ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1335–1356

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ИОНИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННЫХ СКОРОСТЕЙ АТОМОВ И ИОНОВ

© 2023 г. М. Б. Гавриков, А. А. Таюрский

Рассмотрены основные начально-краевые (смешанные) задачи для нелинейной системы уравнений одномерной ионизации газа в случае постоянных скоростей атомов газа и возникающих в результате ионизации ионов. Неизвестными в этой системе являются концентрации атомов и ионов. Найдена общая формула достаточно гладкого решения системы. Показано, что смешанные задачи для системы уравнений одномерной ионизации допускают интеграцию в виде явных аналитических выражений. В случае смешанной задачи для конечного отрезка аналитическое решение строится посредством рекуррентных формул, каждая из которых определена в треугольнике, принадлежащем некоторой указанной в работе триангуляции области определения неизвестных функций.

DOI: 10.31857/S0374064123100035, EDN: ONCTCE

Введение. В работе рассмотрено аналитическое решение основных начально-краевых задач для системы уравнений одномерной ионизации [1, с. 304; 2]

$$\frac{\partial n_{\mathrm{a}}}{\partial t} + \frac{\partial v_{\mathrm{a}} n_{\mathrm{a}}}{\partial z} = -k_I n_{\mathrm{a}} n_{\mathrm{i}}, \quad \frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \frac{\partial v_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}}}{\partial z} = k_I n_{\mathrm{a}} n_{\mathrm{i}}, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}$ – время, $z \in \mathbb{R}$ – пространственная координата, n_{a}, n_{i} – подлежащие нахождению концентрации атомов и ионов, v_{a}, v_{i} – заданные скорости движения атомов и ионов, $k_I > 0$ – известный коэффициент ионизации. Ниже система уравнений ионизации решается аналитически в случае $v_{\mathrm{a}} = \mathrm{const}$, $v_{\mathrm{i}} = \mathrm{const}$. Система (1) относится к полулинейным гиперболическим системам [3, с. 17], а в случае $v_{\mathrm{a}} = \mathrm{const}$, $v_{\mathrm{i}} = \mathrm{const}$ она записана в инвариантах [3, с. 28]. При $v_{\mathrm{i}} = v_{\mathrm{a}} = \mathrm{const}$ характеристики системы (1) совпадают, и она легко по ним интегрируется (см. п. 1). В случае $v_{\mathrm{i}} \neq v_{\mathrm{a}}$ характеристические векторы $(1, v_{\mathrm{a}})$, $(1, v_{\mathrm{i}})$ линейно независимы и, разлагая вектор (t, z) по базису из характеристических векторов и принимая координаты разложения за новые независимые переменные в (1), эта система, как показано в п. 1, сводится к виду, когда в новых переменных дифференциальный оператор левой части (1) расщепляется на два независимых оператора, что позволяет проинтегрировать систему уравнений ионизации. Указанный приём позволяет решать и некоторые другие задачи, например, задачу о поглощении (сорбции) газа поглощающим веществом [4, с. 165].

В п. 1 поставлены основные начально-краевые задачи для системы (1) в случае постоянных скоростей в неограниченных областях переменной z и на отрезке $[0, L]$, $L > 0$. Предложенное в работе решение смешанных задач, основанное на формулах, выведенных в п. 1, намного проще и принципиально отличается от известных приёмов решения преимущественно линейных начально-краевых задач, базирующихся либо на методе Фурье, либо на применении преобразования Лапласа к неизвестным функциям. На основе результатов, полученных в п. 1, в пп. 2–4 дано аналитическое решение поставленных краевых задач в неограниченных областях переменной z, а в п. 5 на их основе решена начально-краевая задача на отрезке $[0, L]$. Приведенные в пп. 2–5 формулы доказывают, в частности, существование и единственность решений начально-краевых задач для системы (1). С другой стороны, они позволяют искать различные асимптотики решений рассмотренных задач (например, при $t \to +\infty$ или при неограниченном удалении от границы области ионизации). Однако в настоящей работе эти результаты не рассматриваются.

Представляет значительный интерес обобщение предложенного в работе метода решения системы (1) для постоянных скоростей $v_{\rm a}$, $v_{\rm i}$ на практически важный случай [5], когда $v_{\rm a} = \mathrm{const} > 0$, $v_{\rm i} = v_{\rm i}(z)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция, имеющая положительную производную и единственный нуль внутри заданного отрезка $[0, L]$ (обычно полагают $v_{\rm i}(z) = a(z - z_0)$, $a > 0$, $z_0 \in (0, L)$ [6]). Начально-краевая задача для таких $v_{\rm i}(z)$ сводится к задаче Гурса [3, с. 96], когда краевые условия ставятся на характеристике $z = z_0$ системы (1). Численное решение показывает [7, 8], что в этом случае система (1) допускает периодические по времени решения, которые применительно к стационарному плазменному двигателю [1, с. 316; 9; 10] длины L описывают низкочастотные ионизационные колебания, наблюдаемые в эксперименте и называемые *бривинг модами* [11, 12]. Тем самым проведённые в настоящей работе исследования являются первым важным шагом в математическом анализе бривинг мод.

1. Решения уравнений ионизации в случае постоянных скоростей. Решим систему (1) в случае, когда $v_{\rm a} = \mathrm{const}$, $v_{\rm i} = \mathrm{const}$.

Рассмотрим основной случай $v_{\rm a} \neq v_{\rm i}$. Проведём замену $(t, z) \leftrightarrow (\alpha, \beta)$ независимых переменных:

$$(t, z) = \alpha(1, v_{\rm a}) + \beta(1, v_{\rm i}),$$

или в координатном виде

$$t = \alpha + \beta, \quad z = \alpha v_{\rm a} + \beta v_{\rm i},$$

$$\alpha = (t v_{\rm i} - z)(v_{\rm i} - v_{\rm a})^{-1}, \quad \beta = (z - t v_{\rm a})(v_{\rm i} - v_{\rm a})^{-1}, \quad (\alpha, \beta) = \phi(t, z). \tag{2}$$

Отсюда для дифференциальных операторов получим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{v_{\rm i}}{v_{\rm i} - v_{\rm a}}\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{v_{\rm a}}{v_{\rm i} - v_{\rm a}}\frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v_{\rm i} - v_{\rm a}}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{v_{\rm i} - v_{\rm a}}\frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Подставив эти выражения в систему (1), сведём её к эквивалентному виду

$$\frac{\partial n_{\rm a}}{\partial \alpha} = -k_I n_{\rm a} n_{\rm i}, \quad \frac{\partial n_{\rm i}}{\partial \beta} = k_I n_{\rm a} n_{\rm i}. \tag{3}$$

Итак, задача нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (1) в области D переменных (t, z) равносильна задаче нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (3) в области $\phi(D)$ переменных (α, β). Отображение ϕ линейное, невырожденное, с определителем $\det \phi = 1/(v_{\rm i} - v_{\rm a}) \neq 0$. В частности, оно переводит прямые в прямые, многоугольники – в многоугольники, выпуклые множества – в выпуклые множества и т.д. Построим сначала элементарную теорию решений системы (3) в прямоугольнике $\Pi = [\alpha_0, \alpha_1] \times [\beta_0, \beta_1]$, $\alpha_0 < \alpha_1$, $\beta_0 < \beta_1$.

Теорема 1. *1. Пусть $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезках $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ соответственно, причём $A(\alpha) \neq B(\beta)$ для любых $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$. Тогда функции*

$$n_{\rm a}(\alpha, \beta) \overset{\rm def}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))}, \quad n_{\rm i}(\alpha, \beta) \overset{\rm def}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} \tag{4}$$

составляют непрерывно дифференцируемое решение системы (3) в прямоугольнике Π.

2. Если непрерывно дифференцируемые решения $n_{\rm a}$, $n_{\rm i}$ систем (3) таковы, что множество нулей каждой из этих функций в Π имеет пустую внутренность и $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ – ещё пара функций на $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ соответственно, удовлетворяющих условиям части 1 теоремы и восстанавливающих по формулам (4) те же самые функции $n_{\rm a}$, $n_{\rm i}$ в Π, то найдутся константы $R \neq 0$ и C, для которых справедливы равенства

$$\bar{A}(\alpha) = RA(\alpha) + C, \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], \quad \bar{B}(\beta) = RB(\beta) + C, \quad \beta \in [\beta_0, \beta_1]. \tag{5}$$

Обратно, если функции $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ *вычисляются по* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *посредством формул (5) для некоторых констант* $R \neq 0$ *и* C, *то они удовлетворяют условиям части 1 теоремы и по формулам (4) восстанавливают те же функции* n_{a}, n_{i}, *что и для* $A(\alpha)$, $B(\beta)$.

3. В условиях части 1 теоремы функции n_{a}, n_{i}, *вычисляемые по формулам (4), удовлетворяют всюду в* Π *неравенствам* $n_{\mathrm{a}} \geqslant 0$, $n_{\mathrm{i}} \geqslant 0$ *тогда и только тогда, когда либо* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *монотонно не убывают на отрезках* $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ *соответственно и*

$$\inf_{\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]} A(\alpha) > \sup_{\beta \in [\beta_0, \beta_1]} B(\beta)$$

(что равносильно $A(\alpha_0) > B(\beta_1)$*), либо* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *монотонно не возрастают соответственно на* $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ *и*

$$\sup_{\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]} A(\alpha) < \inf_{\beta \in [\beta_0, \beta_1]} B(\beta)$$

(что равносильно $A(\alpha_0) < B(\beta_1)$*).*

Доказательство. Поскольку $A(\alpha) \neq B(\beta)$ для любых $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$, то правые части равенств (4) определены корректно в Π и, очевидно, являются непрерывно дифференцируемыми в прямоугольнике Π функциями. По правилам дифференцирования находим

$$\frac{\partial n_{\mathrm{a}}}{\partial \alpha} = -\frac{B'(\beta) A'(\alpha)}{k_I (A(\alpha) - B(\beta))^2}, \quad \frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial \beta} = \frac{A'(\alpha) B'(\beta)}{k_I (A(\alpha) - B(\beta))^2}.$$

Отсюда и из (4) следует тождественная справедливость равенств (3).

2. Пусть $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ – ещё пара функций, удовлетворяющих части 1 теоремы. Тогда всюду в Π выполнены тождества

$$B'(\beta) k_I^{-1} (A(\alpha) - B(\beta))^{-1} = n_{\mathrm{a}}(\alpha, \beta) = \bar{B}'(\beta) k_I^{-1} (\bar{A}(\alpha) - \bar{B}(\beta))^{-1},$$

$$A'(\alpha) k_I^{-1} (A(\alpha) - B(\beta))^{-1} = n_{\mathrm{i}}(\alpha, \beta) = \bar{A}'(\alpha) k_I^{-1} (\bar{A}(\alpha) - \bar{B}(\beta))^{-1}. \qquad (6)$$

Обозначим

$$R(\alpha, \beta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\bar{A}(\alpha) - \bar{B}(\beta))(A(\alpha) - B(\beta))^{-1}.$$

Тогда функция R непрерывна и отлична от нуля всюду в Π и $\bar{B}'(\beta) = B'(\beta) R(\alpha, \beta)$, $\bar{A}'(\alpha) = A'(\alpha) R(\alpha, \beta)$ для всех $(\alpha, \beta) \in \Pi$. Отсюда следует, что множества нулей функций $\bar{B}'(\beta)$ и $B'(\beta)$ совпадают и, по условию, имеют пустую внутренность. Аналогично множества нулей функций $\bar{A}'(\alpha)$ и $A'(\alpha)$ совпадают и имеют пустую внутренность. Кроме того, указанные множества замкнуты и нигде не плотны в соответствующих отрезках $[\beta_0, \beta_1]$ и $[\alpha_1, \alpha_1]$. Пусть $U \subseteq [\beta_0, \beta_1]$, $V \subseteq [\alpha_0, \alpha_1]$ – дополнения указанных множеств, тогда $\bar{U} = [\beta_0, \beta_1]$, $\bar{V} = [\alpha_0, \alpha_1]$, и для любой точки $(\alpha, \beta) \in V \times U$ имеем

$$\bar{B}'(\beta)/B'(\beta) = R(\alpha, \beta) = \bar{A}'(\alpha)/A'(\alpha) \Rightarrow R(\alpha, \beta) \equiv R = \mathrm{const} \quad \text{на} \quad V \times U.$$

Поскольку R – непрерывная функция и $\overline{V \times U} = \bar{V} \times \bar{U} = \Pi$, то $R(\alpha, \beta) \equiv R$ всюду в Π. Но тогда $(\bar{B}(\beta) - RB(\beta))' = 0$, $(\bar{A}(\alpha) - RA(\alpha))' = 0$ и, значит, найдутся константы C и D, для которых $\bar{B}(\beta) - RB(\beta) \equiv C$, $\bar{A}(\alpha) - RA(\alpha) \equiv D$ всюду на отрезках $[\beta_0, \beta_1]$, $[\alpha_1, \alpha_1]$ соответственно. Подставляя равенства $\bar{B} = RB + C$, $\bar{A} = RA + D$ в соотношения (6) и учитывая $R \neq 0$, получаем

$$B'(\beta)(D - C)/R = B'(\beta), \quad A'(\alpha)(D - C)/R = A'(\alpha).$$

Поскольку по условию $A'(\alpha)$ и $B'(\beta)$ не равны тождественно нулю, то $D - C = 0$, что доказывает прямое утверждение. Обратное утверждение очевидно.

3. Пусть $n_{\mathrm{a}} \geqslant 0$, $n_{\mathrm{i}} \geqslant 0$ в Π и выполнены условия части 1 теоремы, в частности, имеют место равенства (4). Из непрерывности ненулевой функции двух переменных $A(\alpha) - B(\beta)$ в

Π и связности Π следует, что либо $A(\alpha)-B(\beta)>0$ всюду в Π, либо $A(\alpha)-B(\beta)<0$ всюду в Π. Поэтому из равенств (4) вытекает, что либо $A(\alpha)-B(\beta)>0$ всюду в Π и $A'(\alpha)\geqslant 0$, $B'(\beta)\geqslant 0$ всюду на $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$ соответственно, либо $A(\alpha)-B(\beta)<0$ всюду в Π и $A'(\alpha)\leqslant 0$, $B'(\beta)\leqslant 0$ всюду на $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$ соответственно. В первом случае функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно не убывают в своих областях определения и $\inf A(\alpha)>\sup B(\beta)$. Во втором случае $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно не возрастают в своих областях определения и $\sup A(\alpha)<\inf B(\beta)$, где инфимум и супремум по α берутся на отрезке $[\alpha_0,\alpha_1]$, а по β – на $[\beta_0,\beta_1]$. Остальные утверждения очевидны. Теорема доказана.

Если $A(\alpha)$, $B(\beta)$ удовлетворяют условиям части 1 теоремы 1, то n_{a}, n_{i}, вычисляемые по формулам (4), непрерывно дифференцируемы в Π и существуют непрерывные в Π смешанные производные $\partial^2 n_{\mathrm{a}}/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 n_{\mathrm{a}}/(\partial\beta\,\partial\alpha)$ и $\partial^2 n_{\mathrm{i}}/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 n_{\mathrm{i}}/(\partial\beta\,\partial\alpha)$. Это обстоятельство позволяет сформулировать обратное утверждение.

Теорема 2. *Пусть $n_{\mathrm{a}}>0$, $n_{\mathrm{i}}>0$ – непрерывно дифференцируемое решение (3) в прямоугольнике Π, для которого существуют непрерывные в Π смешанные частные производные $\partial^2 n_{\mathrm{a}}/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 n_{\mathrm{a}}/(\partial\beta\,\partial\alpha)$ и $\partial^2 n_{\mathrm{i}}/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 n_{\mathrm{i}}/(\partial\beta\,\partial\alpha)$. Тогда найдутся дважды непрерывно дифференцируемые функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$, определённые на сторонах прямоугольника, соответственно, $[\alpha_0,\alpha_1]$ и $[\beta,\beta_1]$, для которых $A(\alpha)\neq B(\beta)$ при всех $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$, $\beta\in\in[\beta_0,\beta_1]$, и всюду в Π выполнены равенства (4).*

Замечание. Таким образом, для класса положительных непрерывно дифференцируемых решений системы (3), для которых в Π существуют обе непрерывные смешанные частные производные, формулы (4) задают общий вид решений этого класса.

Доказательство теоремы 2. Пусть $X=\ln n_{\mathrm{a}}$, $Y=\ln n_{\mathrm{i}}$. Очевидно, что функции $X(\alpha,\beta)$, $Y(\alpha,\beta)$ непрерывно дифференцируемые в Π и существуют в Π непрерывные смешанные частные производные $\partial^2 X/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 X/(\partial\beta\,\partial\alpha)$ и $\partial^2 Y/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 Y/(\partial\beta\,\partial\alpha)$. Относительно неизвестных X, Y система (3) записывается в виде

$$\frac{\partial X}{\partial\alpha}=-k_I e^Y,\quad \frac{\partial Y}{\partial\beta}=k_I e^X,\quad (\alpha,\beta)\in\Pi.$$

Отсюда следуют равенства

$$\frac{\partial^2 X}{\partial\beta\,\partial\alpha}=-k_I\frac{\partial e^Y}{\partial\beta}=-k_I e^Y\frac{\partial Y}{\partial\beta}=-k_I^2 e^{X+Y},\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial\alpha\,\partial\beta}=k_I\frac{\partial e^X}{\partial\alpha}=k_I e^X\frac{\partial X}{\partial\alpha}=-k_I^2 e^{X+Y}.$$

По теореме Шварца $\partial^2 Y/(\partial\alpha\,\partial\beta)=\partial^2 Y/(\partial\beta\,\partial\alpha)$, поэтому из проведённых вычислений следует тождество $\partial^2(X-Y)/(\partial\beta\,\partial\alpha)\equiv 0$ всюду в Π. Отсюда элементарным интегрированием получается, что $\partial(X-Y)/\partial\alpha=a_0(\alpha)$ – непрерывная на $[\alpha_0,\alpha_1]$ функция и, значит, $X-Y==\int a_0(\alpha)\,d\alpha+b(\beta)$. Функция $a(\alpha)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int a_0(\alpha)\,d\alpha$, очевидно, непрерывно дифференцируема, и тогда из равенства $X-Y=a(\alpha)+b(\beta)$ следует непрерывная дифференцируемость $b(\beta)$ на отрезке $[\beta_0,\beta_1]$. Итак, $X-Y=a(\alpha)+b(\beta)$ и $n_{\mathrm{a}}/n_{\mathrm{i}}=e^{a(\alpha)}e^{b(\beta)}=C(\alpha)D(\beta)$, где $C(\alpha)$, $D(\beta)$ – положительные непрерывно дифференцируемые функции соответственно на $[\alpha_0,\alpha_1]$ и $[\beta_0,\beta_1]$.

Подставив выражение $n_{\mathrm{a}}=n_{\mathrm{i}}C(\alpha)D(\beta)$ в первое уравнение системы (3), получим соотношение

$$\frac{\partial(n_{\mathrm{i}}C(\alpha))}{\partial\alpha D(\beta)}=-k_I n_{\mathrm{i}}^2 C(\alpha)D(\beta),$$

равносильное равенству

$$\frac{n_{\mathrm{i}}^{-2}\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial\alpha}+C'(\alpha)C^{-1}(\alpha)n_{\mathrm{i}}^{-1}=-k_I.$$

Пусть $Z=1/n_{\mathrm{i}}$, тогда относительно Z получается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial Z}{\partial\alpha}-C'(\alpha)C^{-1}(\alpha)Z=k_I. \tag{7}$$

Решим уравнение (7) при каждом фиксированном $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$ на отрезке $[\alpha_0, \alpha_1]$ методом вариации произвольной постоянной. Однородное уравнение имеет решение

$$Z_{\text{одн}} = \Gamma(\beta)C(\alpha).$$

Варьируя по α произвольную постоянную $\Gamma(\beta)$, получаем

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} C(\alpha) = k_I,$$

откуда

$$\Gamma(\alpha, \beta) = k_I \int C^{-1}(\alpha)\, d\alpha + k_I K(\beta),$$

а решение уравнения (7) имеет вид $Z = \Gamma(\alpha, \beta)C(\alpha) = k_I(A(\alpha) - B(\beta))C(\alpha)$, где $A(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int d\alpha/C(\alpha)$, $B(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} -K(\beta)$. Из равенства $Z = \Gamma(\alpha, \beta)C(\alpha)$ вытекает положительность и непрерывная дифференцируемость $\Gamma(\alpha, \beta)$ в Π. Из равенства $\Gamma(\alpha, \beta) = k_I(A(\alpha) - B(\beta))$ и двукратной непрерывной дифференцируемости $A(\alpha)$ следует непрерывная дифференцируемость функции $B(\beta)$. Из положительности $\Gamma(\alpha, \beta)$ всюду в Π вытекает $A(\alpha) \neq B(\beta)$ для любых $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$. Наконец, из равенства $A'(\alpha) = 1/C(\alpha)$ следует тождество

$$n_{\text{i}} = Z^{-1} = \Gamma^{-1}(\alpha, \beta)C^{-1}(\alpha) = A'(\alpha)k_I^{-1}(A(\alpha) - B(\beta))^{-1}, \tag{8}$$

совпадающее со вторым равенством (4). Чтобы получить первое равенство (4) и установить двукратную непрерывную дифференцируемость функции $B(\beta)$ на $[\beta_0, \beta_1]$, подставим соотношение (8) во второе уравнение системы (3):

$$\frac{A'(\alpha)B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))^2} = k_I \frac{(A'(\alpha))^2}{k_I^2(A(\alpha) - B(\beta))^2} C(\alpha)D(\beta),$$

где было использовано равенство $n_{\text{a}} = n_{\text{i}}C(\alpha)D(\beta)$. Учитывая тождества $A'(\alpha)C(\alpha) = 1$ и $A'(\alpha) > 0$, получаем $B'(\beta) = D(\beta)$. Значит, функция $B(\beta)$ дважды непрерывно дифференцируема по β. Кроме того, с учётом (8) имеем

$$n_{\text{a}} = n_{\text{i}}C(\alpha)D(\beta) = \frac{A'(\alpha)C(\alpha)D(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} = \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))},$$

что совпадает с первым равенством (4). Итак, мы указали функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$, удовлетворяющие условиям 1 теоремы 1, для которых выполнены равенства (4). Теорема доказана.

Из части 2 теоремы 1 следует, что в формулах (4) всегда можно считать $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно неубывающими функциями на $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ соответственно. Кроме того, стороны прямоугольника Π могут быть интервалами или полуинтервалами, в том числе полубесконечными или бесконечными. Соответствующие изменения формулировки части 3 теоремы 1 очевидны.

Из теорем 1, 2 следует, что в $\phi^{-1}(\Pi)$ решение системы (1) задаётся формулами

$$n_{\text{a}}(t, z) = \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))}, \quad n_{\text{i}}(t, z) = \frac{A'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))}, \quad \alpha = \frac{tv_{\text{i}} - z}{v_{\text{i}} - v_{\text{a}}}, \quad \beta = \frac{z - tv_{\text{a}}}{v_{\text{i}} - v_{\text{a}}}, \tag{9}$$

где $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – произвольные функции, удовлетворяющие части 1 теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 очевидным образом обобщается на случай, когда $\Pi \subseteq \mathbb{R}^2 = \{(\alpha, \beta)\}$ – замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью $\operatorname{Int}\Pi$, причём $\Pi = \overline{\operatorname{Int}\Pi}$, где черта означает замыкание множества. Тогда $\Pi \subseteq [a_0, \alpha_1] \times [\beta_0, \beta_1]$, где $[\alpha_0, \alpha_1]$ – проекция Π на ось α, а $[\beta_0, \beta_1]$ – на ось β (какие-то из величин α_0, α_1, β_0, β_1 при этом могут быть бесконечными). В этом случае справедливость теоремы 2 (называемой ниже обобщённой) вытекает из следующей легко проверяемой леммы.

Лемма. *Пусть* $\mathrm{I}_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$, $a_\lambda < b_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, *– непустое семейство интервалов и* $\phi_\lambda(\alpha)$ *– непрерывно дифференцируемые функции на* I_λ, *причём для любых* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *имеем* $\phi_{\lambda_1}|_{\mathrm{I}_{\lambda_1}\bigcap \mathrm{I}_{\lambda_2}} = \phi_{\lambda_2}|_{\mathrm{I}_{\lambda_1}\bigcap \mathrm{I}_{\lambda_2}} + \mathrm{const}$. *Тогда найдётся непрерывно дифференцируемая функция* $\phi(\alpha)$, *заданная на открытом множестве* $\mathrm{I} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}_\lambda$, *для которой* $\phi|_{\mathrm{I}_\lambda} = \phi_\lambda + \mathrm{const}$ *для всех* $\lambda \in \Lambda$, *где* const *зависит от* λ.

Ниже в качестве Π рассматривается либо замкнутая полуплоскость, граница которой непараллельна осям координат (пп. 2, 3), либо замкнутый тупой угол, ограниченный двумя лучами, исходящими из начала координат (п. 4), либо замкнутая полуполоса, ограниченная двумя параллельными прямыми (п. 5).

Формулы (9) справедливы для $v_{\mathrm{i}} \neq v_{\mathrm{a}}$, при $v_{\mathrm{i}} = v_{\mathrm{a}}$ они теряют смысл. Для $v_{\mathrm{i}} = v_{\mathrm{a}} = v$ общее решение системы (1) получается напрямую, без введения новых координат α и β, интегрированием уравнений этой системы вдоль характеристик. Характеристики системы (1) имеют вид $z(t) = vt + \mathrm{const}$ и различаются значениями const. Пусть $n_{\mathrm{a}}(t) = n_{\mathrm{a}}(t, z(t))$, $n_{\mathrm{i}}(t) = n_{\mathrm{i}}(t, z(t))$ – значения неизвестных функций n_{a}, n_{i} вдоль фиксированной характеристики. Тогда из (1) следует, что функции $n_{\mathrm{a}}(t)$, $n_{\mathrm{i}}(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{dn_{\mathrm{a}}}{dt} = -k_I n_{\mathrm{a}} n_{\mathrm{i}}, \quad \frac{dn_{\mathrm{i}}}{dt} = k_I n_{\mathrm{a}} n_{\mathrm{i}}. \tag{10}$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем первый интеграл системы (10): $d(n_{\mathrm{a}} + n_{\mathrm{i}})/dt \equiv 0$, откуда следует $n_{\mathrm{a}} + n_{\mathrm{i}} \equiv C = \mathrm{const}$. Поскольку $n_{\mathrm{a}} \geqslant 0$, $n_{\mathrm{i}} \geqslant 0$, то $C \geqslant 0$. При $C = 0$ имеем $n_{\mathrm{a}}(t) \equiv 0$, $n_{\mathrm{i}}(t) \equiv 0$ – тривиальное решение системы (10), не имеющее смысла. Поэтому ниже считаем $C > 0$. Тогда $n_{\mathrm{a}} = C - n_{\mathrm{i}}$, и для нахождения n_{i} имеем ОДУ

$$\frac{dn_{\mathrm{i}}}{dt} = k_I n_{\mathrm{i}}(C - n_{\mathrm{i}}). \tag{11}$$

Проинтегрировав, получим

$$\int \frac{dn_{\mathrm{i}}}{n_{\mathrm{i}}(C - n_{\mathrm{i}})} = k_I t + \mathrm{const},$$

откуда

$$\frac{1}{C} \ln \left| \frac{n_{\mathrm{i}}}{C - n_{\mathrm{i}}} \right| = k_I t + \mathrm{const}.$$

Поскольку $n_{\mathrm{i}} \geqslant 0$, $n_{\mathrm{a}} = C - n_{\mathrm{i}} \geqslant 0$, то $0 \leqslant n_{\mathrm{i}} \leqslant C$, и в последнем равенстве знак модуля можно снять. В результате имеем

$$n_{\mathrm{i}} = \frac{CD\exp(Ck_I t)}{1 + D\exp(Ck_I t)}, \quad n_{\mathrm{a}} = C - n_{\mathrm{i}} = \frac{C}{1 + D\exp(Ck_I t)}, \quad D \geqslant 0, \quad C > 0. \tag{12}$$

В случае $D = 0$ получим одно из двух особых решений уравнения (11): $n_{\mathrm{i}} \equiv 0$. Другое особое решение: $n_{\mathrm{i}} \equiv C$. Формулы (12) задают общее решение системы (10) на произвольной характеристике. Константы C и D определяются значениями n_{a}, n_{i} в произвольной точке на рассматриваемой характеристике. В частности, при решении начально-краевых задач для системы (1) значения C и D определяются начальными и граничными условиями (см. ниже).

Применим формулы (9), (12) для решения начально-краевых задач для системы (1), которые представляют основной практический интерес. Ограничимся следующими простейшими задачами.

(I) Начальная задача (задача Коши). В полуплоскости $z \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), для которого выполнены начальные условия $n_{\mathrm{a}}(0, z) = n_{\mathrm{a}}^0(z)$, $n_{\mathrm{i}}(0, z) = n_{\mathrm{i}}^0(z)$, $z \in \mathbb{R}$, где $n_{\mathrm{a}}^0(z)$, $n_{\mathrm{i}}^0(z)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

(II) Краевая задача. Для $v_{\mathrm{a}}, v_{\mathrm{i}} \geqslant 0$ в полуплоскости $z \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), для которого выполнены краевые условия $n_{\mathrm{a}}(t, 0) = n_{\mathrm{a0}}(t)$, $n_{\mathrm{i}}(t, 0) = n_{\mathrm{i0}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $n_{\mathrm{a0}}(t)$, $n_{\mathrm{i0}}(t)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

(III) Начально-краевая (смешанная) задача. Для $v_{\rm a}, v_{\rm i} \geqslant 0$ в первом квадранте $z \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), для которого выполнены начальные условия $n_{\rm a}(0,z) = n_{\rm a}^0(z)$, $n_{\rm i}(0,z) = n_{\rm i}^0(z)$, $z \geqslant 0$, и краевые условия $n_{\rm a}(t,0) = n_{\rm a0}(t)$, $n_{\rm i}(t,0) = n_{\rm i0}(t)$, $t \geqslant 0$, где $n_{\rm a}^0(z)$, $n_{\rm i}^0(z)$, $z \geqslant 0$, $n_{\rm a0}(t)$, $n_{\rm i0}(t)$, $t \geqslant 0$, – заданные непрерывно дифференцируемые функции на полупрямых $z \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$, подчиняющиеся условиям согласования

$$n_{\rm a0}(0) = n_{\rm a}^0(0), \quad n_{\rm i0}(0) = n_{\rm i}^0(0), \quad n_{\rm a0}'(0) + v_{\rm a}(n_{\rm a}^0)'(0) + k_I n_{\rm a0}(0) n_{\rm i0}(0) = 0,$$

$$n_{\rm i0}'(0) + v_{\rm i}(n_{\rm i}^0)'(0) - k_I n_{\rm a0}(0) n_{\rm i0}(0) = 0.$$

(IV) Смешанная задача на отрезке. Для $v_{\rm a} > 0 > v_{\rm i}$ в полуполосе $0 \leqslant z \leqslant L$, $t \geqslant 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям $n_{\rm a}(t,0) = n_{\rm a0}(t)$, $n_{\rm i}(t,L) = n_{\rm i0}(t)$, $t \geqslant 0$, и начальным условиям $n_{\rm a}(0,z) = n_{\rm a}^0(z)$, $n_{\rm i}(0,z) = n_{\rm i}^0(z)$, $0 \leqslant z \leqslant L$, где $n_{\rm a0}(t)$, $n_{\rm i0}(t)$, $t \geqslant 0$, $n_{\rm a}^0(z)$, $n_{\rm i}^0(z)$, $0 \leqslant z \leqslant L$, – заданные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$n_{\rm a0}(0) = n_{\rm a}^0(0), \quad n_{\rm i0}(0) = n_{\rm i}^0(L),$$

$$n_{\rm a0}'(0) + v_{\rm a}(n_{\rm a}^0)'(0) + k_I n_{\rm a}^0(0) n_{\rm i}^0(0) = 0, \quad n_{\rm i0}'(0) + v_{\rm i}(n_{\rm i}^0)'(L) - k_I n_{\rm a}^0(L) n_{\rm i}^0(L) = 0.$$

Более сложные начально-краевые задачи в этой работе не рассматриваются.

Сначала исследуем случай $v_{\rm i} = v_{\rm a} = v$.

Задача Коши (I). Решим её методом характеристик. Пусть точка (z,t) лежит в полуплоскости $t \geqslant 0$, $z \in \mathbb{R}$. Через эту точку проходит единственная характеристика $(vs+\mathrm{const}, s)$ для значения $\mathrm{const} = z - vt$, и она имеет вид $(z + v(s-t), s)$. На этой характеристике решение системы (1) задаётся формулами (12), в которых t нужно заменить на s. С другой стороны, эта характеристика пересекает ось z при $s = 0$ в единственной точке $z - vt$, где известны значения $n_{\rm a}^0(z-vt)$ и $n_{\rm i}^0(z-vt)$. Поэтому в формулах (12) с s вместо t константы C и D находятся из условий $n_{\rm a}(0) = n_{\rm a}^0(z-vt)$, $n_{\rm i}(0) = n_{\rm i}^0(z-vt)$. В результате получаем

$$C = n_{\rm a}^0(z-vt) + n_{\rm i}^0(z-vt), \quad D = n_{\rm i}^0(z-vt)/n_{\rm a}^0(z-vt),$$

$$n_{\rm i}(z,t) = \frac{C(y)D(y)\exp(C(y)k_I t)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad n_{\rm a}(z,t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad y = z - vt.$$

Нетрудно прямой подстановкой в (3) убедиться в том, что полученные формулы задают решение задачи Коши в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Краевая задача (II). Единственная характеристика, проходящая через точку (z,t) полуплоскости $z \geqslant 0$, пересекает ось t в точке $s = t - z/v$, являющейся решением уравнения $z + v(s-t) = 0$, где известны значения $n_{\rm a}$ и $n_{\rm i}$. Поэтому при вычислении констант C и D из формулы (12) с s вместо t нужно в этих формулах положить $s = t - z/v$ и вычислять правые части (12) по формулам $n_{\rm i} = n_{\rm i0}(t - z/v)$, $n_{\rm a} = n_{\rm a0}(t - z/v)$. В итоге получим

$$C = n_{\rm a0}(t - z/v) + n_{\rm i0}(t - z/v), \quad D = \frac{n_{\rm i0}(t - z/v)}{n_{\rm a0}(t - z/v)}\exp(-Ck_I(t - z/v)),$$

$$n_{\rm i}(z,t) = \frac{C(y)D(y)\exp(C(y)k_I t)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad n_{\rm a}(z,t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad y = t - z/v.$$

Нетрудно прямой подстановкой в (3) проверить, что полученные формулы задают решение краевой задачи (II) в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Смешанная задача (III). Пусть $z \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Единственная характеристика, проходящая через точку (z,t) при $z < tv$, пересекает полуось $t \geqslant 0$ в точке $s = t - z/v$, где $n_{\rm a}$, $n_{\rm i}$ известны и задаются краевыми условиями, но не пересекают полуось $z \geqslant 0$. При $z > tv$ эта характеристика пересекает полуось $z \geqslant 0$ в точке $z - vt$, где $n_{\rm a}$, $n_{\rm i}$ известны и задаются начальными условиями, но не пересекают полуось $t \geqslant 0$. При $z = tv$ указанная характеристика пересекает обе полуоси $z \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$ в нулевых точках, где начальные и краевые условия совпадают. Поэтому константы $C = C(y)$, $D = D(y)$ и функции $n_{\mathrm{i}}(z,t)$, $n_{\mathrm{a}}(z,t)$ находятся по формулам

$$C(y) = \begin{cases} n^0_{\mathrm{a}}(z - vt) + n^0_{\mathrm{i}}(z - vt), & z \geqslant tv, \\ n_{\mathrm{a}0}(t - zv^{-1}) + n_{\mathrm{i}0}(t - zv^{-1}), & z \leqslant tv, \end{cases}$$

$$D(y) = \begin{cases} \dfrac{n^0_{\mathrm{i}}(z - vt)}{n^0_{\mathrm{a}}(z - tv)}, & z \geqslant tv, \\ \dfrac{n_{\mathrm{i}0}(t - zv^{-1})}{n_{\mathrm{a}0}(t - zv^{-1})} \exp(-Ck_I(t - z/v)), & z \leqslant tv, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} z - vt, & z \geqslant tv, \\ t - zv^{-1}, & z \leqslant tv. \end{cases}$$

Условия согласования в нуле гарантируют, что функции $C(z,t)$, $D(z,t)$ будут непрерывны и непрерывно дифференцируемы в первом квадранте.

В случае $v = 0$ краевая и смешанная задачи теряют смысл, ионизация в различных точках пространства происходит независимо и определяется только временем. Формулы для n_{a} и n_{i} получаются из приведённых выше формул решения задачи Коши (I), если в них положить $v = 0$. Если $v \leqslant 0$, то краевая задача ставится в полуплоскости $z \leqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$, а смешанная задача – во втором квадранте $z \leqslant 0$, $t \geqslant 0$.

2. Решение задачи Коши (I). Рассмотрим задачу Коши (I) в случае $v_{\mathrm{a}} \neq v_{\mathrm{i}}$. В переменных (α,β) задача состоит в поиске непрерывно дифференцируемого решения системы (3) в полуплоскости $P \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\alpha + \beta \geqslant 0\}$, которое на границе $\alpha + \beta = 0$ этой полуплоскости имеет заданные значения

$$n_{\mathrm{a}}(\alpha,\beta) = n_{\mathrm{a}}(-\beta,\beta) = n^0_{\mathrm{a}}(\alpha v_{\mathrm{a}} + \beta v_{\mathrm{i}}) = n^0_{\mathrm{a}}(\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})), \quad \alpha + \beta = 0,$$

$$n_{\mathrm{i}}(\alpha,\beta) = n_{\mathrm{i}}(-\beta,\beta) = n^0_{\mathrm{i}}(\alpha v_{\mathrm{a}} + \beta v_{\mathrm{i}}) = n^0_{\mathrm{i}}(\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})) \quad \alpha + \beta = 0.$$

Выше был изложен способ решения системы (3) в произвольном прямоугольнике Π. Построим решение системы (3) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq P$, которое на прямой $\alpha + \beta = 0$ совпадает с заданными функциями,

$$n_{\mathrm{a}}|_{\alpha+\beta=0} = n^0_{\mathrm{a}}(\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})), \quad n_{\mathrm{i}}|_{\alpha+\beta=0} = n^0_{\mathrm{i}}(\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})).$$

Если такое решение существует, то его сужение на P даёт, очевидно, искомое решение задачи Коши в переменных (α,β). Согласно теореме 1 решение системы (3) в прямоугольнике Π_∞ определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, и вычисляется по этим функциям посредством формул (4). При этом, согласно теореме 1, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ должны удовлетворять двум условиям:

1) области значений функций $A(\alpha)$, $B(\beta)$ не пересекаются: $A(\mathbb{R}) \bigcap B(\mathbb{R}) = \varnothing$, и тогда, учитывая связность прямой $\mathbb{R}$, либо $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, либо $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$,

2) если $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – монотонно невозрастающие на $\mathbb{R}$ функции, если $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – монотонно неубывающие на $\mathbb{R}$ функции.

Функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ определяются по известным значениям n_{a} и n_{i} на прямой $\alpha+\beta = 0$ (т.е. из начальных условий). Из тождеств (4) получим

$$n^0_{\mathrm{a}}(\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})) = n_{\mathrm{a}}(-\beta,\beta) = B'(\beta)k_I^{-1}(A(-\beta) - B(\beta))^{-1},$$

$$n^0_{\mathrm{i}}(\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})) = n_{\mathrm{i}}(-\beta,\beta) = A'(-\beta)k_I^{-1}(A(-\beta) - B(\beta))^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Обозначим $n_{\mathrm{a}}(\beta) = k_I n^0_{\mathrm{a}}(\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}))$, $n_{\mathrm{i}}(\beta) = k_I n^0_{\mathrm{i}}(\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}))$, $A_0(\beta) = A(-\beta)$. Тогда n_{a} и n_{i} – неотрицательные функции, а условия (13) дают линейную систему ОДУ с переменными коэффициентами для нахождения функций $A_0(\beta)$, $B(\beta)$ на прямой $\mathbb{R}$:

$$B' = n_{\mathrm{a}}(\beta)(A_0 - B), \quad A_0' = -n_{\mathrm{i}}(\beta)(A_0 - B). \tag{14}$$

Поскольку $n_{\mathrm{a}}(\beta),\ n_{\mathrm{i}}(\beta)$ непрерывно дифференцируемы по $\beta,$ то любое решение системы (14) дважды непрерывно дифференцируемо всюду на прямой. Кроме того, для любых $C, D\in\mathbb{R}$ существует, и притом единственное, решение системы (14), для которого $A_0(0)=C,\ B(0)=$ $=D.$ Если $C=D,$ то из теоремы единственности для системы (14) следует, что решение с такими начальными условиями: $A_0(\beta)\equiv C,\ B(\beta)\equiv D.$ Поэтому далее считается, что $C\neq D.$ Из теоремы единственности решения задачи Коши для системы (14) следует, что решение (14) с начальными условиями $A_0(0)=C,\ B(0)=D$ имеет вид

$$B(\beta)=D+(C-D)\int\limits_0^{\beta} n_{\mathrm{a}}(\beta)e^{-N(\beta)}\,d\beta,$$

$$A_0(\beta)=C+(D-C)\int\limits_0^{\beta} n_{\mathrm{i}}(\beta)e^{-N(\beta)}\,d\beta,\quad N(\beta)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int\limits_0^{\beta}(n_{\mathrm{a}}(\beta)+n_{\mathrm{i}}(\beta))\,d\beta. \tag{15}$$

Действительно, обозначим правые части равенств (15) через $\bar B(\beta)$ и $\bar A_0(\beta).$ Очевидно, $\bar B(0)=$ $=D=B(0),\ \bar A_0(0)=C=A_0(0).$ Кроме того, $\bar B(\beta),\ \bar A_0(\beta)$ – решение системы (14). Проверим, например, справедливость первого уравнения (14). Левая его часть равна $\bar B'(\beta)=(C-$ $-D)n_{\mathrm{a}}e^{-N},$ а правая имеет вид

$$n_{\mathrm{a}}(\bar A_0-\bar B)=n_{\mathrm{a}}\biggl(C-D+(D-C)\int\limits_0^{\beta} n_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\beta-(C-D)\int\limits_0^{\beta} n_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta\biggr)=$$

$$=n_{\mathrm{a}}(C-D)\biggl(1-\int\limits_0^{\beta} n_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\beta-\int\limits_0^{\beta} n_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta\biggr)=n_{\mathrm{a}}(C-D)\biggl(1-\int\limits_0^{\beta}(n_{\mathrm{i}}+n_{\mathrm{a}})e^{-N}\,d\beta\biggr)=$$

$$=n_{\mathrm{a}}(C-D)\biggl(1-\int\limits_0^{\beta} N'e^{-N}\,d\beta\biggr)=n_{\mathrm{a}}(C-D)(1+e^{-N}|_0^{\beta})=n_{\mathrm{a}}(C-D)(1+e^{-N}-1)=n_{\mathrm{a}}(C-D)e^{-N}.$$

Тем самым справедливость первого уравнения системы (14) установлена. Аналогично доказывается второе равенство (14). Итак, $\bar A_0(\beta),\ \bar B(\beta)$ – решение (14), удовлетворяющее начальным условиям $\bar A_0(0)=C,\ \bar B(0)=D.$ Осталось воспользоваться теоремой единственности.

Из равенств (15) вытекает справедливость условия 1). Пусть $D>C,$ тогда $A_0(\alpha)<B(\beta)$ (что равносильно $A(\alpha)<B(\beta)$) для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$ В самом деле, это неравенство с учётом тождеств (15) равносильно соотношению

$$\int\limits_0^{\alpha} n_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\alpha+\int\limits_0^{\beta} n_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta<1. \tag{16}$$

Пусть $\gamma>0$ – любая верхняя граница чисел $\alpha,\ \beta.$ Учитывая неотрицательность функций $n_{\mathrm{i}},\ n_{\mathrm{a}},$ левая часть (16), очевидно, не превосходит единицы:

$$\int\limits_0^{\gamma} n_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\beta+\int\limits_0^{\gamma} n_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta=\int\limits_0^{\gamma}(n_{\mathrm{i}}+n_{\mathrm{a}})e^{-N}\,d\beta=\int\limits_0^{\gamma} N'e^{-N}\,d\beta=-e^{-N}|_0^{\gamma}=1-e^{-N(\gamma)}<1,$$

что и доказывает (16). Если $C>D,$ то $B(\beta)<A_0(\alpha)$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$ Последнее неравенство (его несложно проверить с учётом тождеств (15)), тоже равносильно соотношению (16). Тем самым справедливость условия 1) установлена. Если $A(\mathbb{R})<B(\mathbb{R}),$ то правая

часть первого равенства (14) неположительна, а второго равенства – неотрицательна. Поэтому $B(\beta)$ монотонно не возрастает, $A_0(\beta)$ монотонно не убывает на $\mathbb{R}$, и значит, функция $A(\beta) = A_0(-\beta)$ тоже монотонно не возрастает на $\mathbb{R}$. Аналогично устанавливается, что при $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$ функции $B(\beta)$ и $A(\beta)$ монотонно не убывают на $\mathbb{R}$. Тем самым доказана справедливость условия 2).

Итак, согласно теореме 1, формулы (4) с учётом (15) дают решение задачи Коши в переменных $(\alpha, \beta) \in P$:

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = k_I^{-1} n_{\rm a}(\beta) e^{-N(\beta)} \Big(1 - \int\limits_0^{-\alpha} n_{\rm i} e^{-N}\, d\alpha - \int\limits_0^{\beta} n_{\rm a} e^{-N}\, d\beta\Big)^{-1},$$

$$n_{\rm i}(\alpha,\beta) = k_I^{-1} n_{\rm i}(\alpha) e^{-N(\alpha)} \Big(1 - \int\limits_0^{-\alpha} n_{\rm i} e^{-N}\, d\alpha - \int\limits_0^{\beta} n_{\rm a} e^{-N}\, d\beta\Big)^{-1}.$$

В переменных (z, t) получаем следующие формулы:

$$n_{\rm a}(z,t) = n_{\rm a}^0(z - v_{\rm a}t) e^{-N(z-v_{\rm a}t)} \bigg[1 - \frac{k_I}{v_{\rm i} - v_{\rm a}} \Big(\int\limits_0^{z-v_{\rm i}t} n_{\rm i}^0(p) e^{-N(p)}\, dp + \int\limits_0^{z-v_{\rm a}t} n_{\rm a}^0(p) e^{-N(p)}\, dp\Big)\bigg]^{-1},$$

$$n_{\rm i}(z,t) = n_{\rm i}^0(z - v_{\rm i}t) e^{-N(z-v_{\rm i}t)} \bigg[1 - \frac{k_I}{v_{\rm i} - v_{\rm a}} \Big(\int\limits_0^{z-v_{\rm i}t} n_{\rm i}^0(p) e^{-N(p)}\, dp + \int\limits_0^{z-v_{\rm a}t} n_{\rm a}^0(p) e^{-N(p)}\, dp\Big)\bigg]^{-1},$$

$$N(p) = \frac{k_I}{v_{\rm i} - v_{\rm a}} \int\limits_0^{p} [n_{\rm a}^0(q) + n_{\rm i}^0(q)]\, dq, \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{17}$$

где $n_{\rm i}^0(p) \geqslant 0$, $n_{\rm a}^0(p) \geqslant 0$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, и знаменатель в формулах (17) заведомо положителен. Итак, формулы (17) дают аналитическое решение системы (1) при $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$n_{\rm a}(z,0) = n_{\rm a}^0(z), \quad n_{\rm i}(z,0) = n_{\rm i}^0(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Итоговые формулы (17) для решения задачи Коши в координатах (α, β) не зависят от констант C и D, $C \neq D$, определявших функции $A_0(\beta)$, $B(\beta)$. Это не случайно. Если $\bar{A}_0(\beta)$, $\bar{B}(\beta)$ – другие решения системы (14) с начальными условиями $\bar{A}_0(0) = \bar{C}$, $\bar{B}(0) = \bar{D}$, $\bar{C} \neq \bar{D}$, то однозначно определяются константы $R \neq 0$, S, для которых $\bar{C} = RC + S$, $\bar{D} = RD + S$. Рассмотрим функции $RA_0(y) + S$, $RB(y) + S$, которые удовлетворяют системе (14) и начальному условию $\bar{C}$, $\bar{D}$, поэтому, по теореме единственности решения задачи Коши для линейной системы (14), $\bar{A}_0(\beta) \equiv RA_0(\beta) + S$, $\bar{B}(\beta) \equiv RB(\beta) + S$, в частности, $\bar{A}(\alpha) = \bar{A}_0(-\alpha) \equiv RA(\alpha) + S$. Но для таких пар функций $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ и $A(\alpha)$, $B(\beta)$ формулы (4) дают одни и те же значения $n_{\rm a}$, $n_{\rm i}$.

3. Краевая задача (II). Рассмотрим краевую задачу (II) в случае $v_{\rm i} \neq v_{\rm a}$. Анализ этого случая проходит по той же схеме, что и решение задачи Коши выше. Выделим основные моменты. В переменных (α, β) ищем непрерывно дифференцируемое решение системы (3) в полуплоскости $P_0 = \{\alpha v_{\rm a} + \beta v_{\rm i} \geqslant 0\}$, для которого функции $n_{\rm a}$, $n_{\rm i}$ на границе полуплоскости P_0, $\partial P_0 = \{\alpha v_{\rm a} + \beta v_{\rm i} = 0\}$ принимают заданные значения $n_{\rm a}(\alpha,\beta) = n_{\rm a0}(\alpha + \beta)$, $n_{\rm i}(\alpha,\beta) = n_{\rm i0}(\alpha + \beta)$, $\alpha v_{\rm a} + \beta v_{\rm i} = 0$. Построим такое непрерывно дифференцируемое решение системы (3) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq P_0$, которое на границе полуплоскости P_0, т.е. на прямой $\alpha v_{\rm a} + \beta v_{\rm i} = 0$, совпадает с заданными функциями $n_{\rm a0}(\alpha + \beta)$, $n_{\rm i0}(\alpha + \beta)$. Тогда, очевидно, сужение этого решения на P_0 будет искомым решением краевой задачи в координатах (α,β). Согласно теореме 1 искомое решение определяется двумя непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (4). При этом функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ должны удовлетворять условиям 1) и 2), сформулированным в п. 2. Функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ определяются по известным значениям n_{a}, n_{i} на границе P_0. На этой границе $\beta=-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}}$, и значит, согласно (4) имеем

$$n_{\mathrm{a}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})=B'(-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})k_I^{-1}[A(\alpha)-B(-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})]^{-1},$$

$$n_{\mathrm{i}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})=A'(\alpha)k_I^{-1}[A(\alpha)-B(-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})]^{-1},\quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{18}$$

Обозначим

$$n_{\mathrm{a}}(\alpha)=k_I(v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})n_{\mathrm{a}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}}),\quad n_{\mathrm{i}}(\alpha)=k_I n_{\mathrm{i}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}}),\quad B_0(\alpha)=B(-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}}).$$

Тогда краевое условие (18) даёт линейную систему ОДУ на прямой с переменными коэффициентами для нахождения функций $A(\alpha)$, $B_0(\alpha)$:

$$B_0'=-n_{\mathrm{a}}(\alpha)(A-B_0),\quad A'=n_{\mathrm{i}}(\alpha)(A-B_0). \tag{19}$$

Поскольку функции $n_{\mathrm{a}}(\alpha)$, $n_{\mathrm{i}}(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы, то любое решение системы (19) дважды непрерывно дифференцируемо и определено на всей прямой. Рассмотрим решение задачи Коши для системы (19) с начальными условиями $A(0)=C\neq B_0(0)=D$. Несложно проверить, что это решение вычисляется по формулам (см. выше)

$$B_0(\alpha)=D+(D-C)\int\limits_0^{\alpha}n_{\mathrm{a}}e^N\,d\alpha,\quad A(\alpha)=C+(C-D)\int\limits_0^{\alpha}n_{\mathrm{i}}e^N\,d\alpha,\quad N(\alpha)\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_0^{\alpha}(n_{\mathrm{a}}+n_{\mathrm{i}})\,d\alpha. \tag{20}$$

С помощью формул (20) обосновывается (см. выше) справедливость условий 1) и 2) для функций $A(\alpha)$, $B(\beta)=B_0(-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}})$. Условие (16) при этом заменяется на следующее:

$$1+\int\limits_0^{\alpha}n_{\mathrm{i}}e^N\,d\alpha+\int\limits_0^{\beta}n_{\mathrm{a}}e^N\,d\beta>0,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}. \tag{21}$$

И если $C>D$, то $A(\alpha)>B(\beta)$, а при $C<D$ имеем $A(\alpha)<B(\beta)$ для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

По формулам (4) с учётом выражений (20) получим решение краевой задачи в координатах $(\alpha,\beta)\in P_0$:

$$n_{\mathrm{a}}(\alpha,\beta)=\frac{v_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{a}}}n_{\mathrm{a}}(-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}})e^{N(-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}})}\frac{1}{k_I}\left[1+\int\limits_0^{\alpha}n_{\mathrm{i}}e^N\,d\alpha+\int\limits_0^{-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}}n_{\mathrm{a}}e^N\,d\beta\right]^{-1},$$

$$n_{\mathrm{i}}(\alpha,\beta)=n_{\mathrm{i}}(\alpha)e^{N(\alpha)}\frac{1}{k_I}\left[1+\int\limits_0^{\alpha}n_{\mathrm{i}}e^N\,d\alpha+\int\limits_0^{-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}}n_{\mathrm{a}}e^N\,d\beta\right]^{-1}.$$

Подставляя в эти формулы $\alpha=(tv_{\mathrm{i}}-z)/(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})$, $\beta=(z-tv_{\mathrm{a}})/(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})$, получаем после несложных преобразований решение краевой задачи в переменных (z,t):

$$n_{\mathrm{a}}(z,t)=n_{\mathrm{a}0}(t-z/v_{\mathrm{a}})e^{N(t-z/v_{\mathrm{a}})}\left[1+\frac{k_I}{v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_{\mathrm{i}}}v_{\mathrm{i}}n_{\mathrm{i}0}(p)e^{N(p)}\,dp+\int\limits_0^{t-z/v_{\mathrm{a}}}v_{\mathrm{a}}n_{\mathrm{a}0}(p)e^{N(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$n_{\rm i}(z,t)=n_{\rm i0}(t-z/v_{\rm i})e^{N(t-z/v_{\rm i})}\left[1+\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_{\rm i}} v_{\rm i}n_{\rm i0}(p)e^{N(p)}\,dp+\int\limits_0^{t-z/v_{\rm a}} v_{\rm a}n_{\rm a0}(p)e^{N(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$N(p)=\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\int\limits_0^p [v_{\rm a}n_{\rm a0}(q)+v_{\rm i}n_{\rm i0}(q)]\,dq, \tag{22}$$

где $n_{\rm a0}(p)\geqslant 0$, $n_{\rm i0}(p)\geqslant 0$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, и знаменатель в (22), согласно неравенству (21), заведомо положителен. Итак, формулы (22) дают аналитическое решение системы (1) в полуплоскости $z\geqslant 0$, удовлетворяющее краевому условию $n_{\rm a}(0,t)=n_{\rm a0}(t)$, $n_{\rm i}(0,t)=n_{\rm i0}(t)$ для всех $t\in\mathbb{R}$.

4. Решение смешанной задачи (III). Рассмотрим смешанную задачу (III) в случае $v_{\rm a}>0$, $v_{\rm i}>0$, $v_{\rm a}\neq v_{\rm i}$. В координатах (α,β) её решение сводится к поиску в тупом угле $\Lambda\overset{\rm def}{=}\{(\alpha,\beta)\,:\,\alpha+\beta\geqslant 0,\ \ \alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}\geqslant 0\}$ непрерывно дифференцируемых функций $n_{\rm a}(\alpha,\beta)$, $n_{\rm i}(\alpha,\beta)$, удовлетворяющих системе (3) и имеющих заданные значения на границе угла $\partial\Lambda$. Последнее множество состоит из двух лучей, которые обозначим Λ_t и Λ_z:

$$\partial\Lambda=\Lambda_t\bigcup\Lambda_z,\quad \Lambda_t\bigcap\Lambda_z=\{(0,0)\},\quad \Lambda_t=\phi\{(t,0):t\geqslant 0\},\quad \Lambda_z=\phi\{(0,z):z\geqslant 0\}.$$

В зависимости от $v_{\rm i}$, $v_{\rm a}$ угол Λ и лучи Λ_t, Λ_z показаны на рис. 1.

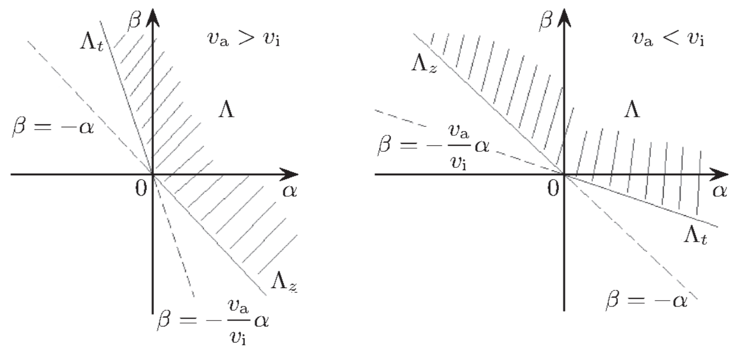

Рис. 1. Угол Λ и лучи Λ_t, Λ_z в зависимости от $v_{\rm i}$, $v_{\rm a}$.

Значения искомого решения на лучах Λ_t, Λ_z определяются равенствами

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta)=n_{\rm a0}(\alpha+\beta),\quad n_{\rm i}(\alpha,\beta)=n_{\rm i0}(\alpha+\beta),\quad (\alpha,\beta)\in\Lambda_t,\quad \alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}=0,\quad \alpha+\beta\geqslant 0;$$

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta)=n_{\rm a}^0(\alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}),\quad n_{\rm i}(\alpha,\beta)=n_{\rm i}^0(\alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}),\quad (\alpha,\beta)\in\Lambda_z,\quad \alpha+\beta=0,\quad \alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}\geqslant 0.$$

Проведём построение искомого решения для случая $v_{\rm i}>v_{\rm a}$. Для нахождения решения в угле Λ построим непрерывно дифференцируемое решение системы (3) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\supseteq\Lambda$, которое на лучах Λ_t и Λ_z совпадает с указанными выше значениями. Тогда сужение построенного решения в прямоугольнике Π_∞ на угле Λ даст решение смешанной задачи. Решение системы (3) в Π_∞, согласно теореме 1, определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми в $\mathbb{R}$ функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (4). Покажем, что функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ однозначно определяются значениями искомого решения на лучах Λ_t и Λ_z. На луче Λ_t $(\beta=-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i})$ имеем

$$n_{\rm a0}\left(\alpha\frac{v_{\rm i}-v_{\rm a}}{v_{\rm i}}\right)=n_{\rm a}(\alpha,\beta)\overset{(4)}{=}\frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))}=\frac{B'(-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i})}{k_I(A(\alpha)-B(-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i}))},\quad \alpha\geqslant 0,$$

$$n_{\rm i0}\left(\alpha\frac{v_{\rm i}-v_{\rm a}}{v_{\rm i}}\right)=n_{\rm i}(\alpha,\beta)\overset{(4)}{=}\frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))}=\frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i}))},\quad \alpha\geqslant 0,$$

а на луче Λ_z $(\beta=-\alpha)$

$$n_{\mathrm{a}0}(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}))=n_{\mathrm{a}}(\alpha,\beta)\overset{(4)}{=}\frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))}=\frac{B'(\beta)}{k_I(A(-\beta)-B(\beta))},\quad \beta\geqslant 0,$$

$$n_{\mathrm{i}0}(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}))=n_{\mathrm{i}}(\alpha,\beta)\overset{(4)}{=}\frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))}=\frac{A'(-\beta)}{k_I(A(-\beta)-B(\beta))},\quad \beta\geqslant 0. \tag{23}$$

Рассмотрим функции $B_0(\alpha)\overset{\mathrm{def}}{=}B(-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})$, $A_0(\beta)\overset{\mathrm{def}}{=}A(-\beta)$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$. Тогда на полупрямой $\alpha\geqslant 0$ функции $B_0(\alpha)$, $A(\alpha)$, согласно (23), удовлетворяют линейной системе ОДУ с переменными коэффициентами:

$$B_0'=-\bar n_{\mathrm{a}0}(\alpha)(A-B_0),\quad A'=\bar n_{\mathrm{i}0}(\alpha)(A-B_0),\quad \alpha\geqslant 0,$$

$$\bar n_{\mathrm{a}0}(\alpha)\overset{\mathrm{def}}{=}k_I\frac{v_{\mathrm{a}}}{v_{\mathrm{i}}}n_{\mathrm{a}0}\Big(\alpha\frac{v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}}{v_{\mathrm{i}}}\Big),\quad \bar n_{\mathrm{i}0}(\alpha)\overset{\mathrm{def}}{=}k_I n_{\mathrm{i}0}\Big(\alpha\frac{v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}}{v_{\mathrm{i}}}\Big), \tag{24}$$

а на полупрямой $\beta\geqslant 0$ функции $B(\beta)$, $A_0(\beta)$, согласно (23), удовлетворяют линейной системе ОДУ с переменными коэффициентами:

$$B'=\bar n^0_{\mathrm{a}}(\beta)(A_0-B),\quad A_0'=-\bar n^0_{\mathrm{i}}(\beta)(A_0-B),\quad \beta\geqslant 0,$$

$$\bar n^0_{\mathrm{a}}(\beta)\overset{\mathrm{def}}{=}k_I n^0_{\mathrm{a}}(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})),\quad \bar n^0_{\mathrm{i}}(\beta)\overset{\mathrm{def}}{=}k_I n^0_{\mathrm{i}}(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})). \tag{25}$$

Решив системы (24), (25), найдём функции $B_0(\alpha)$, $A(\alpha)$, $\alpha\geqslant 0$, и $B(\beta)$, $A_0(\beta)$, $\beta\geqslant 0$, после чего доопределим A и B в областях отрицательных значений аргументов равенствами

$$B(\beta)\overset{\mathrm{def}}{=}B_0(-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}),\quad \beta\geqslant 0,\quad A(\alpha)=A_0(-\alpha),\quad \alpha\leqslant 0. \tag{26}$$

Полученные функции A и B на прямой являются искомыми, если выбрать решения систем (24) и (25) с одинаковыми начальными условиями $A(0)=C$, $B_0(0)=D$ и $A_0(0)=C$, $B(0)= =D$, где $C\neq D$. Тогда функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ будут непрерывны на $\mathbb{R}$, а из (26) следует их непрерывная дифференцируемость в нуле:

$$A'(0+)\overset{(24)}{=}k_I n_{\mathrm{i}0}(0)(A(0)-B_0(0))=k_I n_{\mathrm{i}0}(0)(C-D),$$

$$A'(0-)\overset{(26)}{=}-A_0'(0)\overset{(25)}{=}k_I n^0_{\mathrm{i}}(0)(A_0(0)-B(0))=k_I n^0_{\mathrm{i}}(0)(C-D),$$

$$B'(0+)\overset{(25)}{=}k_I n^0_{\mathrm{a}}(0)(A_0(0)-B(0))=k_I n^0_{\mathrm{a}}(0)(C-D),$$

$$B'(0-)\overset{(26)}{=}-(v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}})B_0'(0)\overset{(24)}{=}k_I n_{\mathrm{a}0}(0)(A(0)-B_0(0))=k_I n_{\mathrm{a}0}(0)(C-D).$$

Из этих вычислений и условий согласования $n_{\mathrm{i}0}(0)=n^0_{\mathrm{i}}(0)$, $n_{\mathrm{a}0}(0)=n^0_{\mathrm{a}}(0)$ следует, что $A'(0+)=A'(0-)$, $B'(0+)=B'(0-)$, поэтому A и B непрерывно дифференцируемы в нуле и, значит, на $\mathbb{R}$. Покажем, что при выполнении условий согласования

$$n'_{\mathrm{a}0}(0)+v_{\mathrm{a}}(n^0_{\mathrm{a}})'(0)+k_I n_{\mathrm{a}0}(0)n_{\mathrm{i}0}(0)=0,\quad n'_{\mathrm{i}0}(0)+v_{\mathrm{i}}(n^0_{\mathrm{i}})'(0)-k_I n_{\mathrm{a}0}(0)n_{\mathrm{i}0}(0)=0 \tag{27}$$

вторые производные в нуле для A и B слева и справа совпадают: $A''(0+)=A''(0-)$, $B''(0+)= =B''(0-)$. Тогда из (24), (25) следует двукратная непрерывная дифференцируемость функций A и B на $\mathbb{R}$. Например, покажем равенство $A''(0+)=A''(0-)$; $B''(0+)=B''(0-)$ проверяется аналогично. Имеем

$$A''(0+)\overset{(24)}{=}\bar n'_{\mathrm{i}0}(0)(A(0)-B_0(0))+\bar n_{\mathrm{i}0}(0)(A'(0)-B_0'(0))\overset{(24)}{=}$$

$$\overset{(24)}{=} n'_{\mathrm{i}0}(0)k_I((v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})(C-D)+n_{\mathrm{i}0}(0)k_I(n_{\mathrm{i}0}k_I(C-D)+n_{\mathrm{a}0}(0)k_I(v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})(C-D))=$$
$$=k_I(C-D)\{n'_{\mathrm{i}0}(0)(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}}+k_I n_{\mathrm{i}0}(0)(n_{\mathrm{i}0}(0)+n_{\mathrm{a}0}(0)v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})\},$$
$$A''(0-)\overset{(26)}{=}A''_0(0)\overset{(25)}{=}-(\bar n^0_{\mathrm{i}})'(0)(A_0(0)-B(0))-\bar n^0_{\mathrm{i}}(0)(A'_0(0)-B'(0))\overset{(25)}{=}$$
$$\overset{(25)}{=}-(n^0_{\mathrm{i}})'(0)(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})k_I(C-D)-n^0_{\mathrm{i}}(0)k_I(-n^0_{\mathrm{i}}(0)k_I(C-D)-n^0_{\mathrm{a}}(0)k_I(C-D))=$$
$$=k_I(C-D)\{-(n^0_{\mathrm{i}})'(0)(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})+k_I n^0_{\mathrm{i}}(0)(n^0_{\mathrm{i}}(0)+n^0_{\mathrm{a}}(0))\}.$$

Учитывая условия согласования $n_{\mathrm{i}0}(0)=n^0_{\mathrm{i}}(0)$, $n_{\mathrm{a}0}(0)=n^0_{\mathrm{a}}(0)$ и второе равенство (27), заключаем, что $A''(0+)=A''(0-)$.

Чтобы проверить условия 1) и 2) и преобразовать к удобному для анализа виду формулы (4), воспользуемся явными выражениями решений задач Коши для систем (25), (24). Несложно проверить (см. аналогичное рассуждение выше), что для этих решений справедливы тождества

$$B(\beta)=D+(C-D)\int_0^\beta \bar n^0_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta,\quad A_0(\beta)=C+(D-C)\int_0^\beta \bar n^0_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\beta,\quad \beta\geqslant 0, \tag{28}$$

$$B_0(\alpha)=D+(D-C)\int_0^\alpha \bar n_{\mathrm{a}0}e^{M}\,d\alpha,\quad A(\alpha)=C+(C-D)\int_0^\alpha \bar n_{\mathrm{i}0}e^{M}\,d\alpha,\quad \alpha\geqslant 0, \tag{29}$$

$$N(\beta)=\int_0^\beta(\bar n^0_{\mathrm{a}}+\bar n^0_{\mathrm{a}})\,d\beta,\quad M(\alpha)=\int_0^\alpha(\bar n_{\mathrm{a}0}+\bar n_{\mathrm{i}0})\,d\alpha.$$

Значит, согласно (26), функции $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ вычисляются по формулам

$$A(\alpha)=\begin{cases} C+(D-C)\displaystyle\int_0^{-\alpha}\bar n^0_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\alpha, & \alpha\leqslant 0,\\ C+(C-D)\displaystyle\int_0^{\alpha}\bar n_{\mathrm{i}0}e^{M}\,d\alpha, & \alpha\geqslant 0,\end{cases}\qquad B(\beta)=\begin{cases} D+(D-C)\displaystyle\int_0^{-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}}\bar n_{\mathrm{a}0}e^{M}\,d\beta, & \beta\leqslant 0,\\ D+(C-D)\displaystyle\int_0^{\beta}\bar n^0_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta, & \beta\geqslant 0.\end{cases} \tag{30}$$

Пусть $D>C$, тогда выполнено неравенство $A(\alpha)<B(\beta)$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Действительно, указанное неравенство, с учётом (30), сводится к следующему эквивалентному виду в каждом из четырёх логически возможных случаев:

$$\int_0^{-\alpha}\bar n^0_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\alpha+\int_0^{\beta}\bar n^0_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta<1,\quad \alpha\leqslant 0,\quad \beta\geqslant 0,$$

$$\int_0^{-\alpha}\bar n^0_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\alpha-\int_0^{-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}}\bar n_{\mathrm{a}0}e^{M}\,d\beta<1,\quad \alpha\leqslant 0,\quad \beta\leqslant 0,$$

$$-\int_0^{\alpha}\bar n_{\mathrm{i}0}e^{M}\,d\alpha+\int_0^{\beta}\bar n^0_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta<1,\quad \alpha\geqslant 0,\quad \beta\geqslant 0,$$

$$-\int_0^\alpha \bar n_{\mathrm{i}0}e^M\,d\alpha-\int_0^{-\beta v_\mathrm{i}/v_\mathrm{a}}\bar n_{\mathrm{a}0}e^M\,d\beta<1,\quad \alpha\geqslant 0,\quad \beta\leqslant 0. \tag{31}$$

Справедливость неравенств (31) в случаях $\alpha\leqslant 0,\ \beta\geqslant 0$ (см. (16)) и $\alpha\geqslant 0,\ \beta\leqslant 0$ (см. (21)) была установлена выше. В случае $\alpha\leqslant 0,\ \beta\leqslant 0,$ учитывая неотрицательность всех подынтегральных функций, имеем цепочку оценок:

$$\int_0^{-\alpha}\bar n_\mathrm{i}^0e^{-N}\,d\alpha-\int_0^{-\beta v_\mathrm{i}/v_\mathrm{a}}\bar n_{\mathrm{a}0}e^M\,d\beta\leqslant\int_0^{-\alpha}\bar n_\mathrm{i}^0e^{-N}\,d\alpha\leqslant\int_0^{-\alpha}(\bar n_\mathrm{i}^0+\bar n_\mathrm{a}^0)e^{-N}\,d\alpha=\int_0^{-\alpha}N'e^{-N}\,d\alpha=$$

$$=-e^{-N}\big|_0^{N(-\alpha)}<1.$$

Аналогично в случае $\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0$ имеем оценки

$$-\int_0^\alpha\bar n_{\mathrm{i}0}e^M\,d\alpha+\int_0^\beta\bar n_\mathrm{a}^0e^{-N}\,d\beta\leqslant\int_0^\beta\bar n_\mathrm{a}^0e^{-N}\,d\beta\leqslant\int_0^\beta(\bar n_\mathrm{a}^0+\bar n_\mathrm{i}^0)e^{-N}\,d\beta=\int_0^\beta N'e^{-N}\,d\beta=$$

$$=-e^{-N}\big|_0^{N(\beta)}<1.$$

Итак, соотношения (31) установлены и, значит, установлена справедливость неравенства $A(\alpha)<B(\beta)$ для всех $\alpha,\ \beta.$ Если $D<C,$ то точно так же проверяется неравенство $B(\beta)<$ $<A(\alpha)$ для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$ Далее, если $A(\alpha)<B(\beta)$ для всех $\alpha,\ \beta,$ то из второго уравнения (24) и равенств (26) следует, что $A'(\alpha)\leqslant 0$ для $\alpha\geqslant 0,$ а из второго уравнения (25) и равенств (26) следует $A_0'(\beta)\geqslant 0$ для $\beta\geqslant 0,$ но тогда из (26) вытекает неравенство $A'(\alpha)\leqslant 0$ для $\alpha\leqslant 0.$ Итак, при всех $\alpha\in\mathbb{R}$ имеем $A'(\alpha)\leqslant 0.$ Аналогично устанавливается, что $B'(\beta)\leqslant 0$ для всех $\beta\in\mathbb{R}.$ Если $A(\alpha)>B(\beta)$ для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{R},$ то точно так же проверяется, что $A'(\alpha)\geqslant 0,\ \ B'(\beta)\geqslant 0$ для всех $\alpha,\ \beta.$ Тем самым условие 2) установлено.

Наконец, преобразуем формулы (4), задающие решение системы (3) в прямоугольнике $\Pi_\infty\supseteq\Lambda,$ в каждом из четырёх квадрантов плоскости $(\alpha,\beta).$ При этом ограничимся только квадрантами I, II, IV, квадрант III $(\alpha\leqslant 0,\ \beta\leqslant 0),$ исключим из рассмотрения, поскольку тупой угол $\Lambda,$ согласно рис. 1, лежит в объединении квадрантов I, II, IV, а с квадрантом III пересекается только по нулевой точке. Для удобства введём в рассмотрение функции

$$N_*(p)\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{k_I}{v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}}\int_0^p(n_\mathrm{a}^0(q)+n_\mathrm{i}^0(q))\,dq,\quad M_*(p)\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{k_I}{v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}}\int_0^p(v_\mathrm{a}n_{\mathrm{a}0}(q)+v_\mathrm{i}n_{\mathrm{i}0}(q))\,dq. \tag{32}$$

Тогда $N(\beta)=N_*(\beta(v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a})),\ \ M(\alpha)=M_*(\alpha(v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a})/v_\mathrm{i})$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

Для $\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0$ имеем

$$n_\mathrm{a}(\alpha,\beta)\overset{(4)}{=}\frac{B'(\beta)}{k_I[A(\alpha)-B(\beta)]}\overset{(30)}{=}$$

$$\overset{(30)}{=}(C-D)\bar n_\mathrm{a}^0(\beta)e^{-N(\beta)}\frac{1}{k_I}\bigg[(C-D)+(C-D)\int_0^\alpha\bar n_{\mathrm{i}0}(\alpha)e^{M(\alpha)}\,d\alpha-(C-D)\int_0^\beta\bar n_\mathrm{a}^0(\beta)e^{-N(\beta)}\,d\beta\bigg]^{-1}=$$

$$=n_\mathrm{a}^0(\beta(v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}))e^{-N_*(\beta(v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}))}\times$$

$$\times\bigg[1+k_I\int_0^\alpha n_{\mathrm{i}0}(\alpha(v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a})/v_\mathrm{i})e^{M_*(\alpha(v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a})/v_\mathrm{i})}\,d\alpha-k_I\int_0^\beta n_\mathrm{a}^0(\beta(v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}))e^{-N_*(\beta(v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}))}\,d\beta\bigg]^{-1}=$$

$$= n_{\rm a}^0(\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a}))e^{-N_*(\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a}))}\times$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm i}} v_{\rm i}n_{\rm i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp-\int\limits_0^{\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a})} n_{\rm a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1}.$$

Аналогично

$$n_{\rm i}(\alpha,\beta)\overset{(4)}{=}\frac{A'(\beta)}{k_I[A(\alpha)-B(\beta)]}\overset{(30)}{=}$$

$$\overset{(30)}{=}(C-D)\bar n_{\rm i0}(\alpha)e^{M(\alpha)}\frac{1}{k_I}\left[(C-D)+(C-D)\int\limits_0^{\alpha}\bar n_{\rm i0}(\alpha)e^{M(\alpha)}\,d\alpha-(C-D)\int\limits_0^{\beta}\bar n_{\rm a}^0(\beta)e^{-N(\beta)}\,d\beta\right]^{-1}=$$

$$= n_{\rm i0}(\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm i})e^{M_*(\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm i})}\times$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm i}} v_{\rm i}n_{\rm i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp-\int\limits_0^{\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a})} n_{\rm a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1}.$$

Для двух других квадрантов аналогичные подсчёты с использованием формул (4), (30) дают для $\alpha\geqslant 0,\ \ \beta\leqslant 0$

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta)=n_{\rm i0}(-\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm i})e^{M_*(-\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm a})}\times$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm i}} v_{\rm i}n_{\rm i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{-\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm a}} v_{\rm a}n_{\rm a0}(p)e^{M_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$n_{\rm i}(\alpha,\beta)=n_{\rm i0}(\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm i})e^{M_*(\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm i})}\times$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm i}} v_{\rm i}n_{\rm i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{-\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm a}} v_{\rm a}n_{\rm a0}(p)e^{M_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1};$$

для $\alpha\leqslant 0,\ \ \beta\geqslant 0$

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta)=n_{\rm a}^0(\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a}))e^{-N_*(\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a}))}\times$$

$$\times\left[1-\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{-\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})} n_{\rm i}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a})} n_{\rm a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$n_{\rm i}(\alpha,\beta)=n_{\rm i}^0(-\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a}))e^{-N_*(-\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a}))}\times$$

$$\times\left[1-\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{-\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})} n_{\rm i}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a})} n_{\rm a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1}.$$

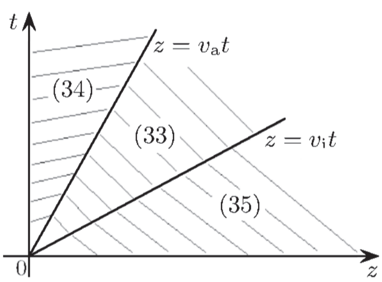

Рис. 2. Области нахождения решения смешанной задачи.

Осталось перейти в полученных формулах от координат (α,β) к координатам (z,t), учитывая преобразование (2). При этом $\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a})=z-v_{\rm a}t$, $-\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})=z-v_{\rm i}t$, $\alpha(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm i}=t-z/v_{\rm i}$, $-\beta(v_{\rm i}-v_{\rm a})/v_{\rm a}=t-z/v_{\rm a}$. В итоге первый квадрант плоскости (z,t), где ищется решение смешанной задачи для системы (1), прямыми $z=v_{\rm a}t$, $z=v_{\rm i}t$ делится на три области (показаны на рис. 2), в каждой из которых решение задаётся одной из групп формул:

$$n_{\rm a}(z,t)=n_{\rm a}^0(z-v_{\rm a}t)e^{-N_*(z-v_{\rm a}t)}\times$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_\mathrm{i}} v_\mathrm{i} n_\mathrm{i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp-\int\limits_0^{z-v_\mathrm{a}t} n_\mathrm{a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$n_\mathrm{i}(z,t)=n_\mathrm{i0}(t-z/v_\mathrm{i})e^{M_*(t-z/v_\mathrm{i})}\times$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_\mathrm{i}} v_\mathrm{i} n_\mathrm{i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp-\int\limits_0^{z-v_\mathrm{a}t} n_\mathrm{a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1}; \tag{33}$$

$$n_\mathrm{a}(z,t)=\frac{n_\mathrm{a0}(t-z/v_\mathrm{a})e^{M_*(t-z/v_\mathrm{a})}}{\times}$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_\mathrm{i}} v_\mathrm{i} n_\mathrm{i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{t-z/v_\mathrm{a}} v_\mathrm{a} n_\mathrm{a0}(p)e^{M_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$n_\mathrm{i}(z,t)=n_\mathrm{i0}(t-z/v_\mathrm{i})e^{M_*(t-z/v_\mathrm{i})}\times$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_\mathrm{i}} v_\mathrm{i} n_\mathrm{i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{t-z/v_\mathrm{a}} v_\mathrm{a} n_\mathrm{a0}(p)e^{M_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1}; \tag{34}$$

$$n_\mathrm{a}(z,t)=n_\mathrm{a}^0(z-v_\mathrm{a}t)e^{-N_*(z-v_\mathrm{a}t)}\times$$

$$\times\left[1-\frac{k_I}{v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}}\left(\int\limits_0^{z-v_\mathrm{i}t} n_\mathrm{i}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{z-v_\mathrm{a}t} n_\mathrm{a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$n_\mathrm{i}(z,t)=n_\mathrm{i}^0(z-v_\mathrm{i}t)e^{-N_*(z-v_\mathrm{i}t)}\times$$

$$\times\left[1-\frac{k_I}{v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}}\left(\int\limits_0^{z-v_\mathrm{i}t} n_\mathrm{i}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{z-v_\mathrm{a}t} n_\mathrm{a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1}. \tag{35}$$

Формулы (33) и (34) на луче $z=v_\mathrm{a}t,\ t\geqslant 0,$ и формулы (33) и (35) на луче $z=v_\mathrm{i}t,\ t\geqslant 0,$ очевидно, совпадают. При $z=0$ формула (34) даёт краевые условия $n_\mathrm{a0}(t),\ n_\mathrm{i0}(t),\ t\geqslant 0,$ а при $t=0$ формула (35) даёт начальные условия $n_\mathrm{a}^0(z),\ n_\mathrm{i}^0(z),\ z\geqslant 0.$ Итак, формулы (33)–(35), с учётом выражений (32), полностью определяют решение смешанной задачи для системы (1) по известным граничным $n_\mathrm{a0}(t),\ n_\mathrm{i0}(t),\ t\geqslant 0,$ и начальным $n_\mathrm{a}^0(z),\ n_\mathrm{i}^0(z),\ z\geqslant 0$ условиям.

5. Начально-краевая задача на отрезке (IV). Решение задачи (IV) в переменных (α,β) сводится к решению системы (3) в полуполосе

$$\Pi=\{(\alpha,\beta):\alpha+\beta\geqslant 0,\quad 0\leqslant \alpha v_\mathrm{a}+\beta v_\mathrm{i}\leqslant L\}.$$

Множество Π является замкнутым выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^2$, причём $\Pi=\overline{\operatorname{Int}\Pi}$, а проекции Π на координатные оси α и β равны, соответственно, $[0,+\infty)$ и $[\beta_0,+\infty)$, где $\beta_0=L/\Delta,\ \Delta=v_\mathrm{i}-v_\mathrm{a}<0.$ Согласно обобщённой теореме 2 решение системы (3) в замкнутой области Π определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $\alpha\geqslant 0,\ B(\beta),\ \beta\geqslant\beta_0,$ для которых $A(\alpha)\neq B(\beta),\ \alpha,\beta\in\Pi,$ и оно задаётся формулами (4). Эти функции определяются однозначно начальными и граничными условиями задачи (IV), которые в переменных (α,β) примут вид

$$n_\mathrm{a}(\alpha,-\alpha)=n_\mathrm{a}^0(-\alpha\Delta),\quad n_\mathrm{i}(\alpha,-\alpha)=n_\mathrm{i}^0(-\alpha\Delta),\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0=-\beta_0, \tag{36}$$

$$n_a(\alpha, -\alpha v_a/v_i) = n_{a0}(\alpha\Delta/v_i), \quad \alpha \geqslant 0,$$
$$n_a(\alpha, -\alpha v_a/v_i + L/v_i) = n_{a0}(\alpha\Delta/v_i + L/v_i), \quad \alpha \geqslant \alpha_0. \tag{37}$$

Граница $\partial\Pi$ множества Π состоит из замкнутого отрезка $[a, b]$, $a = (0, 0)$, $b = (\alpha_0, \beta_0)$, и двух замкнутых параллельных лучей $[a, \infty)$ и $[b, \infty)$, являющихся графиками функций $\alpha(\beta) = -\beta v_i/v_a$ и $\beta(\alpha) = -\alpha v_a/v_i + L/v_i$ соответственно. Условия (36), (37) означают, что известны значения функции n_a на части границы $\partial\Pi$, состоящей из объединения $[a, b] \bigcup [a, \infty)$, а функции n_i – на границе $[a, b] \bigcup [b, \infty)$. Для определения функций $A(\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, $B(\beta)$, $\beta \geqslant \beta_0$, построим рекуррентно их сужения на отрезках $[0, \alpha_0]$, $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\alpha_1, \alpha_2]$, $\ldots$ (для $A(\alpha)$) и отрезках $[\beta_0, \beta_1]$, $[\beta_1, \beta_2]$, $[\beta_2, \beta_3]$, $\ldots$ (для $B(\beta)$), имеющие непересекающиеся внутренности и дающие разбиение областей определения этих функций: $[0, +\infty] = [0, \alpha_0] \bigcup (\bigcup_{k=1}^{\infty} [\alpha_{k-1}, \alpha_k])$, $[\beta_0, +\infty] = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\beta_{k-1}, \beta_k]$. Здесь $\beta_k = L/\Delta - kL/v_i$, $\alpha_k = kL/v_a - L/\Delta$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Обозначим $A_0 = A|_{[0,\alpha_0]}$, $A_k = A|_{[\alpha_{k-1},\alpha_k]}$, $k \geqslant 1$, $B_k = B|_{[\beta_{k-1},\beta_k]}$, $k \geqslant 1$, $B_0 = B|_{[\beta_0,0]} = B_1|_{[\beta_0,0]}$, $B_* = B|_{[0,\beta_1]} = B_1|_{[0,\beta_1]}$.

Из формул (4) и начальных условий (36) следует, что функции $A_0(\alpha)$, $B_0(\beta)$ являются решениями задачи Коши для линейной системы уравнений

$$A_0'(\alpha) = k_I \bar{n}_i(\alpha)[A_0(\alpha) - B_0(-\alpha)], \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0,$$
$$B_0'(\beta) = k_I \bar{n}_a(\alpha)[A_0(-\beta) - B_0(\beta)], \quad \beta_0 \leqslant \beta \leqslant 0,$$
$$A_0(0) = C, \quad B_0(0) = D, \quad \bar{n}_i(\alpha) = n_i^0(-\alpha\Delta), \quad \bar{n}_a(\beta) = n_a^0(\beta\Delta), \tag{38}$$

где C и D, $C \neq D$, – произвольные константы. Нетрудно указать явный вид решения системы (38):

$$A_0(\alpha) = C + (C - D)\int\limits_0^{\alpha} k_I \bar{n}_i(\alpha) e^{N(\alpha)}\, d\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0,$$

$$B_0(\beta) = D + (D - C)\int\limits_0^{-\beta} k_I \bar{n}_a(-\alpha) e^{N(\alpha)}\, d\alpha, \quad \beta_0 \leqslant \beta \leqslant 0,$$

$$N(\alpha) = k_I \int\limits_0^{\alpha} [\bar{n}_i(\alpha) + \bar{n}_a(-\alpha)]\, d\alpha, \quad \alpha \geqslant 0.$$

Функция $B_*(\beta)$, $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$, в силу (4) и граничного условия (37) ищется как решение задачи Коши для линейного уравнения

$$B_*'(\beta) = k_I n_a(\beta)[A_0(\alpha(\beta)) - B_*(\beta)], \quad B_*(0) = D, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1, \tag{39}$$

где $\alpha(\beta)$ определена выше, $n_a(\beta) = n_{a0}(\beta + \alpha(\beta)) = n_{a0}(-\beta\Delta/v_a)$.

Теперь B_1 однозначно определяется из условий $B_1|_{[\beta_0,0]} = B_0$, $B_1|_{[0,\beta_1]} = B_*$. Зная функцию B_1 на $[\beta_0, \beta_1]$, последовательно находим функции $B_1 \to A_1 \to B_2 \to A_2 \to B_3 \to \ldots \ldots \to B_k \to A_k \to B_{k+1} \to \ldots$ на основании формулы (4) и граничного условия (37) следующим способом.

По $B_k(\beta)$ функция $A_k(\alpha)$, $k \geqslant 1$, находится из решения задачи Коши для линейного уравнения на отрезке $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$:

$$A'(\alpha) = k_I n_i(\alpha)[A(\alpha) - B_k(\beta(\alpha))], \quad A(\alpha_{k-1}) = A_{k-1}(\alpha_{k-1}), \tag{40}$$

где $\beta(\alpha) = -\alpha v_a/v_i + L/v_i$, $n_i(\alpha) = n_{i0}(\alpha + \beta(\alpha)) = n_{i0}(\alpha\Delta/v_i + L/v_i)$.

По $A_k(\alpha)$ функция $B_{k+1}(\beta)$, $k \geqslant 1$, определяется из решения задачи Коши для линейного уравнения на отрезке $[\beta_k, \beta_{k+1}]$:

$$B'(\beta) = k_I n_a(\beta)[A_k(\alpha(\beta)) - B(\beta)], \quad B(\beta_k) = B_k(\beta_k), \tag{41}$$

где $\alpha(\beta) = -\beta v_{\rm i}/v_{\rm a}$, $n_{\rm a}(\beta) = n_{\rm a0}(\alpha(\beta)+\beta) = n_{\rm a0}(-\beta\Delta/v_{\rm a})$. В этом построении используются очевидные равенства $\alpha(\beta_{k+1}) = \alpha_k$, $\beta(\alpha_k) = \beta_k$, $k \geqslant 0$.

Используя соотношения (38)–(41) и формулы (4), можно построить решение системы (3) в полуполосе Π, удовлетворяющее начальным и граничным условиям (36), (37). Для этого разобьём полуполосу Π на треугольники T_k, S_k, $k \geqslant 0$, как указано на рис. 3. Формально имеем

$$T_k = \{(\alpha,\beta) : \alpha_{k-1} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_k, \ \ \beta(\alpha) \leqslant \beta \leqslant \beta_k\}, \quad k \geqslant 1,$$

$$S_k = \{(\alpha,\beta) : \beta_k \leqslant \beta \leqslant \beta_{k+1}, \ \ \alpha(\beta) \leqslant \alpha \leqslant \alpha_k\}, \quad k \geqslant 1,$$

$$T_0 = \{(\alpha,\beta) : 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0, \ \ -\alpha \leqslant \beta \leqslant 0\}, \quad S_0 = \{(\alpha,\beta) : 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1, \ \ \alpha(\beta) \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0\}.$$

Нетрудно проверить, что внутренности всех треугольников попарно не пересекаются, а в сумме треугольники дают полуполосу Π.

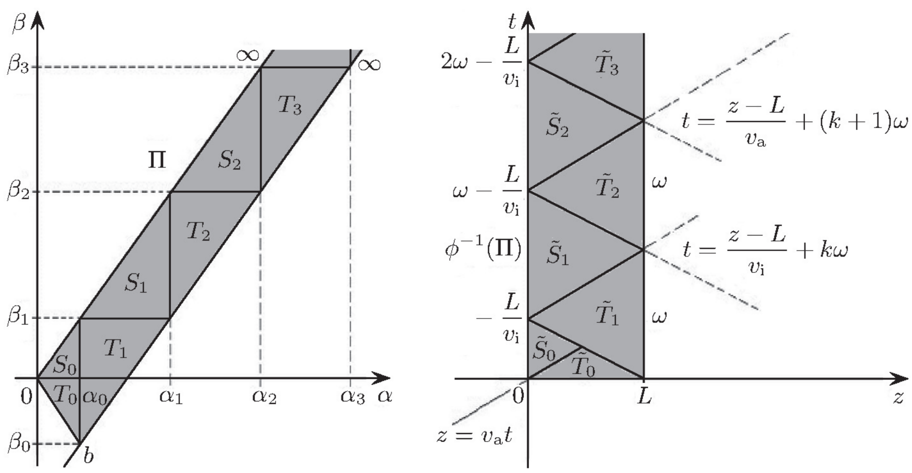

Рис. 3. Триангуляции полуполос Π и $\phi^{-1}(\Pi)$ в переменных (α,β) и (z,t).

Тогда для точки $(\alpha,\beta) \in \Pi$ имеем

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = n_{\rm a}(\beta)\frac{A_{k-1}(\alpha(\beta)) - B_k(\beta)}{A_k(\alpha) - B_k(\beta)}, \quad n_{\rm i}(\alpha,\beta) = n_{\rm i}(\alpha)\frac{A_k(\alpha) - B_k(\beta(\alpha))}{A_k(\alpha) - B_k(\beta)}, \quad (\alpha,\beta)\in T_k, \quad k \geqslant 2,$$

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = n_{\rm a}(\beta)\frac{A_k(\alpha(\beta)) - B_{k+1}(\beta)}{A_k(\alpha) - B_{k+1}(\beta)}, \quad n_{\rm i}(\alpha,\beta) = n_{\rm i}(\alpha)\frac{A_k(\alpha) - B_k(\beta(\alpha))}{A_k(\alpha) - B_{k+1}(\beta)}, \quad (\alpha,\beta)\in S_k, \quad k \geqslant 1,$$

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = \bar n_{\rm a}(\beta)\frac{A_0(-\beta) - B_0(\beta)}{A_0(\alpha) - B_0(\beta)}, \quad n_{\rm i}(\alpha,\beta) = \bar n_{\rm i}(\alpha)\frac{A_0(\alpha) - B_0(-\alpha)}{A_0(\alpha) - B_0(\beta)}, \quad (\alpha,\beta) \in T_0,$$

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = n_{\rm a}(\beta)\frac{A_0(\alpha(\beta)) - B_1(\beta)}{A_0(\alpha) - B_1(\beta)}, \quad n_{\rm i}(\alpha,\beta) = \bar n_{\rm i}(\alpha)\frac{A_0(\alpha) - B_0(-\alpha)}{A_0(\alpha) - B_1(\beta)}, \quad (\alpha,\beta) \in S_0. \qquad (42)$$

Если $(\alpha,\beta) \in T_1$, то формула для $n_{\rm i}(\alpha,\beta)$ справедлива, а для $n_{\rm a}(\alpha,\beta)$ верна только при $\beta \geqslant 0$. Для $\beta \leqslant 0$ она видоизменяется:

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = \bar n_{\rm a}(\beta)\frac{A_0(-\beta) - B_0(\beta)}{A_1(\alpha) - B_1(\beta)}.$$

Это следствие того, что B_1 вычисляется по-разному для $\beta \geqslant 0$ и $\beta \leqslant 0$. Легко проверить, что в пересечении любых двух треугольников приведённые формулы (42) дают одни и те же значения. Прямой подстановкой с учётом формул (38)–(41) легко проверить, что функции (42) являются решением системы (3).

Решив уравнения (40), (41) методом вариации произвольной постоянной, приходим к следующим рекуррентным соотношениям, позволяющим вычислить функции $A_k(\alpha)$, $k \geqslant 1$, $B_k(\beta)$, $k \geqslant 2$:

$$B_{k+1}(\beta) = A_k(\alpha(\beta)) + e^{f(\beta_k)-f(\beta)}\left[B_k(\beta_k) - A_k(\alpha_{k+1}) + \frac{v_\mathrm{i}}{v_\mathrm{a}}\int\limits_{\beta_k}^{\beta} e^{f(\beta)-f(\beta_k)}A_k'(\alpha(\beta))\,d\beta\right] =$$

$$= A_k(\beta)+e^{f(\beta_k)-f(\beta)}\left[B_k(\beta_k)-A_k(\alpha_{k+1})+\frac{v_\mathrm{i}}{v_\mathrm{a}}\int\limits_{\beta_k}^{\beta} e^{f(\beta)-f(\beta_k)}k_I n_\mathrm{i}(\alpha(\beta))\left[A_k(\alpha(\beta))-B_k\left(\beta+\frac{L}{v_\mathrm{i}}\right)\right]d\beta\right],$$

$$f(\beta) = \int\limits_0^{\beta} k_I n_\mathrm{a}(\beta)\,d\beta, \quad \alpha(\beta) = -\frac{v_\mathrm{i}}{v_\mathrm{a}}\beta, \quad \beta_k \leqslant \beta \leqslant \beta_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{43}$$

$$A_k(\alpha) = B_k(\beta(\alpha)) + e^{g(a)-g(\alpha_{k-1})}\left[A_{k-1}(\alpha_{k-1}) - B_k(\beta_{k-1}) + \frac{v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}}\int\limits_{\alpha_k}^{\alpha} e^{g(\alpha_{k-1})-g(\alpha)}B_k'(\beta(\alpha))\,d\beta\right] =$$

$$= B_k(\beta(\alpha)) + e^{g(\alpha)-g(\alpha_{k-1})}\Bigg[A_{k-1}(\alpha_{k-1}) - B_k(\beta_{k-1}) + \frac{v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}}\int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha} e^{g(\alpha_{k-1})-g(\alpha)}k_I n_\mathrm{a}(\beta(\alpha)) \times$$

$$\times\left[A_{k-1}\left(\alpha - \frac{L}{v_\mathrm{a}}\right) - B_k(\beta(\alpha))\right]d\alpha\Bigg],$$

$$g(\beta) = \int\limits_0^{\alpha} k_I n_\mathrm{i}(\beta)\,d\alpha, \quad \beta(\alpha) = -\frac{v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}}\alpha + \frac{L}{v_\mathrm{i}}, \quad \alpha_{k-1} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_k, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{44}$$

При $k = 1$ первое равенство в (44) справедливо, а второе верно, если интегральное слагаемое в фигурной скобке скорректировать в зависимости от α следующим образом. При $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant L/v_\mathrm{a}$ интегральное слагаемое в фигурной скобке нужно заменить на $I(\alpha)$, где

$$I(\alpha) = \frac{v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} e^{g(\alpha_0)-g(\alpha)}k_\mathrm{I}\bar{n}_\mathrm{a}(\beta(\alpha))[A_0(-\beta(\alpha)) - B_0(\beta(\alpha))]\,d\alpha.$$

При $L/v_\mathrm{a} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ интегральное слагаемое заменяется на выражение

$$I(L/v_\mathrm{a}) + (v_\mathrm{a}/v_\mathrm{i})\int\limits_{L/v_\mathrm{a}}^{\alpha} e^{g(\alpha_0)-g(\alpha)}k_\mathrm{I}n_\mathrm{a}(\beta(\alpha))[A_0(\alpha - L/v_\mathrm{a}) - B_1(\beta(\alpha))]\,d\alpha.$$

Итак, зная $A_0(\alpha)$, $B_0(\beta)$ и $B_1(\beta)$ (при $\beta \leqslant 0$ $B_1(\beta) = B_0(\beta)$, а при $\beta \geqslant 0$ $B_1(\beta)$ является решением уравнения (39):

$$B_1(\beta) = A_0(\alpha(\beta)) + e^{-f(\beta)}(D - C) + e^{-f(\beta)}\frac{v_\mathrm{i}}{v_\mathrm{a}}\int\limits_0^{\beta} e^{f(\beta)}k_I\bar{n}_\mathrm{i}(\alpha(\beta))[A_0(\alpha(\beta)) - B_0(-\alpha(\beta))]\,d\beta,$$

где $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$), по формулам (43), (44) последовательно находим функции A_1, B_2, A_2, B_3, $\ldots$, а затем по формулам (42) вычисляем n_a, n_i в полуполосе Π в переменных (α, β).

Сделаем несколько заключительных замечаний.

1. Проведённое построение зависит от констант C и D, но итоговые формулы (42) от C и D не зависят (зависимости от C и D числителя и знаменателя в этих формулах взаимно уничтожаются).

2. При $C > D$ из (43), (44) индукцией по k нетрудно вывести, что функции $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ монотонно возрастают и $A(\alpha) > B(\beta)$ для $(\alpha, \beta) \in \Pi$, а при $C < D$ функции $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ монотонно убывают и $A(\alpha) < B(\beta)$ для $(\alpha, \beta) \in \Pi$. В частности, числитель и знаменатель формул (42) имеют одинаковые знаки и все знаменатели отличны от нуля.

3. По построению функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ непрерывны. Если начальные и граничные условия непрерывно дифференцируемы, то с учётом условий согласования нетрудно установить двукратную непрерывную дифференцируемость функций $A(\alpha)$ и $B(\beta)$.

4. Переходя в формулах (42) к переменным $t = \alpha + \beta$, $z = \alpha v_\mathrm{a} + \beta v_\mathrm{i}$, получаем решение начально-краевой задачи на отрезке $[0, L]$ в полуполосе $\phi^{-1}(\Pi):\ t \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant L$. Поскольку преобразование независимых переменных $(\alpha, \beta) = \phi(z, t)$ линейное и невырожденное, то полные прообразы $\tilde{S}_k = \phi^{-1}(S_k)$, $\tilde{T}_k = \phi^{-1}(T_k)$, $k \geqslant 0$, являются также треугольниками с непересекающимися внутренностями, дающими разбиение полуполосы $\phi^{-1}(\Pi) = \{(z, t),\ 0 \leqslant z \leqslant L,\ t \geqslant 0\}$, как это показано на рис. 3. Нетрудно проверить, что границы треугольников $\tilde{T}_k$, $\tilde{S}_k$, $k \geqslant 1$, задаются прямыми $t = (z - L)/v_\mathrm{i} + k\omega$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $t = (z - L)/v_\mathrm{a} + k\omega$, $k \in \mathbb{N}$, где $\omega = L\Delta/(v_\mathrm{i} v_\mathrm{a})$, и прямыми $z = 0$, $z = L$. Треугольники $\tilde{S}_0$, $\tilde{T}_0$ пересекаются по границе $t = z/v_\mathrm{a}$. Явные формулы (42) для решения в переменных (z, t) получаются после подстановки в них выражений $\alpha = (tv_\mathrm{i} - z)/\Delta$, $\beta = (z - tv_\mathrm{a})/\Delta$ с учётом равенств $\alpha(\beta) = (tv_\mathrm{i} - zv_\mathrm{i}/v_\mathrm{a})/\Delta$, $\beta(\alpha) = v_\mathrm{a}(z - tv_\mathrm{i})/(v_\mathrm{i}\Delta) + L/v_\mathrm{i}$. Например, для $(z, t) \in \tilde{T}_k$, $k \geqslant 2$, получим

$$
\begin{gathered}
n_\mathrm{a}(z, t) = n_{\mathrm{a}0}(zv_\mathrm{a}^{-1} - t)[A_{k-1}((tv_\mathrm{i} - v_\mathrm{i} v_\mathrm{a}^{-1} z)/\Delta) - B_k((z - tv_\mathrm{a})/\Delta)] \times \\
\times [A_{k-1}((tv_\mathrm{i} - z)/\Delta) - B_k((z - tv_\mathrm{a})/\Delta)]^{-1}, \\
n_\mathrm{i}(z, t) = n_{\mathrm{i}0}(t - zv_\mathrm{i}^{-1} + Lv_\mathrm{i}^{-1})[A_k((tv_\mathrm{i} - z)/\Delta) - B_k(Lv_\mathrm{i}^{-1} + v_\mathrm{a} v_\mathrm{i}^{-1} \Delta^{-1}(z - tv_\mathrm{a}))] \times \\
\times [A_{k-1}((tv_\mathrm{i} - z)/\Delta) - B_k((z - tv_\mathrm{a})/\Delta)]^{-1}.
\end{gathered}
$$

Аналогично преобразуются и другие формулы (42).

Заключение. В работе рассмотрены основные начально-краевые (смешанные) задачи для нелинейной системы уравнений одномерной ионизации газа в случае постоянных скоростей атомов и ионов и указан общий вид решений этой системы.

Показано, что смешанные задачи для системы уравнений одномерной ионизации допускают интеграцию в виде явных аналитических выражений. Особый интерес представляет смешанная задача для конечного отрезка. В этом случае аналитическое решение строится посредством рекуррентных формул, каждая из которых определена в треугольнике, принадлежащем некоторой триангуляции области определения неизвестных функций. Формулы для решения краевой задачи на отрезке получены для случая $v_\mathrm{a} > 0 > v_\mathrm{i}$. Для остальных случаев ($v_\mathrm{a} < 0 < v_\mathrm{i}$; $v_\mathrm{a} > 0$, $v_\mathrm{i} > 0$; $v_\mathrm{a} < 0$, $v_\mathrm{i} < 0$; $v_\mathrm{a} = 0$, $v_\mathrm{i} \neq 0$; $v_\mathrm{a} \neq 0$, $v_\mathrm{i} = 0$) решение строится аналогично. В случае $v_\mathrm{a} = v_\mathrm{i}$ построение решения сильно упрощается интегрированием системы (1) по общим характеристикам (подробности см. в [13]).

Полученные результаты доказывают существование и единственность решения поставленных начально-краевых задач и могут использоваться для построения различных асимптотических формул для полученных решений.

Для исследования ионизационных колебаний представляет значительный интерес обобщение предложенного в работе метода решения смешанной задачи на отрезке на практически важный случай, когда скорость атомов постоянна и положительна, а скорость ионов линейна, имеет положительную производную и обращается в нуль внутри рассматриваемого отрезка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. М., 2006.
2. *Baranov V.I., Nazarenko Y.S., Petrosov V.A., Vasin A.I., Yashnov Y.M.* Theory of oscillations and conductivity for Hall thrusters // 32nd Joint Propulsion Conf. 1996. AIAA 96-3192.
3. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1978.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977.
5. *Бишаев А.М., Ким В.* Исследование локальных параметров плазмы в ускорителе с замкнутым дрейфом электронов и протяжённой зоной ускорения // Журн. техн. физики. 1978. Т. 48. № 9. С. 1853–1857.
6. *Chapurin O., Smolyakov A.I., Hagelaar G., Raitses Y.* On the mechanism of ionization oscillations in Hall thrusters // J. Appl. Phys. 2021. V. 129. P. 233307.
7. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Некоторые математические вопросы ионизации плазмы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 94.
8. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Стационарные и осциллирующие решения уравнений ионизации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2022. Т. 62. № 7. С. 1158–1179.
9. *Fife J., Martinez-Sanchez M., Szabo J.* A numerical study of low-frequency discharge oscillations in Hall thrusters // 33rd Joint Propulsion Conf. 1997. AIAA 97–3052.
10. *Barral S., Ahedo E.* On the origin of low frequency oscillations in Hall thrusters // AIP Conf. Proc. 2008. V. 993. P. 439–442.
11. *Dale E., Jorns B.* Two-zone Hall thruster breathing mode mechanism. Part I: Theory // 36th Intern. Electric Propulsion Conf. Vienna, 2019.
12. *Boeuf J., Garrigues L.* Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster // J. Appl. Phys. 1998. V. 84. P. 3541–3554.
13. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Аналитическое решение смешанных задач для уравнений одномерной ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. № 30.

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва,
Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 25.05.2023 г.
После доработки 25.05.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.