличаться от поведения решений тех же уравнений с запаздывающим аргументом. Это обстоятельство подчёркивает необходимость и принципиальную важность изучения уравнений с запаздываниями.

Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных математиков. Достаточно полный их список приведён в монографиях [1–4]. Исследования устойчивости в этих и многих других работах проводятся методом функционалов Ляпунова–Красовского–Разумихина. Этот метод предполагает существование подходящей функции Ляпунова (функционала Ляпунова–Красовского), которая обеспечивает желаемое свойство устойчивости (асимптотического поведения) решений исследуемых уравнений. Однако, как отмечается в монографии [5], применение этого метода для функционально-дифференциальных уравнений, частным случаем которых являются дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, во многих случаях встречает серьёзные трудности. В теории устойчивости решений для детерминированных функционально-дифференциальных уравнений широкое применение и высокую эффективность показал метод регуляризации, основанный на выборе вспомогательных или "модельных" уравнений – "W-метод" Н.В. Азбелева [5].

Исследованиям проблем устойчивости по части переменных решений для детерминированных динамических систем и их приложениям посвящено много работ, обширный перечень которых можно найти в [6]. В статьях [7–10] методом вспомогательных или "модельных" уравнений исследованы вопросы устойчивости по части переменных для стохастических функционально-дифференциальных уравнений. В работах [11, 12] исследованы вопросы частичной устойчивости нелинейных стохастических систем методом функций Ляпунова. Главной целью настоящего исследования является развитие метода вспомогательных уравнений на основе теории неотрицательно обратимых матриц и покомпонентных оценок решений применительно к исследованию вопросов моментной устойчивости решений по части переменных для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последействием относительно начальных данных. Этот подход ранее показал свою эффективность при исследовании вопросов устойчивости решений для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последействием [13, 14] и, как будет показано в статье, позволяет получить новые конструктивные результаты устойчивости решений по части переменных относительно начальных данных для детерминированных и стохастических систем с запаздыванием и без него.

1. Постановка задачи исследования. Будем использовать следующие обозначения: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, P)$ – стохастический базис, здесь Ω – множество элементарных событий, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра событий на Ω, $(\mathcal{F})_{t\geqslant 0}$ – непрерывный справа неубывающий поток σ-подалгебр алгебры $\mathcal{F}$, P – вероятностная мера на $\mathcal{F}$ (все σ-алгебры являются полными относительно этой меры); k^n – линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин; $\mathcal{B}_i$, $i=\overline{2,m}$, – скалярные независимые стандартные винеровские процессы; E – символ математического ожидания; $\bar{E}$ – единичная $k\times k$-матрица; $|\cdot|$ – норма в $\mathbb{R}^n$; $\|\cdot\|$ – норма $k\times n$-матрицы, согласованная с нормой в $\mathbb{R}^n$; μ – мера Лебега на $[0,\infty)$.

В статье используются следующие константы: $n\in\mathbb{N}$ – размерность фазового пространства уравнения, т.е. размер вектора решения уравнения; p – фиксированная вещественная константа, $1\leqslant p<\infty$; q – фиксированная вещественная константа, $1\leqslant q<\infty$; l – фиксированное натуральное число такое, что $1\leqslant l<n$.

Исследуем вопросы моментной устойчивости решений по части переменным для системы линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями вида

$$dx(t) = -\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t))\,dt + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))\,d\mathcal{B}_i(t), \quad t\geqslant 0, \tag{1}$$

относительно начальных данных

$$x(t)=\varphi(t), \quad t<0, \tag{1a}$$

$$x(0)=\upsilon, \tag{1b}$$

где:

1) $x=\operatorname{col}(x^1,\ldots,x^n)$ – n-мерный неизвестный случайный процесс;

2) $A_{ij}=(a_{sl}^{ij})_{s,l=1}^n$ – $n\times n$-матрица при $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, элементами матриц A_{1j}, $j=\overline{1,m_1}$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых почти наверно (п.н.) локально суммируемы, а элементами матриц A_{ij}, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п.н. локально суммируемы с квадратом;

3) h_{ij} – измеримая по Борелю функция, заданная на множестве $[0,\infty)$, такая, что $h_{ij}(t)\leqslant t$, $t\in[0,\infty)$, μ-почти всюду при $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m_i}$;

4) $\varphi=\operatorname{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ – $\mathcal{F}_0$-измеримый n-мерный случайный процесс, заданный на полуоси $(-\infty,0)$;

5) $\upsilon=\operatorname{col}(\upsilon_1,..,\upsilon_n)$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая n-мерная случайная величина, т.е. $\upsilon\in k^n$.

Определение 1. Под *решением системы* (1), удовлетворяющим начальным условиям (1a) и (1b), понимается случайный процесс

$$x(t)=\operatorname{col}(x^1(t),\ldots,x^n(t)), \quad t\in(-\infty,\infty),$$

прогрессивно измеримый при $t\geqslant 0$, удовлетворяющий условиям $x(\varsigma)=\varphi(\varsigma)$, $\varsigma<0$, $x(0)=\upsilon$ и системе

$$x(t)=\upsilon-\sum_{j=1}^{m_1}\int_0^t A_{1j}(\varsigma)x(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\int_0^t A_{ij}(\varsigma)x(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma), \quad t\geqslant 0,$$

P-почти всюду, где первый интеграл – интеграл Лебега, а второй – интеграл Ито.

Систему (1) с условиями (1a) и (1b) называют *начальной задачей*, а условия (1a), (1b) – *начальными условиями.* Если $h_{ij}(t) = t, \ t \geqslant 0,$ μ-почти всюду при $i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, m_i},$ то условие (1a) лишнее. В этом случае (1), (1b) называют *задачей Коши* для системы линейных дифференциальных уравнений Ито.

Пусть в дальнейшем D^n – линейное пространство n-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0, \infty),$ траектории которых п.н. непрерывны; L^n – линейное пространство n-мерных случайных процессов на $(-\infty, 0),$ которые не зависят от винеровских процессов $\mathcal{B}_i, \ i = \overline{2, m},$ и имеют п.н. ограниченные в существенном траектории; $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ – положительная непрерывная функция.

Отметим, что при сделанных предположениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение [15]. Обозначим через $x(t, \upsilon, \varphi), \ t \in (-\infty, \infty),$ решение системы (1), удовлетворяющее условиям (1a) и (1b), т.е. $x(t, \upsilon, \varphi) = \varphi(t)$ при $t < 0$ и $x(0, \upsilon, \varphi) = \upsilon.$ Очевидно, что при $t \geqslant 0$ имеем $x(\cdot, \upsilon, \varphi) \in D^n.$ Заметим также, что при нулевых начальных условиях (1a), (1b) задача (1), (1a), (1b) имеет только тривиальное решение.

Для любого $x = \operatorname{col}(x^1, \ldots, x^n)$ введём обозначения

$$y = \operatorname{col}(x^1, \ldots, x^l) \quad \text{и} \quad \xi = \operatorname{col}(x^{l+1}, \ldots, x^n).$$

Введём также обозначения для следующих линейных нормированных подпространств пространств $D^l, \ k^n, \ L^n$:

$$M_q^\gamma = \{x : x \in D^l, \ \ \|x\|_{M_q^\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \geqslant 0} (E|\gamma(t) x(t)|^q)^{1/q} < \infty\}, \quad M_q^1 = M_q;$$

$$k_q^n = \{\alpha : \alpha \in k^n, \ \ \|\alpha\|_{k_q^n} \stackrel{\text{def}}{=} (E|\alpha|^q)^{1/q} < \infty\};$$

$$L_q^n = \{\varphi : \varphi \in L^n, \ \ \|\varphi\|_{L_q^n} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{vrai} \sup_{\varsigma < 0} (E|\varphi(\varsigma)|^q)^{1/q} < \infty\}.$$

Определение 2. Тривиальное решение $x(t, 0, 0) \equiv 0$ системы (1) (или систему (1)) назовём:

– *q-устойчивым* относительно первых l компонент, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0,$ что при любых $\upsilon \in k_q^n, \ \varphi \in L_q^n$ и $\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство

$$(E|y(t, \upsilon, \varphi)|^q)^{1/q} \leqslant \varepsilon, \quad t \geqslant 0;$$

– *асимптотически q-устойчивым* относительно первых l компонент, если оно q-устойчиво и, кроме того, для любых $\upsilon \in k_q^n, \ \varphi \in L_q^n$ и $\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta(\varepsilon)$ будет

$$\lim_{t \to +\infty} (E|y(t, \upsilon, \varphi)|^q)^{1/q} = 0;$$

– *экспоненциально q-устойчивым* относительно первых l компонент, если существуют некоторые положительные числа $\bar{c}, \ \beta$ такие, что для любых $\upsilon \in k_q^n, \ \varphi \in L_q^n$ справедливо неравенство

$$(E|y(t, \upsilon, \varphi)|^q)^{1/q} \leqslant \bar{c}(\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}) \exp\{-\beta t\}, \quad t \geqslant 0.$$

Следующее определение объединяет все виды устойчивости из определения 2.

Определение 3. Систему (1) назовём *$M_q^\gamma y$-устойчивой*, если для любых $\upsilon \in k_q^n, \ \varphi \in L_q^n$ для решения задачи (1), (1a), (1b) $x(t, \upsilon, \varphi), \ t \in (-\infty, +\infty),$ выполняются соотношение $y(\cdot, \upsilon, \varphi)|_{[0,\infty)} \in M_q^\gamma$ и неравенство

$$\|y(\cdot, \upsilon, \varphi)|_{[0,\infty)}\|_{M_q^\gamma} \leqslant \bar{c}(\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}) \tag{2}$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}.$

Очевидно, что:

– из $M_q y$-устойчивости системы (1) следует q-устойчивость этой же системы относительно первых l компонент;

– из $M_q^\gamma y$-устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) \geqslant \delta > 0$, $t \geqslant 0$, и $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty$) следует асимптотическая q-устойчивость этой же системы относительно первых l компонент;

– из $M_q^\gamma y$-устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, β – некоторое положительное число) следует экспоненциальная q-устойчивость этой же системы относительно первых l компонент.

Для установления $M_q^\gamma y$-устойчивости системы (1) необходимо проверить принадлежность вектора $y(\cdot, \upsilon, \varphi)|_{[0,\infty)}$, составленного из первых l компонент решения задачи (1), (1a), (1b) $x(t, \upsilon, \varphi)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, пространству M_q^γ при любых $\upsilon \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и выполнимость для него неравенства (2). Для этого будет использована модификация метода вспомогательных или модельных уравнений, известная также как W-метод [5], основанный на теории положительно обратимых матриц и покомпонентных оценках решений.

2. Метод исследования. Как было отмечено ранее, устойчивость системы (1) относительно первых l компонент будем проверять преобразованием этой системы с помощью вспомогательной (модельной) системы в другую, более простую систему, для которой условия, обеспечивающие устойчивость системы (1) относительно первых l компонент, можно проверить непосредственно.

В дальнейшем будем пользоваться следующим представлением для решения задачи (1), (1a), (1b): $x(t) = \bar{x}(t) + \bar{\varphi}(t)$, где $\bar{x}(t)$ – неизвестный n-мерный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{x}(t) = 0$ при $t < 0$ и $\bar{x}(t) = x(t)$ при $t \geqslant 0$, а $\bar{\varphi}(t)$ – известный n-мерный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$ при $t < 0$ и $\bar{\varphi}(t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Тогда задача (1), (1a), (1b) эквивалентна следующей задаче:

$$d\bar{x}(t) = ((V\bar{x})(t) + f(t))\, dZ(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\bar{x}(0) = \upsilon, \tag{3b}$$

где

$$(V\bar{x})(t) = \left(-\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)\bar{x}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2} A_{2j}(t)\bar{x}(h_{2j}(t)), \ldots, \sum_{j=1}^{m_m} A_{mj}(t)\bar{x}(h_{mj}(t))\right),$$

$$f(t) = \left(-\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)\bar{\varphi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2} A_{2j}(t)\bar{\varphi}(h_{2j}(t)), \ldots, \sum_{j=1}^{m_m} A_{mj}(t)\bar{\varphi}(h_{mj}(t))\right),$$

$$Z(t) = \mathrm{col}\,(t, \mathcal{B}_2(t), \ldots, \mathcal{B}_m(t)).$$

Замечание 1. Аналог уравнения (3) в детерминированном случае является частным случаем функционально-дифференциального уравнения (см. [5]), которое записывается с использованием линейных операторов внутренней суперпозиции.

Решение задачи (3), (3b) обозначим через $\bar{x}(t, \upsilon, \varphi)$. Очевидно, что при $t \geqslant 0$ имеем $x(t, \upsilon, \varphi) = \bar{x}(t, b, \varphi)$.

Пусть:

– $I^n(Z)$ – линейное пространство $n \times m$-матриц на $[0, +\infty)$, строки которых – m-мерные прогрессивно измеримые случайные процессы, локально интегрируемые по Z;

– $\bar{D}^n$ – линейное пространство n-мерных случайных процессов на $(-\infty, +\infty)$, равных нулю при $t < 0$, прогрессивно измеримых при $t \geqslant 0$ и имеющих п.н. непрерывные траектории на $[0, \infty)$;

– $\bar{M}_q^\gamma = \{x : x \in \bar{D}^l,\ \|x\|_{\bar{M}_q^\gamma} \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{t\in(-\infty,\infty)} (E|\gamma(t)x(t)|^q)^{1/q} < \infty\}$, $\bar{M}_q^1 = \bar{M}_q$.

Очевидно, что для уравнения (3) V – линейный оператор, действующий из пространства $\bar{D}^n$ в пространство $I^n(Z)$ и $f \in I^n(Z)$.

Справедлива следующая

Лемма. *При любых* $\upsilon \in k^n$, $\varphi \in L^n$ *для решения* $\bar{x}(t,\upsilon,\varphi)$ *задачи (3), (3b) имеет место представление*

$$\bar{x}(t,\upsilon,\varphi) = X(t)\upsilon + (\hat{C}f)(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

где $X(t)$ – $n\times n$*-матрица, столбцами которой являются решения однородного уравнения (3) (т.е. в случае* $f \equiv 0$*) (фундаментальная матрица),* $X(0) = \bar{E}$, *а* $\hat{C} : I^n(Z) \to D^n$ – *линейный оператор (оператор Коши) такой, что* $\hat{C}f$ – *решение уравнения (3), удовлетворяющее условию* $(\hat{C}f)(0) = 0$.

Справедливость леммы следует из аналогичного утверждения для более общего уравнения, доказанного в работе [16].

Замечание 2. Формула (4) имеет место для решения задачи (3), (3b) и в случае любой функции $f \in I^n(Z)$. Кроме того, из леммы также следует, что при любых $\upsilon \in k^n$, $\varphi \in L^n$ для решения $x(t,\upsilon,\varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) при $t \geqslant 0$ имеет место представление (4), где f определена в уравнении (3).

Представление (4) является центральным результатом в теории устойчивости решений уравнения (1). В силу этого представления асимптотические свойства решений системы (1), в том числе и компонент решений системы (1), определяются фундаментальной матрицей и оператором Коши для уравнения (3).

В дальнейшем если B – $n\times n$-матрица, то B^1 – $l\times l$-матрица, полученная из матрицы B зачёркиванием $n-l$ последних столбцов и строк, B^2 – $l\times(n-l)$-матрица, полученная из B зачёркиванием l первых столбцов и $n-l$ последних строк, B^3 – $(n-l)\times l$-матрица, полученная из матрицы B зачёркиванием первых l строк и $n-l$ последних столбцов, B^4 – $(n-l)\times(n-l)$-матрица, полученная из B зачёркиванием l первых строк и столбцов, B^5 – $l\times n$-матрица, полученная из B зачёркиванием $n-l$ последних строк, B^6 – $(n-l)\times n$-матрица, полученная из матрицы B зачёркиванием l первых строк. Тогда с учётом этих обозначений и так как $\bar{x} = \operatorname{col}(\bar{y},\bar{\xi})$, в силу введённых ранее обозначений, уравнение (3) можно записать в виде следующей системы:

$$d\bar{y}(t) = [(V_1\bar{y})(t)+(V_2\bar{\xi})(t)+f^y(t)]\,dZ(t), \quad d\bar{\xi}(t) = [(V_3\bar{y})(t)+(V_4\bar{\xi})(t)+f^{\xi}(t)]\,dZ(t), \quad t \geqslant 0, \tag{5}$$

где

$$(V_i\bar{y})(t) = \biggl(-\sum_{j=1}^{m_1}(A_{1j}(t))^i\bar{y}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2}(A_{2j}(t))^i\bar{y}(h_{2j}(t)), \ldots, \sum_{j=1}^{m_m}(A_{mj}(t))^i\bar{y}(h_{mj}(t))\biggr), \quad i=1,3,$$

$$(V_i\bar{\xi})(t) = \biggl(-\sum_{j=1}^{m_1}(A_{1j}(t))^i\bar{\xi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2}(A_{2j}(t)^i)\bar{\xi}(h_{2j}(t)), \ldots, \sum_{j=1}^{m_m}(A_{mj}(t))^i\bar{\xi}(h_{mj}(t))\biggr), \quad i=2,4,$$

$$f^y(t)(t) = \biggl(-\sum_{j=1}^{m_1}(A_{1j}(t))^5\bar{\varphi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2}(A_{2j}(t))^5\bar{\varphi}(h_{2j}(t)), \ldots, \sum_{j=1}^{m_m}(A_{mj}(t))^5\bar{\varphi}(h_{mj}(t))\biggr),$$

$$f^{\xi}(t)(t) = \biggl(-\sum_{j=1}^{m_1}(A_{1j}(t))^6\bar{\varphi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2}(A_{2j}(t))^6\bar{\varphi}(h_{2j}(t)), \ldots, \sum_{j=1}^{m_m}(A_{mj}(t))^6\bar{\varphi}(h_{mj}(t))\biggr).$$

В дальнейшем если $\zeta(t)$ – случайный процесс на промежутке $[0,\infty)$, то $\bar{\zeta}(t)$ также является случайным процессом на $(-\infty,\infty)$, значения которого совпадают с значениями процесса $\zeta(t)$ на $[0,\infty)$ и с нулём на $(-\infty,0)$.

Как как через любое $\bar{x}(0) \in k^n$ проходит единственное решение уравнения (3), каждое из уравнений системы (5) в отдельности будет иметь единственное решение при любых фиксированных $\bar{y}(0)$, $\bar{\xi}$ и $\bar{\xi}(0)$, $\bar{y}$ соответственно. Тогда в силу леммы второе уравнение системы (5) эквивалентно уравнению

$$\bar{\xi}(t) = H(t)\bar{\xi}(0) + (C_1(f^{\xi} + V_3\bar{y}))(t), \quad t \geqslant 0,$$

где H – фундаментальная матрица, а C_1 – оператор Коши для второго уравнения системы (5).

Следовательно, из первого уравнения системы (5) получим

$$d\bar{y}(t) = [(V_5\bar{y})(t) + (V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (V_2\bar{C}_1 f^{\xi})(t) + f^y(t)]\,dZ(t), \quad t \geqslant 0, \tag{6}$$

где $(V_5\bar{y})(t) = (V_1\bar{y})(t) + (V_2\bar{C}_1V_3\bar{y})(t)$.

Отсюда следует, что система (1) $M_q^\gamma y$-устойчива тогда и только тогда, когда при любых $\bar{x}(0) = \upsilon \in k_q^n$ и $\varphi \in L_q^n$ для решения $\bar{y}(t,\upsilon,\varphi)$ уравнения (6) выполняются соотношение $\bar{y}(\cdot,\upsilon,\varphi) \in \bar{M}_q^\gamma$ и неравенство

$$\|\bar{y}(\cdot,\upsilon,\varphi)\|_{\bar{M}_q^\gamma} \leqslant \bar{c}(\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}) \tag{7}$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}$.

Для установления отмеченных фактов воспользуемся W-преобразованием, т.е. эквивалентным преобразованием уравнения (6). Для описания W-преобразования уравнения (6) рассмотрим модельное уравнение, асимптотические свойства решений которого известны. Пусть модельное уравнение имеет вид

$$d\bar{y}(t) = [(Q\bar{y})(t) + g(t)]\,dZ(t), \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

где $Q : \bar{D}^l \to I^l(Z)$ – линейный оператор, Z определён ранее, $g \in I^l(Z)$. Предполагается, что через любое значение $\bar{y}(0) \in k^l$ проходит единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение $\bar{y}$ уравнения (8). Тогда, в силу леммы, для решения $\bar{y}$ этого уравнения имеет место представление

$$\bar{y}(t) = U(t)\bar{y}(0) + (Wg)(t), \quad t \geqslant 0,$$

где U – фундаментальная матрица, W – оператор Коши для уравнения (8).

Уравнение (6) при помощью модельного уравнения (8) запишем в виде

$$d\bar{y}(t) = [(Q\bar{y})(t) + ((V_5 - Q)\bar{y})(t) + (V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (V_2\bar{C}_1 f^{\xi})(t) + f^y(t)]\,dZ(t), \quad t \geqslant 0,$$

или

$$\bar{y}(t) = U(t)\bar{y}(0) + (W(V_5 - Q)\bar{y})(t) + (WV_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (W(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y))(t), \quad t \geqslant 0.$$

Обозначив $W(V_5 - Q) = \Theta$, получим

$$((I - \Theta)\bar{y})(t) = U(t)\bar{y}(0) + (WV_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (W(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y))(t), \quad t \geqslant 0.$$

Теорема 1. *Пусть* $\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y) \in \bar{M}_q^\gamma$ *для любых* $\bar{x}(0) \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ *и выполняется неравенство*

$$\|\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y)\|_{\bar{M}_q^\gamma} \leqslant \bar{c}(\|\bar{x}(0)\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n})$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}$, *а оператор* Θ *действует в пространстве* $\bar{M}_q^\gamma$. *Тогда если оператор* $(I - \Theta) : \bar{M}_q^\gamma \to \bar{M}_q^\gamma$ *непрерывно обратим, то система (1)* $M_q^\gamma y$*-устойчива.*

Доказательство. Ввиду непрерывной обратимости оператора $(I - \Theta) : \bar{M}_q^\gamma \to \bar{M}_q^\gamma$ уравнение $(I - \Theta)\bar{y} = g$, где $g \in \bar{M}_q^\gamma$, имеет единственное решение из $\bar{M}_q^\gamma$, т.е. $\bar{y} = (I - \Theta)^{-1}g \in \bar{M}_q^\gamma$ и $\|\bar{y}\|_{\bar{M}_q^\gamma} \leqslant \|(I - \Theta)^{-1}\|_{\bar{M}_q^\gamma}\|g\|_{\bar{M}_q^\gamma}$. Отсюда и из условий теоремы получим, что

$$(I - \Theta)^{-1}(\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y)) \in \bar{M}_q^\gamma$$

для любых $\bar{x}(0) \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и справедливо неравенство

$$\|(I - \Theta)^{-1}(\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y))\|_{\bar{M}_q^\gamma} \leqslant \bar{c}(\|\bar{x}(0)\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n})$$

для некоторого положительного числа $\bar c$. Но, с другой стороны,

$$\bar y(\cdot,\bar x(0),\varphi)=(I-\Theta)^{-1}(\bar U\bar y(0)+\bar W V_2(\bar H\bar\xi(0)))+\bar W(V_2\bar C_1 f^\xi+f^y).$$

Следовательно, $\bar y(\cdot,\bar x(0),\varphi)\in\bar M_q^\gamma$ для любых $\bar x(0)\in k_q^n$, $\varphi\in L_q^n$ и для него выполнено неравенство (7), а это и означает $M_q^\gamma y$-устойчивость системы (1). Теорема доказана.

Теорему 1 можно использовать для получения достаточных условий устойчивости системы (1) по части переменных в терминах параметров этой системы, как это делается в классической версии W-метода [7–10]. Однако, как показано в статьях [13, 14], такие условия получаются более точными, если использовать покомпонентные оценки решений. Поэтому ниже предлагается улучшенный метод регуляризации для исследования вопросов устойчивости по части переменных для системы (1).

Определение 4. Обратимая матрица $\Phi=(\phi_{ij})_{i,j=1}^m$ называется *неотрицательно обратимой*, если все элементы матрицы Φ^{-1} неотрицательны.

Согласно [17, с. 338] матрица Φ неотрицательно обратима, если $\phi_{ij}\leqslant 0$ при $i,j=\overline{1,m}$, $i\neq j$, и выполнено одно из следующих условий:

– все диагональные миноры матрицы Φ положительны;

– существуют $\varsigma_i>0$, $i=\overline{1,m}$, такие, что

$$\varsigma_i\phi_{ii}>\sum_{j=1}^m\varsigma_j|\phi_{ij}|,\quad i=\overline{1,m};$$

– существуют $\varsigma_i>0$, $i=\overline{1,m}$, такие, что

$$\varsigma_j\phi_{jj}>\sum_{i=1}^m\varsigma_i|\phi_{ij}|,\quad j=\overline{1,m}.$$

В частности, если положить $\varsigma_i=1$, $i=\overline{1,m}$, то мы получим класс матриц со строгим диагональным преобладанием и неположительными внедиагональными элементами.

Для случайного процесса $\bar y(t)=\operatorname{col}(\bar y^1(t),\ldots,\bar y^l(t))$ введём обозначение

$$\bar y^\gamma(q)=\operatorname{col}(\bar y^{1\gamma}(q),\ldots,\bar y^{l\gamma}(q)),$$

где $\bar y^{i\gamma}(q)=\sup\limits_{t\geqslant 0}(E|\gamma(t)\bar y^i(t)|^q)^{1/q}$ при $i=\overline{1,l}$.

Пусть при некоторых $1\leqslant q<\infty$ и положительной непрерывной функции $\gamma:[0,\infty)\to\to\mathbb{R}^1$ для решения $\bar y(t,\upsilon,\varphi)=\bar y(t)$ системы (6) нам удалось получить матричное неравенство следующего вида:

$$\bar E\bar y^\gamma(q)\leqslant C\bar y^\gamma(q)+\bar c\|\upsilon\|_{k_q^n}+\hat c\|\varphi\|_{L_q^n},\tag{9}$$

где C – некоторая неотрицательная матрица размерности $l\times l$, а $\bar c$ и $\hat c$ – некоторые l-мерные вектор-столбцы, элементы которых неотрицательные числа. Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть в матричном неравенстве (9) матрица $\bar E-C$ является неотрицательно обратимой. Тогда система (1) $M_q^\gamma y$-устойчива.*

Доказательство. Пользуясь неотрицательной обратимостью матрицы $\bar E-C$, запишем неравенство (9) в следующем виде:

$$\bar E\bar y^\gamma(q)\leqslant(\bar E-C)^{-1}(\bar c\|\upsilon\|_{k_q^n}+\hat c\|\varphi\|_{L_q^n}),$$

откуда получим

$$|\bar y^\gamma(q)|\leqslant c(\|\upsilon\|_{k_q^n}+\|\varphi\|_{L_q^n}),\tag{10}$$

где $c=\|(\bar E-C)^{-1}\|\max\{|\bar c|,|\hat c|\}$. Поскольку $\bar y(t,\upsilon,\varphi)=\bar y(t)$ при $t\geqslant 0$ и $\|\bar y(\cdot,\upsilon,\varphi)\|_{\bar M_q^\gamma}\leqslant\leqslant|\bar y^\gamma(q)|$, то из неравенства (10) следует, что при любых $\upsilon\in k_q^n$, $\varphi\in L_q^n$ для решений $\bar y(t,\upsilon,\varphi)$ $(t\in(-\infty,\infty))$ задачи (3), (3b) выполняются соотношение $\bar y(\cdot,\upsilon,\varphi)\in\bar M_q^\gamma$ и неравенство

$$\|\bar y(\cdot,\upsilon,\varphi)\|_{\bar M_q^\gamma}\leqslant c(\|b\|_{k_q^n}+\|\varphi\|_{L_q^n}),$$

где c – некоторое положительное число. Следовательно, система (1) $M_q^\gamma y$-устойчива. Теорема доказана.

На основе теоремы 2 в п. 3 будут получены достаточные условия экспоненциальной моментной устойчивости системы (1) по части компонент относительно начальных данных в терминах параметров этой системы.

3. Экспоненциальная устойчивость. Как было отмечено в п. 2, из $M_q^\gamma y$-устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, β – некоторое положительное число) следует экспоненциальная q-устойчивость этой же системы относительно первых l компонент. Также было указано, что система (1) $M_q^\gamma y$-устойчива тогда и только тогда, когда при любых $\bar{x}(0) = \upsilon \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ решение $\bar{y}(\cdot, \upsilon, \varphi)$ уравнения (6) принадлежит пространству $\bar{M}_q^\gamma$ и для него выполнено неравенство (7).

В дальнейшем будем считать: $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, где β – некоторое нефиксированное положительное число; $q = 2p$; f^{si}, $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, – компоненты функции $f \in I^l(Z)$.

Примеры показывают, что экспоненциальная устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений с последействием по начальным данным наблюдается, как правило, только в случае ограниченного последействия. Поэтому $M_q^\gamma y$-устойчивость системы (1) будет изучена при дополнительных ограничениях на параметры этой системы.

Предположим, что для системы (1) также выполнено:

– существуют неотрицательные числа τ_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$, такие, что

$$0 \leqslant t - h_{ij}(t) \leqslant \tau_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m_i}, \quad t \geqslant 0,$$

μ-почти всюду;

– существуют подмножества индексов $I_s \subset \{1, \ldots, m_1\}$, $s = \overline{1,l}$, положительные числа λ_s, $s = \overline{1,l}$, и неотрицательные числа $\bar{a}_{si}^j$, $j = \overline{1,m_1}$, $s, i = \overline{1,l}$, такие, что

$$\sum_{j \in I_s} a_{ss}^{1j}(t) \geqslant \lambda_s, \quad s = \overline{1,l}, \quad |a_{si}^{1j}(t)| \leqslant \bar{a}_{si}^j, \quad j = \overline{1,m_1}, \quad s, i = \overline{1,l}, \quad t \geqslant 0,$$

$P \times \mu$-почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b_{si}^j(\beta)$, $d_{s\nu}^j(\beta)$, $s, j = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{2,m}$, такие, что для любых $u = \mathrm{col}\,(u^1, \ldots, u^l) \in \bar{D}^l$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1,l}\}$ имеют место неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_2 \bar{C}_1 V_3 u)(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \sum_{j=1}^{l} b_{si}^j(\beta) \sup_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)},$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_1 u)(\varsigma))^{s\nu}|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \sum_{j=1}^{l} d_{s\nu}^j(\beta) \sup_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}$$

при $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{2,m}$;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b_{si}(\beta)$, $\bar{b}_{si}(\beta)$, $\hat{b}_{si}(\beta)$, $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, такие, что для любых $\varphi \in L_{2p}^n$, $\bar{x}(0) \in k_{2p}^n$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1,l}\}$ выполняются неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_2 \bar{C}_1 f^h)(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant b_{si}(\beta) \|\varphi\|_{L_{2p}^n},$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma)(f^y(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \bar{b}_{si}(\beta) \|\varphi\|_{L_{2p}^n},$$

$$\sup_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_2(\bar{H}\bar{h}(0)))(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \hat{b}_{si}(\beta) \|\bar{x}(0)\|_{k_{2p}^n}$$

при $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$.

В дальнейшем нам также понадобятся следующие соотношения:

$$\left(E\left|\int\limits_0^t f(\varsigma)\,d\mathcal{B}(\varsigma)\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \leqslant c_p\left(E\left(\int\limits_0^t |f(\varsigma)|^2\,d\varsigma\right)^p\right)^{1/(2p)}, \tag{11}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|\int\limits_0^t g(\varsigma)\hat f(\varsigma)\,d\varsigma\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\int\limits_0^t |g(\varsigma)|\,d\varsigma\right)\sup_{\varsigma\geqslant 0}(E|\hat f(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}, \tag{12}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E|\int\limits_0^t g(\varsigma)^2\hat f(\varsigma)^2\,d\varsigma|^{p}\right)^{1/(2p)} \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\int\limits_0^t g(\varsigma)^2\,d\varsigma\right)^{1/2}\sup_{\varsigma\geqslant 0}(E|\hat f(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}, \tag{13}$$

где $f(\varsigma)$ – скалярный прогрессивно измеримый случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $\mathcal{B}(\varsigma)$ на $[0,t]$; c_p – некоторое число, зависящее от $p\geqslant 1$, но не зависящее от $f(\varsigma)$ и t; $g(\varsigma)$ – скалярная функция на $[0,\infty)$, квадрат которой локально суммируем; $\hat f(\varsigma)$ – скалярный случайный процесс такой, что

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}(E|\hat f(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)} < \infty.$$

Неравенства (12) и (13) доказаны в работе [18], а справедливость неравенства (11) следует из неравенства (4) монографии [19, с. 65]. Оценки на константу c_p также можно найти в монографии [19], где $c_p = 2\sqrt{12}p$, однако они не всегда оптимальны. Например, для $p=1$ в (11) можно взять $c_p = 1$.

Условия устойчивости, приведённые ниже в теореме 3, основном результате этого пункта, сформулированы в терминах $l\times l$-матрицы C, элементы которой вычисляются по формулам

$$c_{ss} = \frac{1}{\lambda_s}\biggl[\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\biggl(\tau_{1j}\biggl(\sum_{i=1}^{m_1}\bar a^i_{ss}\gamma(\tau_{1i}) + b^s_{s1}(0)\biggr) + c_p\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=2}^{m}(d^s_{si}(0)+b^s_{si}(0))\biggr) +$$

$$+\sum_{j\in 1,\ldots,m_1/I_s}\bar a^j_{ss} + b^s_{s1}(0)\biggr] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\sum_{i=2}^{m}(b^s_{si}(0)+d^s_{si}(0)),\quad s=\overline{1,l},$$

$$c_{s\nu} = \frac{1}{\lambda_s}\biggl[\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\biggl(\tau_{1j}\biggl(\sum_{i=1}^{m_1}\bar a^i_{s\nu} + b^\nu_{s1}(0)\biggr) + c_p\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=2}^{m}(d^\nu_{si}(0)+b^\nu_{si}(0))\biggr) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m_1}\bar a^j_{s\nu} + b^\nu_{s1}(0)\biggr] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\sum_{i=2}^{m}(b^\nu_{si}(0)+d^\nu_{si}(0)),\quad s,\nu=\overline{1,l},\quad s\neq\nu.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar E - C$ является положительно обратимой, то система (1) будет $M^\gamma_{2p}y$-устойчивой при $\gamma(t)=\exp\{\beta t\}$ для некоторого $0<\beta<\min\{\lambda_s, s=\overline{1,l}\}$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2, где $q=2p$, а $\gamma(t)=\exp\{\beta t\}$, $t\geqslant 0$, $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s=\overline{1,l}\}$.

В качестве вспомогательного уравнения (8) возьмём систему

$$d\bar y(t) = (-B(t)\bar y(t) + g_1(t))\,dt + \sum_{i=2}^{m} g_i(t)\,d\mathcal{B}_i(t),\quad t\geqslant 0, \tag{14}$$

где $B(t)$ – диагональная матрица размерности $l\times l$ с диагональными элементами $\sum_{j\in I_s} a_{ss}^j(t)$, $s=\overline{1,l}$, а $g_1(t)$, $g_i(t)$, $i=\overline{2,m}$, – l-мерные прогрессивно измеримые случайные процессы на $[0,\infty)$ с п.н. локально суммируемыми и локально суммируемыми с квадратом траекториями соответственно. В этом случае для решения $\bar y(t)$ уравнения (14) имеет место представление

$$\bar y(t)=U(t,0)\bar y(0)+\sum_{i=1}^m\int\limits_0^t U(t,\varsigma)g(\varsigma)\,dZ(\varsigma),\quad t\geqslant 0,$$

где $U(t,\varsigma)$, $t\geqslant 0$, $0\leqslant\varsigma\leqslant t$, – диагональная матрица с диагональными элементами

$$\hat y_s(t,\varsigma)=\exp\biggl\{-\int\limits_\varsigma^t\sum_{j\in I_s}a_{ss}^j(\varsigma)\,d\varsigma\biggr\},\quad t\geqslant 0,\quad 0\leqslant\varsigma\leqslant t,\quad s=\overline{1,l},$$

g – $l\times l$-матрица, столбцами которой являются случайные процессы g_i, $i=\overline{1,m}$, соответственно. Тогда систему (6) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\bar y^s(t)=\hat y_s(t,0)\bar y^s(0)+\sum_{j\in I_s}\int\limits_0^t\hat y_s(t,\varsigma)a_{ss}^{1j}(\varsigma)\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}d\bar y^s(\zeta)-\sum_{j\in\{1,\ldots,m_1\}/I_s}\int\limits_0^t\hat y_s(t,\varsigma)a_{ss}^{1j}(\varsigma)\bar y^s(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma-$$

$$-\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{l}\int\limits_0^t\hat y_s(t,\varsigma)a_{s\nu}^{1j}(\varsigma)\bar y^\nu(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma+\sum_{i=2}^m\int\limits_0^t\hat y_s(t,\varsigma)((V_1\bar y)(\varsigma))^{si}\,d\mathcal B_i(\varsigma)+$$

$$+\int\limits_0^t\hat y_s(t,\varsigma)(G(\varsigma))^{s1}\,d\varsigma+\sum_{i=2}^m\int\limits_0^t\hat y_s(t,\varsigma)(G(\varsigma))^{si}\,d\mathcal B_i(\varsigma),\quad s=\overline{1,l},\tag{15}$$

где

$$(G(\varsigma))^{si}=((V_2\bar C_1V_3\bar y)(\varsigma))^{si}+((V_2(\bar H\bar\xi(0)))(\varsigma))^{si}+((V_2\bar C_1f^\xi)(\varsigma))^{si}+(f^y(\varsigma))^{si},\quad s=\overline{1,l},\quad i=\overline{1,m}.$$

Учитывая обозначение $\bar y^{s\gamma}(2p)$, использованное в теореме 2, неравенства (11)–(13), предположения относительно системы (1), соотношения (15), равенства

$$d\bar y^s(\zeta)=-\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{\nu=1}^{l}a_{s\nu}^{1i}(\zeta)\bar y^k(h_{1i}(\zeta)\,d\zeta+\sum_{i=2}^m((V_1\bar y)(\zeta))^{si}\,d\mathcal B_i(\zeta)+$$

$$+(G(\varsigma))^{s1}\,d\zeta+\sum_{i=2}^m(G(\varsigma))^{si}\,d\mathcal B_i(\zeta),\quad s=\overline{1,l},$$

которые имеют место в силу системы (6), а также для $\beta<\min\{\lambda_s,s=\overline{1,n}\}$ очевидные оценки

$$(E|\upsilon_s|^{2p})^{1/(2p)}\leqslant\|\upsilon\|_{k_{2p}^n}\quad\text{при}\quad s=\overline{1,n},$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\int\limits_0^t\hat y_s(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1}\,d\varsigma\leqslant\frac{1}{\lambda_s-\beta}\quad\text{при}\quad s=\overline{1,l},$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\biggl(\int\limits_0^t(\hat y_s(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1})^2\,d\varsigma\biggr)^{1/2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\quad\text{при}\quad s=\overline{1,l},$$

$$\gamma(t)\gamma(\bar h_{ij}(t))^{-1}\leqslant\gamma(\tau_{ij}),\quad t\geqslant 0,\quad \text{при}\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,m_i},$$

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(\gamma(\varsigma)\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}\gamma(\zeta)^{-1}\,d\zeta\biggr)\leqslant\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j}\quad \text{при}\quad j=\overline{1,m_1},$$

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(\gamma(\varsigma)\biggl(\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}\gamma(\zeta)^{-2}\,d\zeta\biggr)^{1/2}\biggr)\leqslant\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}}\quad \text{при}\quad j=\overline{1,m_1},$$

для решения $\bar y(t,\upsilon,\varphi)=\bar y(t)$ системы (6) получаем

$$\bar y^{s\gamma}(2p)\leqslant\|\upsilon\|_{k^n_{2p}}+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}d\bar y^s(\zeta)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)}+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in\{1,\dots,m_1\}/I_s}\bar a^j_{ss}\gamma(\tau_{1j})\hat y^{s\gamma}(2p)+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{l}\bar a^j_{s\nu}\gamma(\tau_{1j})\hat y^{\nu\gamma}(2p)+$$

$$+c_p\sum_{i=2}^{m}\sup_{t\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\int\limits_0^t(\hat y_s(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1}\gamma(\varsigma)((V_1\bar y)(\varsigma))^{si})^2\,d\varsigma\biggr|^{p}\biggr)^{1/(2p)}+$$

$$+\sup_{t\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\int\limits_0^t\hat y_s(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1}\gamma(\varsigma)(G(\varsigma))^{s1}\,d\varsigma\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)}+$$

$$+c_p\sum_{i=2}^{m}\sup_{t\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\int\limits_0^t(\hat y_s(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1}\gamma(\varsigma)(G(\varsigma))^{si})^2d\varsigma\biggr|^{p}\biggr)^{1/(2p)}\leqslant$$

$$\leqslant\|\upsilon\|_{k^n_{2p}}+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}d\bar y^s(\zeta)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)}+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in\{1,\dots,m_1\}/I_s}\bar a^j_{ss}\gamma(\tau_{1j})\hat y^{s\gamma}(2p)+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{l}\bar a^j_{s\nu}\gamma(\tau_{1j})\hat y^{\nu\gamma}(2p)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\biggl[\sum_{\nu=1}^{l}b^\nu_{s1}(\beta)\bar y^{s\gamma}(2p)+\hat b_{s1}(\beta)\|\upsilon\|_{k_{2p}}+(b_{s1}(\beta)+\bar b_{s1}(\beta))\|\varphi\|_{L^n_{2p}}\biggr]+\frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\times$$

$$\times\sum_{i=2}^{m}\biggl[\sum_{\nu=1}^{l}(b^\nu_{si}(\beta)+d^\nu_{si}(\beta))\bar y^{s\gamma}(2p)+\hat b_{si}(\beta)\|\upsilon\|_{k_{2p}}+(b_{si}(\beta)+\bar b_{si}(\beta))\|\varphi\|_{L^n_{2p}}\biggr],\quad s=\overline{1,l},\qquad(16)$$

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}d\bar y^s(\zeta)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)}\leqslant\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{\nu=1}^{l}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}a^{1i}_{s\nu}(\zeta)\bar y^\nu(h_{1j}(\zeta))\,d\zeta\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)}+$$

$$+c_p\sum_{i=2}^{m}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl(\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}(\gamma(\varsigma)((V_1)\bar y)(\zeta)^{si})^2\,d\zeta\biggr)^{p}\biggr)^{1/(2p)}+\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}(G(\zeta))^{s1}\,d\zeta\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)}+$$

$$+ c_p \sum_{i=2}^{m} \sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl(\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} (\gamma(\varsigma)(G(\zeta))^{si})^2\, d\zeta\biggr)^p\biggr)^{1/(2p)} \leqslant$$

$$\leqslant \biggl(\sum_{\nu=1}^{l}\biggl[\sum_{i=1}^{m_1}\gamma(\tau_{1i})\bar{a}^i_{s\nu} + b^{\nu}_{s1}(\beta)\biggr]\bar{y}^{\nu\gamma}(2p) + \hat{b}_{s1}(\beta)\|\upsilon\|_{k^n_{2p}} + (b_{s1}(\beta)+\bar{b}_{s1}(\beta))\|\varphi\|_{L^n_{2p}}\biggr)\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j} +$$

$$+ c_p\biggl(\sum_{i=2}^{m}\biggl[\sum_{\nu=1}^{l}\biggl(d^{\nu}_{si}(\beta)+b^{\nu}_{si}(\beta)\biggr)\bar{y}^{\nu\gamma}(2p)+\hat{b}_{si}(\beta)\|\upsilon\|_{k^n_{2p}}+(b_{si}(\beta)+\bar{b}_{si}(\beta))\|\varphi\|_{L^n_{2p}}\biggr]\biggr)\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}}, \quad (17)$$

где $s=\overline{1,l}$.

Из неравенств (16) и (17) следует, что

$$\bar{y}^{s\gamma}(2p) \leqslant N_s(\beta)\|\upsilon\|_{k^n_{2p}} + \sum_{\nu=1}^{l} c_{s\nu}(\beta)\bar{y}^{\nu\gamma}(2p) + M_s(\beta)\|\varphi\|_{L^n_{2p}}, \quad s=\overline{1,l}, \quad (18)$$

где

$$N_s(\beta) = 1 + \frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in I_s}\bar{a}^j_{ss}\biggl(\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j}\hat{b}_{s1}(\beta) + c_p\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=1}^{m}\hat{b}_{si}(\beta)\biggr) + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\sum_{i=1}^{m}\hat{b}_{si}(\beta),$$

$$c_{ss}(\beta) = \frac{1}{\lambda_s-\beta}\biggl[\sum_{j\in I_s}\bar{a}^j_{ss}\biggl(\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j}\biggl(\sum_{i=1}^{m_1}\bar{a}^i_{ss}\gamma(\tau_{1i}) + b^s_{s1}(\beta)\biggr) + c_p\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=1}^{m}(d^s_{si}(\beta)+b^s_{si}(\beta))\biggr) +$$

$$+ \sum_{j\in 1,\ldots,m_1/I_s}\bar{a}^j_{ss}\gamma(\tau_{1j}) + b^s_{s1}(\beta)\biggr] + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\sum_{i=1}^{m}(b^s_{si}(\beta)+d^s_{si}(\beta)),$$

$$c_{s\nu}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_s-\beta}\biggl[\sum_{j\in I_s}\bar{a}^j_{ss}\biggl(\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j}\biggl(\sum_{i=1}^{m_1}\bar{a}^i_{s\nu}\gamma(\tau_{1i}) + b^{\nu}_{s1}(\beta)\biggr) + c_p\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=1}^{m}(d^{\nu}_{si}(\beta)+b^{\nu}_{si}(\beta))\biggr) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_1}\bar{a}^j_{s\nu}\gamma(\tau_{1j}) + b^{\nu}_{s1}(\beta)\biggr] + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\sum_{i=1}^{m}(b^{\nu}_{si}(\beta)+d^{\nu}_{si}(\beta)), \quad s,\nu=\overline{1,l}, \quad s\neq\nu,$$

$$M_s(\beta) = \frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in I_s}\bar{a}^j_{ss}\biggl[\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j}(b_{s1}(\beta)+\bar{b}_{s1}(\beta)) + c_p\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=1}^{m}(b_{si}(\beta)+\bar{b}_{si}(\beta))\biggr] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_s-\beta}(b_{s1}(\beta)+\bar{b}_{s1}(\beta)) + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\sum_{i=1}^{m}(b_{si}(\beta)+\bar{b}_{si}(\beta)), \quad s=\overline{1,l}.$$

Систему (18) запишем в матричной форме

$$\bar{E}\bar{y}^{\gamma}(2p) \leqslant C(\beta)\bar{y}^{\gamma}(2p) + \bar{c}(\beta)\|\upsilon\|_{k^n_{2p}} + \hat{c}(\beta)\|\varphi\|_{L^n_{2p}},$$

где $C(\beta)=(c_{ij}(\beta))^l_{i,j=1}$ – $l\times l$-матрица, а $\bar{c}(\beta)=\mathrm{col}\,(N_1(\beta),\ldots,M_l(\beta))$, $\hat{c}(\beta)=\mathrm{col}\,(M_1(\beta),\ldots$ $\ldots,M_l(\beta))$ – l-мерные векторы-столбцы.

Очевидно, что $C(0)=C$, где C – матрица из условия теоремы 3. Поскольку $\bar{E}-C$ является положительно обратимой матрицей, а это свойство устойчиво относительно малых возмущений, то при достаточно малых $\beta>0$ матрица $\bar{E}-C(\beta)$ также будет неотрицательно обратимой. Следовательно, в силу теоремы 2 система (1) будет M^{γ}_{2p}-устойчивой для некоторого $0<\beta<\min\{\lambda_s, s=\overline{1,l}\}$. Теорема доказана.

4. Достаточные условия устойчивости. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями из предыдущих пунктов и на основе теоремы 3 получим достаточные условия устойчивости по части переменных решений для некоторых классов систем вида (1) в терминах их параметров.

Будем считать $\gamma(t)=\exp\{\beta t\}$, где β – некоторое нефиксированное положительное число.

Пусть в системе (1) элементы матриц A_{1j}, $j=\overline{2,m_1}$, A_{ij}, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, равны нулю $P\times\mu$-почти всюду, а элементы матрицы A_{11} являются локально суммируемыми функциями, $h_{11}(t)=t$, $t\geqslant 0$, μ-почти всюду. Тогда система (1) является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае условие (1a) лишнее и в условии (1b) υ_i, $i=\overline{1,n}$, – действительные числа. Кроме того, $f^y\equiv 0$, $f^\xi\equiv 0$.

Рассмотрим случай $l=n-1$. Тогда $y=\operatorname{col}(x^1,\ldots,x^{n-1})$, $\xi=x^n$, $(A_{11}(t))^1$ есть $(n-1)\times(n-1)$-матрица, полученная из матрицы $A_{11}(t)$ зачёркиванием последней строки и последнего столбца,

$$(A_{11}(t))^2=\operatorname{col}(a^{11}_{1n}(t),\ldots,a^{11}_{n-1n}(t)),\quad (A_{11}(t))^3=(a^{11}_{n1}(t),\ldots,a^{11}_{n-1n-1}(t)),\quad (A_{11}(t))^4=a^{11}_{nn}(t),$$

$$H(t)=\exp\left\{-\int\limits_0^t a^{11}_{nn}(\zeta)\,d\zeta\right\},\quad (C_1g)(t)=\int\limits_0^t H(t)(H(\zeta))^{-1}g(\zeta)\,d\zeta.$$

Пусть:

– существуют положительные числа λ_s, $s=\overline{1,l}$, и неотрицательные числа $\bar a^1_{si}$, $s,i=\overline{1,l}$, такие, что

$$a^{11}_{ss}(t)\geqslant\lambda_s,\quad s=\overline{1,l},\quad |a^{11}_{si}(t)|\leqslant\bar a^1_{si},\quad s,i=\overline{1,l},\quad t\geqslant 0,$$

μ-почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b^j_{s1}(\beta)$, $s,j=\overline{1,l}$, такие, что для любой непрерывной функции $u(\varsigma)=\operatorname{col}(u^1(\varsigma),\ldots,u^l(\varsigma))$, $\varsigma\geqslant 0$, и любого β, $0<\beta<\min\{\lambda_s,s=\overline{1,l}\}$, имеют место неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma\geqslant 0}\left|\gamma(\varsigma)a^{11}_{sn}(\varsigma)\int\limits_0^\varsigma H(\varsigma)(H(\zeta))^{-1}\sum_{j=1}^l a^{11}_{nj}(\zeta)u^j(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant\sum_{j=1}^l b^j_{s1}(\beta)\sup_{\varsigma\geqslant 0}|\gamma(\varsigma)u^j(\varsigma)|,\quad s=\overline{1,l};$$

– существуют неотрицательные непрерывные функции $\hat b_{s1}(\beta)$, $s=\overline{1,l}$, такие, что для любых $x(0)=(x^1(0),\ldots,x^n(0))\in\mathbb{R}^n$ и $0<\beta<\min\{\lambda_s,s=\overline{1,l}\}$ выполняются неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma\geqslant 0}|\gamma(\varsigma)a^{11}_{sn}(\varsigma)H(\varsigma)x^n(0)|\leqslant\hat b_{s1}(\beta)|x(0)|,\quad s=\overline{1,l};$$

– элементы $l\times l$-матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss}=\frac{b^s_{s1}(0)}{\lambda_s},\quad s=\overline{1,l},\quad c_{s\nu}=\frac{\bar a^1_{s\nu}+b^\nu_{s1}(0)}{\lambda_s},\quad s,\nu=\overline{1,l},\quad s\neq\nu.$$

В силу теоремы 3 справедливо

Утверждение 1. *Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar E-C$ является положительно обратимой, то система (1) будет экспоненциально устойчивой относительно первых $n-1$ компонент.*

Пусть в системе (1) элементы матриц A_{ij}, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, равны нулю $P\times\mu$-почти всюду, а элементами матриц A_{1j}, $j=\overline{1,m_1}$, являются локально суммируемые функции. Тогда система (1) является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями.

Рассмотрим случай $l = n-1$. Тогда $y = \operatorname{col}(x^1, \ldots, x^{n-1})$, $\xi = x^n$, $(A_{1j}(t))^1$ является $(n-1)\times(n-1)$-матрицей, полученной из матрицы $A_{1j}(t)$ зачёркиванием последней строки и последнего столбца,

$$(A_{1j}(t))^2 = \operatorname{col}(a^{1j}_{1n}(t), \ldots, a^{1j}_{n-1n}(t)), \quad (A_{1j}(t))^3 = (a^{1j}_{n1}(t), \ldots, a^{1j}_{n-1n-1}(t)), \quad (A_{1j}(t))^4 = a^{1j}_{nn}(t)$$

при $j = \overline{1, m_1}$. Предположим, что $h_{11}(t) = t$, $t \geqslant 0$, μ-почти всюду и элементы матриц $(A_{1j}(t))^2$, $(A_{1j}(t))^3$, $(A_{1j}(t))^4$, $t \geqslant 0$, равны нулю μ-почти всюду при $j = \overline{2, m_1}$. Тогда

$$H(t) = \exp\left\{-\int\limits_0^t a^{11}_{nn}(\zeta)\,d\zeta\right\}, \quad (C_1 g)(t) = \int\limits_0^t H(t)(H(\zeta))^{-1} g(\zeta)\,d\zeta.$$

Пусть:

– существуют неотрицательные числа τ_{1j}, $j = \overline{2, m_1}$, такие, что

$$0 \leqslant t - h_{1j}(t) \leqslant \tau_{1j}, \quad j = \overline{2, m_1}, \quad t \geqslant 0,$$

μ-почти всюду;

– существуют подмножества индексов $I_s \subset \{1, \ldots, m_1\}$, $s = \overline{1, l}$, положительные числа λ_s, $s = \overline{1, l}$, и неотрицательные числа $\bar{a}^j_{si}$, $j = \overline{1, m_1}$, $s, i = \overline{1, l}$, такие, что

$$\sum_{j \in I_s} a^{1j}_{ss}(t) \geqslant \lambda_s, \quad s = \overline{1, l}, \quad |a^{1j}_{si}(t)| \leqslant \bar{a}^j_{si}, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad s, i = \overline{1, l}, \quad t \geqslant 0,$$

$P \times \mu$-почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b^j_{s1}(\beta)$, $s, j = \overline{1, l}$, такие, что для любой непрерывной функции $u(\varsigma) = \operatorname{col}(u^1(\varsigma), \ldots, u^l(\varsigma))$, $\varsigma \geqslant 0$, и любого β, $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$, имеют место неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma \geqslant 0} \left| \gamma(\varsigma) a^{11}_{sn}(\varsigma) \int\limits_0^\varsigma H(\varsigma)(H(\zeta))^{-1} \sum_{j=1}^{l} a^{11}_{nj}(\zeta) u^j(\zeta)\,d\zeta \right| \leqslant \sum_{j=1}^{l} b^j_{s1}(\beta) \sup_{\varsigma \geqslant 0} |\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|, \quad s = \overline{1, l};$$

– существуют неотрицательные непрерывные функции $\hat{b}_{s1}(\beta)$, $s = \overline{1, l}$, такие, что для любых $x(0) = (x^1(0), \ldots, x^n(0)) \in \mathbb{R}^n$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$ выполняются неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma \geqslant 0} |\gamma(\varsigma) a^{11}_{sn}(\varsigma) H(\varsigma) x^n(0)| \leqslant \hat{b}_{s1}(\beta)|x(0)|, \quad s = \overline{1, l};$$

– элементы $l \times l$-матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss} = \frac{1}{\lambda_s}\left[\sum_{j \in I_s} \bar{a}^j_{ss} \tau_{1j} \left(\sum_{i=1}^{m_1} \bar{a}^i_{ss} \gamma(\tau_{1i}) + b^s_{s1}(0)\right) + \sum_{j \in 1, \ldots, m_1 / I_s} \bar{a}^j_{ss} + b^s_{s1}(0)\right], \quad s = \overline{1, l},$$

$$c_{s\nu} = \frac{1}{\lambda_s}\left[\sum_{j \in I_s} \bar{a}^j_{ss} \tau_{1j} \left(\sum_{i=1}^{m_1} \bar{a}^i_{s\nu} + b^\nu_{s1}(0)\right) + \sum_{j=1}^{m_1}\right], \quad s, \nu = \overline{1, l}, \quad s \neq \mu,$$

где $\tau_{11} = 0$.

Утверждение 2. *Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar{E} - C$ является положительно обратимой, то система (1) будет экспоненциально устойчивой относительно первых $n-1$ компонент.*

Справедливость утверждения 2 также следует из теоремы 3. При проверке выполнения всех условий теоремы 3 нужно учесть, что $f^{\xi} \equiv 0$, а в выполнении условий для f^{y} можно убедиться непосредственной проверкой.

Пусть в системе (1) элементы матриц A_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{2,m_i}$, равны нулю $P \times \mu$-почти всюду, $h_{i1}(t) = t$, $i = \overline{1,m}$, $t \geqslant 0$, μ-почти всюду. Тогда система (1) является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений Ито. В этом случае условие (1a) лишнее. Кроме того, $f^{y} \equiv 0$, $f^{\xi} \equiv 0$.

Рассмотрим случай $l = n-1$. Тогда $y = \operatorname{col}(x^1, \ldots, x^{n-1})$, $\xi = x^n$, $(A_{i1}(t))^1$ является $(n-1)\times(n-1)$-матрицей, полученной из матрицы $A_{i1}(t)$ зачёркиванием последней строки и последнего столбца,

$$(A_{i1}(t))^2 = \operatorname{col}(a^{i1}_{1n}(t), \ldots, a^{i1}_{n-1n}(t)), \quad (A_{i1}(t))^3 = (a^{i1}_{n1}(t), \ldots, a^{i1}_{n-1n-1}(t)), \quad (A_{i1}(t))^4 = a^{i1}_{nn}(t)$$

при $i = \overline{1,m}$. Тогда

$$H(t) = \exp\bigg\{ -\int\limits_0^t \bigg[a^{11}_{nn}(\zeta) + (1/2)\sum_{i=2}^m (a^{i1}_{nn}(\zeta))^2\bigg]\,d\zeta + \sum_{i=2}^m \int\limits_0^t a^{i1}_{nn}(\zeta)\,d\mathcal{B}_i(\zeta)\bigg\},$$

$$(C_1 g)(t) = \int\limits_0^t H(t)(H(\zeta))^{-1} g(\zeta)\,dZ(\zeta).$$

Пусть:

– существуют положительные числа λ_s, $s = \overline{1,l}$, и неотрицательные числа $\bar a^1_{si}$, $s, i = \overline{1,l}$, такие, что

$$a^{11}_{ss}(t) \geqslant \lambda_s, \quad s = \overline{1,l}, \quad |a^{11}_{si}(t)| \leqslant \bar a^1_{si}, \quad s, i = \overline{1,l}, \quad t \geqslant 0,$$

$P \times \mu$-почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b^j_{si}(\beta)$, $d^j_{s\nu}(\beta)$, $s, j = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{2,m}$, такие, что для любых $u = \operatorname{col}(u^1, \ldots, u^l) \in \bar D^l$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1,l}\}$ имеют место неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma\geqslant 0}\bigg(E\bigg|\gamma(\varsigma)\gamma(\varsigma)a^{i1}_{sn}(\varsigma)\int\limits_0^{\varsigma} H(\varsigma)(H(\zeta))^{-1}\bigg(\sum_{j=1}^l a^{11}_{nj}(\zeta)u^j(\zeta), \ldots$$

$$\ldots, \sum_{j=1}^l a^{m1}_{nj}(\zeta)u^j(\zeta)\bigg)\,dZ(\zeta)\bigg|^{2p}\bigg)^{1/(2p)} \leqslant \sum_{j=1}^l b^j_{si}(\beta)\sup_{\varsigma\geqslant 0}\Big(E|\gamma(\varsigma)u^j(\varsigma)|^{2p}\Big)^{1/(2p)},$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma\geqslant 0}\bigg(E\bigg|\gamma(\varsigma)\sum_{j=1}^l a^{\nu 1}_{sj}(\zeta)u^j(\zeta)\bigg|^{2p}\bigg)^{1/(2p)} \leqslant \sum_{j=1}^l d^j_{s\nu}(\beta)\sup_{\varsigma\geqslant 0}\Big(E|\gamma(\varsigma)u^j(\varsigma)|^{2p}\Big)^{1/(2p)}$$

при $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{2,m}$;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $\hat b_{si}(\beta)$, $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, такие, что для любых $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1,l}\}$, $\bar x(0) \in k^n_{2p}$ выполняются неравенства

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}\Big(E|\gamma(\varsigma)a^{i1}_{sn}(\varsigma)H(\varsigma)\bar h(0)|^{2p}\Big)^{1/(2p)} \leqslant \hat b_{si}(\beta)\|\bar x(0)\|_{k^n_{2p}}$$

при $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$;

– элементы $l \times l$-матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss} = \frac{b_{s1}^s(0)}{\lambda_s} + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}} \sum_{i=1}^{m} (b_{si}^s(0) + d_{si}^s(0)), \quad s = \overline{1, l},$$

$$c_{s\nu} = \frac{1}{\lambda_s} \left[\sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{s\nu}^j + b_{s1}^\nu(0) \right] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}} \sum_{i=1}^{m} (b_{si}^\nu(0) + d_{si}^\nu(0)), \quad s, \nu = \overline{1, l}, \quad s \neq \nu.$$

Утверждение 3. *Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar{E} - C$ является положительно обратимой, то система (1) будет экспоненциально $2p$-устойчивой относительно первых $n-1$ компонент.*

Справедливость утверждения 3 также следует из теоремы 3.

Замечание 3. В предыдущих утверждениях признаки устойчивости сформулированы в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам уравнений. В случае конкретных значений параметров положительная обратимость матрицы проверяется прямым вычислением обратной матрицы.

Заключение. В статье получены признаки моментной экспоненциальной устойчивости решений по части переменных линейных уравнений Ито с запаздыванием и приведены конкретные примеры, иллюстрирующие эффективность этих признаков. Основная схема доказательств, использованная в статье, основана на стохастической разновидности метода вспомогательных уравнений (W-метода) в комбинации с теорией неотрицательно обратимых матриц и методом покомпонентных оценок решений.

В дальнейшем автор планирует распространить этот подход на другие виды устойчивости (например, асимптотическую устойчивость), а также рассмотреть другие классы уравнений Ито с последействием, особенно те, где метод функционалов Ляпунова не работает или работает недостаточно эффективно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.
2. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига, 1989.
3. *Mao X.* Stochastic Differential Equations and Applications. Chichester, 1997.
4. *Mohammed S.-E.F.* Stochastic functional differential equations with memory. Theory, examples and applications // Proc. of the Sixth on Stochastic Analysis. Geilo, 1996. P. 1–91.
5. *Azbelev N.V., Simonov P.M.* Stability of Differential Equations with Aftereffect. London, 2002.
6. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М., 2001.
7. *Кадиев Р.И.* Достаточные условия устойчивости по части переменных линейных стохастических систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2000. № 6. С. 75–79.
8. *Кадиев Р.И.* Допустимость пар пространств по части переменных для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1994. № 4. С. 1–9.
9. *Kadiev R.I., Ponosov A.V.* Partial Lyapunov stability of linear stochastic functional differential equations with to initial values // Int. J. of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Math. Anal. 2008. V. 15. № 5. P. 727–754.
10. *Kadiev R., Ponosov A.* Partial stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // Int. J. of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Math. Anal. 2014. V. 21. № 1. P. 1–35.
11. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2019. № 5. С. 86–98.
12. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2021. № 9. С. 116–132.
13. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 53. № 5. С. 579–590.

14. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Положительная обратимость матриц и экспоненциальная устойчивость импульсных систем линейных дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Изв. вузов. Математика. 2020. № 10. С. 3–8.
15. *Кадиев Р.И.* Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 35–40.
16. *Кадиев Р.И.* Исследование вопросов устойчивости для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений методом вспомогательных уравнений // Дагестанские электрон. мат. изв. 2014. Вып. 2. С. 45–67.
17. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969.
18. *Kadiev R., Ponosov A.* The W-transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Math. Analysis and Appl. 2012. V. 389. № 2. P. 1239–1250.
19. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М., 1986.

Дагестанский федеральный исследовательский
центр РАН, г. Махачкала,
Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала

Поступила в редакцию 23.03.2023 г.
После доработки 27.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.