ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1357–1372

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.51

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ, СОДЕРЖАЩЕГО СТЕПЕНИ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

© 2023 г. А. В. Глушак

Рассмотрено абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащее степени неограниченного оператора, который является генератором операторной функции Бесселя. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле на полуоси. Исследован вопрос о стремлении решения к нулю на бесконечности. Приведены примеры.

DOI: 10.31857/S0374064123100047, EDN: ONFNCQ

Введение. Исследование дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами, действующими в банаховом пространстве E, стимулирует развитие теории разрешающих операторов соответствующих начальных задач. В результате исследований эволюционных уравнений первого порядка $u'(t) = Au(t)$ возникли полугруппы линейных операторов $T(t)$, а при изучении уравнения второго порядка (абстрактного волнового уравнения) $u''(t) = Au(t)$ – операторные косинус-функции $C(t)$. Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело к понятиям проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной косинус оператор-функции. Терминологию и литературные источники см. в монографиях [1, 2] и обзорных работах [3, 4].

Операторная функция Бесселя (ОФБ) была введена в рассмотрение в статьях [5, 6] как разрешающий оператор задачи Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД). Но, также как и в теории полугрупп и операторных косинус-функций, семейство операторных функций Бесселя можно ввести (см. [7]) независимо от дифференциального уравнения ЭПД, с которым в итоге оно связано. Далее напомним процесс построения ОФБ.

Важную роль в построении семейства играет зависящий от параметра $k > 0$ оператор обобщённого сдвига T_s^t, определяемый равенством (см. [8])

$$T_s^t Y(s) = \frac{\Gamma(k/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2)} \int\limits_0^\pi Y(\sqrt{s^2+t^2-2st\cos\varphi}) \sin^{k-1}\varphi \, d\varphi, \quad s,t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Оператор обобщённого сдвига зависит от параметра $k > 0$, но, следуя [8], этот факт в его записи отмечать не будем.

Укажем также, что в настоящей работе будем обходиться понятием интеграла от непрерывной функции, но в случае необходимости можно использовать интеграл Бохнера от функции со значением в банаховом пространстве.

Пусть E – банахово пространство, параметр $k > 0$ и $Y_k(\cdot) : [0,\infty) \to B(E)$ – операторная функция, действующая в пространство линейных ограниченных операторов $B(E)$.

Определение 1. Сильно непрерывное семейство линейных ограниченных операторов $Y_k(t) : [0,\infty) \to B(E)$, зависящее от параметра $k > 0$, называется *операторной функцией Бесселя*, если

$$Y_k(0) = I, \quad Y_k(t)Y_k(s) = T_s^t Y_k(s), \quad s,t \geqslant 0,$$

и существуют постоянные $\Upsilon \geqslant 1$, $\omega \geqslant 0$ такие, что

$$\|Y_k(t)\| \leqslant \Upsilon e^{\omega t}, \quad t \geqslant 0.$$

С семейством ОФБ связан дифференциальный оператор Бесселя

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{d}{dt},$$

который часто встречается в дифференциальных уравнениях с осевой симметрией.

Определение 2. *Генератором ОФБ* $Y_k(t)$ называется оператор A с областью определения $D(A)$, состоящей из тех $x \in E$, для которых функция $Y_k(t)x$ дважды дифференцируема в точке $t = 0$, и который определяется равенством

$$Ax = \lim_{t\to+0}\left(\frac{d^2Y_k(t)x}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{dY_k(t)x}{dt}\right).$$

В работе [7] доказаны следующие утверждения.

1. Если оператор A является генератором ОФБ $Y_k(t)$, то он замкнут и его область определения $D(A)$ плотна в E; более того, в E плотно множество элементов, на которых определены все степени оператора A.

2. Для любых $t, s \geqslant 0$ и $x \in D(A)$ справедливы равенства

$$Y_k(t)Y_k(s) = Y_k(s)Y_k(t), \quad AY_k(t)x = Y_k(t)Ax.$$

3. Пусть $x \in D(A)$ и $t > 0$, тогда $Y_k(t)x \in D(A)$ и

$$AY_k(t)x = \frac{d^2Y_k(t)x}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{dY_k(t)x}{dt}.$$

4. Если $u_0 \in D(A)$, то функция $Y_k(t)u_0$ является решением следующей задачи Коши для уравнения ЭПД:

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0;$$

в дальнейшем удобно символом $Y_0(t)$ обозначать операторную косинус-функцию $C(t)$ с генератором A.

5. Пусть $0 \leqslant k < m$ и оператор A – генератор ОФБ $Y_k(t)$; тогда A будет и генератором $Y_m(t)$, при этом соответствующая ОФБ $Y_m(t)$ имеет вид

$$Y_m(t) = \frac{2\Gamma(m/2 + 1/2)}{\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(m/2 - k/2)} \int_0^1 s^k(1 - s^2)^{(m-k)/2-1} Y_k(ts)\, ds; \tag{2}$$

равенство (2) называется *формулой сдвига* ОФБ по параметру.

Если оператор A – генератор операторной косинус-функции $Y_0(t) = C(t)$, то из (2) при $k = 0$ следует, что ОФБ $Y_m(t)$ представляет собой проинтегрированную специальным образом операторную косинус-функцию (подробнее об этом см. статью [9]).

1. Задача Дирихле. В банаховом пространстве E на полуоси $t \geqslant 0$ при значении параметра $k < 1$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащего степени неограниченного оператора A:

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = -P_m(A)u(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$u(0) = u_0, \quad \sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\| \leqslant M, \tag{4}$$

где $P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1}B_m A^m u(t) + \sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n u(t)$, B_n, $n = \overline{0,m}$, – ограниченные операторы, действующие в E, A – генератор ОФБ $Y_q(t)$ при некотором $q \geqslant 0$.

Будем предполагать, что ограниченные операторные коэффициенты B_n и генератор A удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Область определения $D(A)$ инвариантна относительно ограниченных операторов B_n, $n = \overline{0,m}$, $AB_n x = B_n A x$, $x \in D(A)$, и спектр $\sigma(B_m)$ оператора B_m расположен правее вертикальной прямой $\operatorname{Re}\lambda = \delta > 0$ (условие параболичности).

Рассматриваемый нами случай назовём эллиптическим. *Решением задачи Дирихле* (3), (4) будем называть абстрактную функцию $u(t)$ со значением в области $D(A^m)$, дважды непрерывно дифференцируемую при $t > 0$, непрерывную при $t \geqslant 0$, удовлетворяющую уравнению (3) и условиям (4).

Абстрактные параболические уравнения с оператором $P_m(A)$ исследовались ранее в [10]. В гиперболическом случае начальная задача для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащего степени генератора ОФБ, изучалась в статьях [11, 12].

Укажем также, что решению эллиптических задач для дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих по одной или нескольким переменным оператор Бесселя, посвящены работы [13–17], в которых также имеется и обширный обзор соответствующих публикаций.

В настоящей работе рассмотрена задача (3), (4) в эллиптическом случае, при этом использовано построенное в [10] фундаментальное решение $G(t,s)$ уравнения

$$\frac{\partial v(t,s)}{\partial t} = (-1)^{m+1} B_m \frac{\partial^{2m} v(t,s)}{\partial s^{2m}} + \sum_{n=0}^{m-1} B_n \frac{\partial^{2n} v(t,s)}{\partial s^{2n}}, \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

которое имеет вид

$$G(t,s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sigma} Q(t,\sigma)\, d\sigma, \tag{6}$$

где

$$Q(t,\sigma) = \exp\biggl(-t\sigma^{2m} B_m - t \sum_{n=0}^{m-1} \sigma^{2n} B_n\biggr).$$

При этом для функции $G(t,s)$ справедлива формула свёртки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t - t_1, s - s_1) G(t_1 - \tau, s_1 - \xi)\, ds_1 = G(t - \tau, s - \xi), \quad 0 \leqslant \tau < t_1 < t. \tag{7}$$

Наряду с уравнением (5), в области $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t} = (-1)^m B_m \frac{\partial^{2m} w(t,s)}{\partial s^{2m}} - \sum_{n=0}^{m-1} B_n \frac{\partial^{2n} w(t,s)}{\partial s^{2n}}, \quad w(0,s) = \delta(s), \tag{8}$$

где $\delta(s)$ – дельта-функция Дирака.

Применив к задаче (8) преобразование Фурье по переменной $s \in \mathbb{R}$ с учётом формулы связи решения задачи Дирихле для уравнения ЭПД с решением задачи Коши для параболического уравнения (см. [18, теорема 3]), введём в рассмотрение следующую операторную функцию, являющуюся решением задачи (8):

$$Z_k(t,s) = \frac{t^{1-k}}{2^k \pi \Gamma(1/2 - k/2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\sigma} \int_0^{\infty} \tau^{k/2-3/2} \exp\biggl(-\frac{t^2}{4\tau}\biggr) Q(\tau,\sigma)\, d\tau d\sigma = \int_0^{\infty} h_k(t,\tau) G(\tau,s)\, d\tau, \tag{9}$$

где фундаментальное решение $G(\tau, s)$ определено равенством (6),

$$h_k(t,\tau) = \frac{t^{1-k}\tau^{k/2-3/2}}{2^{1-k}\Gamma(1/2-k/2)}\exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right), \quad t \geqslant 0, \quad \tau > 0.$$

Для обоснования существования решения задачи Дирихле (3), (4) нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $t \geqslant 0,\ \ b > 0,\ \ \beta > 0,\ \ \gamma > 1.$ *Тогда для функции вида*

$$f(t) = \int\limits_0^\infty s^{-\gamma}\exp\left(-\frac{b}{s} - \frac{t}{s^\beta}\right)ds$$

существуют постоянные $M_1, M_2 > 0$ *такие, что справедлива оценка*

$$f(t) \leqslant \frac{M_1}{M_2 + t^{(\gamma-1)/\beta}}. \tag{10}$$

Доказательство. При $t > 0$ после замены получим

$$f(t) = t^{(1-\gamma)/\beta}\int\limits_0^\infty \xi^{-\gamma}\exp\left(-\frac{b}{\xi t^{1/\beta}} - \frac{1}{\xi^\beta}\right)d\xi < M_4 t^{(1-\gamma)/\beta},$$

что вместе с очевидным неравенством $f(t) \leqslant f(0) = M_3$ приводит к требуемому соотношению (10). Лемма доказана.

В зависимости от вида и свойств операторов A и $P(A)$ дальнейшее исследование будет разбито на два случая.

2. Задача Дирихле в случае $\boldsymbol{k < 1}$ с оператором вида $\boldsymbol{P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1} \times \times B_m A^m u(t)}$. Для определяемого равенством (6) фундаментального решения $G(t,s)$ в статье [10] для этого случая установлена оценка

$$\left\|\frac{\partial^j G(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant M_j t^{-(j+1)/(2m)}\exp(-at^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}), \quad a > 0, \tag{11}$$

доказательство которой проводится методами, развитыми в [19, гл. 1] для случая матричных коэффициентов B_j. Кроме того, при равномерной ограниченности $Y_0(s)$ определена аналитическая полугруппа

$$U(t; P_m(A))x = 2\int\limits_0^\infty G(t,s)Y_0(s)x\,ds$$

с генератором $P_m(A)$, областью определения которого является $D(A^m)$. Отметим, что полугрупповое свойство для $U(t; P_m(A))$ справедливо в силу формулы свёртки (7).

Оценим теперь производные операторной функции $Z_k(t,s)$.

Лемма 2. *Для определяемой равенством (9) операторной функции* $Z_k(t,s)$ *и её производных до порядка* $j = \overline{0, 2m}$ *при* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\|\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant \frac{M_{k,j}t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}, \quad M_{k,j} > 0. \tag{12}$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (9) и воспользуемся оценкой (11). После замены переменных будем иметь

$$\left\|\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant M_j\int\limits_0^\infty h_k(t,\tau)\tau^{-(j+1)/(2m)}\exp(-a\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)})\,d\tau =$$

$$= \frac{M_j t^{1-k}}{2^{1-k}\Gamma(1/2-k/2)} \int\limits_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \exp\biggl(-\frac{t^2}{4\tau} - a\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}\biggr)\, d\tau =$$

$$= \frac{M_j t^{-(j+1)/m}}{2^{1-k}\Gamma(1/2-k/2)} \int\limits_0^\infty \xi^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \exp\biggl(-\frac{1}{4\xi} - \frac{a(|s|^m/t)^{2/(2m-1)}}{\xi^{1/(2m-1)}}\biggr)\, d\xi.$$

Оценив последний интеграл с помощью неравенства (10) из леммы 1 при значениях

$$b = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2m-1}, \quad \gamma = \frac{j+1-m(k-3)}{2m},$$

получим требуемое неравенство (12):

$$\biggl\|\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j}\biggr\| \leqslant \frac{M_j t^{-(j+1)/m}}{2^{1-k}\Gamma(1/2-k/2)} \frac{M_1}{M_2 + (1/4(|s|^m/t)^{2/(2m-1)})^{(j+1+m-mk)(2m-1)/(2m)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_{k,j} t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам также понадобятся оценки производных с весом операторной функции $Z_k(t,s)$. Для этого сначала установим следующую лемму, которая доказывается по индукции.

Лемма 3. *Пусть функция* $Z(s) \in C^n(0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\biggl(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\biggr)^n Z(s) = \sum_{j=1}^n \theta_{j,n} s^{j-2n} Z^{(j)}(s), \tag{13}$$

где

$$\theta_{j,n} = \frac{(2n-j-1)!}{(-2)^{n-j}(n-j)!(j-1)!}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть равенство (13) выполнено при каком-то n. Тогда

$$\biggl(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\biggr)^{n+1} Z(s) = \sum_{j=1}^n \theta_{j,n}(j-2n) s^{j-2n-2} Z^{(j)}(s) + \sum_{j=2}^{n+1} \theta_{j-1,n} s^{j-2n-2} Z^{(j)}(s)$$

и для доказательства справедливости формулы (13) при $n+1$ осталось установить равенства

$$\theta_{1,n+1} = (1-2n)\theta_{1,n}, \quad \theta_{n+1,n+1} = \theta_{n,n} = 1, \quad \theta_{j,n+1} = (j-2n)\theta_{j,n} + \theta_{j-1,n}, \quad 2 \leqslant j \leqslant n,$$

которые непосредственно проверяются, учитывая определение чисел $\theta_{j,n}$ по формуле (14). Лемма доказана.

Следующая лемма является следствием лемм 2 и 3.

Лемма 4. *Для определяемой равенством (9) операторной функции* $Z_k(t,s)$ *при* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\biggl\|\biggl(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\biggr)^n Z_k(t,s)\biggr\| \leqslant \sum_{j=1}^n \frac{|\theta_{j,n}| M_{k,j} t^{1-k} s^{j-2n}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}, \quad M_{k,j} > 0. \tag{15}$$

Предполагая равномерную ограниченность ОФБ $Y_q(s)$, $q \geqslant 0$, генератором которой является оператор A, далее выберем наименьшее $n \in \mathbb{N}$, $2n \geqslant q$, и введём в рассмотрение операторную функцию

$$W_k(t)x = \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \biggl(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\biggr)^n Z_k(t,s) s^{2n} Y_{2n}(s)x\, ds, \quad x \in E,$$

где ОФБ $Y_{2n}(s)$ выражается через ОФБ $Y_q(s)$ по формуле (2).

Сходимость интеграла и возможность его дифференцирования по t обусловлены равенством (8) и оценкой (15). Ограниченная в пространстве E операторная функция $W_k(t)$ будет использована при установлении однозначной разрешимости задачи Дирихле (3), (4).

Отметим, что если оператор A – генератор ограниченной операторной косинус-функции $C(t),$ то, как следует из [20, гл. 9, п. 11], операторная функция

$$W_0(t) = 2\int\limits_0^\infty Z_0(t,s)C(s)\,ds = \int\limits_0^\infty h_0(t,\tau)U(\tau;P(A))\,d\tau,$$

где

$$h_0(t,\tau) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}\tau^{3/2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right), \quad t \geqslant 0, \quad \tau > 0,$$

является полугруппой, а псевдодифференциальный оператор $P_{1/2}(A) = -\sqrt{-P_m(A)}$ – генератор этой полугруппы $W_0(t)$.

Теорема 1. *Пусть оператор A при некотором $q \geqslant 0$ является генератором равномерно ограниченной ОФБ $Y_q(s),$ $u_0 \in D(A^m)$ и выполнено условие 1. Тогда задача Дирихле (3), (4) имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{(-1)^n\cdot 2}{(2n-1)!!}\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds, \tag{16}$$

где $Z_k(t,s)$ определена равенством (9), а ОФБ $Y_{2n}(s)$ выражается через ОФБ $Y_q(s)$ по формуле (2).

Доказательство. Предположим вначале, что $u_0 \in D(A^{m+[n/2]+2})$ и $q > 0.$ Тогда после n-кратного интегрирования по частям получим

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{2}{(2n-1)!!}\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^n(s^{2n-1}Y_{2n}(s)u_0)ds = 2\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\tilde{Y}_0(s)u_0\,ds. \tag{17}$$

Записанная с помощью операторов движения решения уравнения ЭПД по параметру (подробнее см. [21, 22]) функция

$$\tilde{Y}_0(s)u_0 = \frac{1}{(2n-1)!!}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^n(s^{2n-1}Y_{2n}(s)u_0) \tag{18}$$

уже не будет ОФБ, но она определяет решение задачи Коши

$$u''(s) = Au(s), \quad s > 0, \quad u(0) = u_0 \in D(A^{[n/2]+2}), \quad u'(0) = 0.$$

Поскольку функция $Z_k(t,s)u_0$ удовлетворяет задаче (8), то непосредственно проверяется, что определяемая равенством (17) функция $u(t) = W_k(t)u_0$ является решением задачи Дирихле (3), (4). Действительно, очевидно, $u(0) = u_0,$ а после интегрирования по частям внеинтегральные слагаемые обратятся в нуль и мы получим

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = 2\int\limits_0^\infty\left(\frac{\partial^2 Z_k(t,s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial Z_k(t,s)}{\partial t}\right)\tilde{Y}_0(s)u_0\,ds =$$

$$= \int\limits_0^\infty (-1)^m B_m\frac{\partial^{2m}Z_k(t,s)}{\partial s^{2m}}\tilde{Y}_0(s)u_0\,ds = \int\limits_0^\infty (-1)^m B_m Z_k(t,s)\frac{d^{2m}\tilde{Y}_0(s)u_0}{ds^{2m}}\,ds =$$

$$= \int\limits_0^\infty (-1)^m B_m Z_k(t,s) A^m \tilde{Y}_0(s) u_0 ds = -P_m(A)u(t). \tag{19}$$

Таким образом, равенство (19) установлено на плотном в $D(A^m)$ множестве $D(A^{m+[n/2]+2})$ элементов u_0. В силу ограниченности в пространстве E операторной функции $W_k(t)$ оно будет справедливо и для $u_0 \in D(A^m)$.

Случай $q = 0$ рассматривается аналогично, причём со значительными упрощениями.

Доказательство единственности решения задачи (3), (4) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения этой задачи. Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t,y) = f(W_k(y)(u_1(t) - u_2(t))),$$

где $f \in E^*$ (E^* – сопряжённое пространство), $t, y \geqslant 0$, которая, очевидно, удовлетворяет следующим уравнению и условиям:

$$\frac{\partial^2 w(t,y)}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial w(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t,y)}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial w(t,y)}{\partial y}, \quad t, y > 0, \tag{20}$$

$$w(0,y) = 0, \quad \sup_{t,y\geqslant 0} \|w(t,y)\| < M. \tag{21}$$

Интерпретируем функцию $w(t,y)$ как обобщённую функцию и по переменной y применим I-преобразование. Для обычных экспоненциально убывающих при $y \to +\infty$ функций I-преобразование определяется равенством

$$\hat{w}(t,\lambda) = \int\limits_0^\infty \sqrt{\lambda y} I_p(\lambda y) w(t,y)\, dy,$$

где $p = (k-1)/2$, $I_p(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя. Распространение этого преобразования на обобщённые функции изложено в [23; 24, с. 63], при этом пространством основных функций также являются экспоненциально убывающие при $y \to +\infty$ функции, на которых и обеспечивается корректное определение I-преобразования обобщённой функции $w(t,y)$.

Из условий (20), (21) для образа $\hat{w}(t,\lambda)$ в пространстве регулярных обобщённых функций получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}(t,\lambda)}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial \hat{w}(t,\lambda)}{\partial t} = \lambda^2 \hat{w}(t,\lambda), \quad t > 0, \tag{22}$$

$$\hat{w}(0,\lambda) = 0, \quad \sup_{\substack{t\geqslant 0\\ \lambda\in\mathbb{R}}} \|\hat{w}(t,\lambda)\| < M. \tag{23}$$

Общее решение уравнения (22) имеет вид

$$\hat{w}(t,\lambda) = t^{(1-k)/2}(d_1(\lambda) I_{(k-1)/2}(\lambda t) + d_2(\lambda) K_{(k-1)/2}(\lambda t)),$$

где $I_{(k-1)/2}(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя, $K_{(k-1)/2}(\cdot)$ – функция Макдональда.

Из второго условия в (23) вытекает $d_1(\lambda) = 0$, а из первого условия в (23) следует $d_2(\lambda) = 0$, поэтому $\hat{w}(t,\lambda) = w(t,y) = 0$ для любого $y \geqslant 0$. В силу произвольности функционала $f \in E^*$ при $y = 0$ получим равенство $u_1(t) \equiv u_2(t)$, и единственность решения задачи Дирихле (3), (4) установлена. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть параметр $k < 1$, $B_m = I$, $P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1} A^m u(t)$. Тогда, учитывая формулу (6), получаем

$$Q(t,\sigma) = e^{-t\sigma^{2m}}, \quad G(t,s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sigma - t\sigma^{2m}}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(s\sigma) e^{-t\sigma^{2m}}\, d\sigma.$$

Последний интеграл только при $m = 1$ вычисляется в элементарных функциях и определяет фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$G(t,s)|_{m=1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right).$$

При $m \geqslant 2$ выражение для интеграла весьма громоздкое и содержит специальные функции. Например, при $m = 2$ оно имеет вид

$$G(t,s) = \frac{\Gamma(5/4)}{\pi t^{1/4}} {}_0F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{s^4}{256t}\right) - \frac{\Gamma(3/4)s^2}{8\pi t^{3/4}} {}_0F_2\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}; \frac{s^4}{256t}\right),$$

где ${}_0F_2(\cdot)$ – гипергеометрическая функция.

Подставив фундаментальное решение в (9) с учётом интеграла 2.3.3.1 из [25], определим

$$Z_k(t,s)|_{m=1} = \frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int\limits_0^\infty \tau^{k/2-2} \exp\left(-\frac{t^2+s^2}{4\tau}\right) d\tau =$$

$$= \frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int\limits_0^\infty \xi^{-k/2} \exp\left(-\frac{t^2+s^2}{4}\xi\right) d\xi = \frac{\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} (t^2+s^2)^{k/2-1}.$$

Наконец, по формуле (16) запишем решение задачи Дирихле (3), (4) при $m = 1$ в виде

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s) s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 \, ds =$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot 2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-k/2)} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n (t^2+s^2)^{k/2-1} s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 \, ds =$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot 2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-k/2)} \int\limits_0^\infty (k-2)(k-4)\cdots(k-2n)(t^2+s^2)^{k/2-n-1} s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 \, ds =$$

$$= \frac{2\Gamma(n+1-k/2)t^{1-k}}{\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2-k/2)} \int\limits_0^\infty \frac{s^{2n} Y_{2n}(s) u_0}{(t^2+s^2)^{n+1-k/2}} \, ds.$$

Приведём далее примеры представлений решения задачи Дирихле (3), (4) при $k < 1$, $m = 1$ в конкретных банаховых пространствах.

а) Пусть $E = L_p(-\infty,\infty)$, $p > 1$, $Y_0(s)u_0(x) = (u_0(x+s) + u_0(x-s))/2$ – операторная косинус-функция с генератором $A = d^2/dx^2$, $B_1 = I$. Тогда при $k < 1$, $m = 1$ решение задачи (3), (4) имеет вид

$$u(t,x) = \frac{\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int\limits_0^\infty \frac{u_0(x+s) + u_0(x-s)}{(t^2+s^2)^{1-k/2}} \, ds.$$

б) Пусть $E = L_p(0,\infty)$, $p > 1$, $B_1 = I$. Если $0 < q \leqslant 2$, то определяемый равенством (1) (после замены параметра k на q) оператор обобщённого сдвига $T_x^s u_0(x)$ является ОФБ $Y_q u_0(x) = T_x^s u_0(x)$ с генератором

$$A = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{q}{x}\frac{d}{dx}.$$

Тогда $n=1$ и в этом случае при $k<1$, $m=1$ решение задачи Дирихле (3), (4) имеет вид

$$u(t,x)=W_k(t)u_0=\frac{-2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(t^2+s^2)^{k/2-1}s^2Y_2(s)u_0(x)\,ds=$$

$$=\frac{4\Gamma(2-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty \frac{s^2Y_2(s)u_0(x)}{(t^2+s^2)^{2-k/2}}\,ds,$$

где при $q=2$

$$Y_2(s)u_0(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi u_0(\sqrt{x^2+s^2-2xs\cos\varphi})\sin\varphi\,d\varphi,\quad x,s\geqslant 0,$$

а при $0<q<2$ ОФБ $Y_q(s)$ определяется по формуле (2):

$$Y_2(s)u_0(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(q/2+1/2)\Gamma(1-q/2)}\int\limits_0^1 \tau^q(1-\tau^2)^{-q/2}Y_q(\tau s)u_0(x)\,d\tau,$$

$$Y_q(s)u_0(x)=\frac{\Gamma(q/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q/2)}\int\limits_0^\pi u_0(\sqrt{x^2+s^2-2xs\cos\varphi})\sin^{q-1}\varphi\,d\varphi,\quad x,s\geqslant 0.$$

в) Пусть $E=\mathbb{R}$, $A=-A_0^2$, $A_0>0$, $B_1=1$. Тогда проще всего считать $n=0$, $Y_0(s)=$ $=\cos(A_0s)$, и при $k<1$, $m=1$ решение задачи Дирихле (3), (4) имеет вид

$$u(t)=W_k(t)u_0=\frac{2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}u_0}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty \frac{\cos{(A_0s)}}{(t^2+s^2)^{1-k/2}}\,ds.$$

Вычислив интеграл по формуле 2.5.6.4 из [25], получим

$$u(t)=\frac{2^{k/2+1/2}(A_0t)^{1/2-k/2}}{\Gamma(1/2-k/2)}K_{1/2-k/2}(A_0t)u_0,$$

где $K_\nu(\cdot)$ – функция Макдональда.

К такому же результату мы придём, если возьмём $q=2n$:

$$Y_{2n}(s)=\Gamma(n+1/2)(A_0s/2)^{1/2-n}J_{n-1/2}(A_0s),$$

где $J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода. Тогда

$$u(t)=\frac{2^{n+1/2}\Gamma(n+1-k/2)A_0^{1/2-n}t^{1-k}u_0}{\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty (t^2+s^2)^{k/2-n-1}s^{n+1/2}J_{n-1/2}(A_0s)\,ds.$$

Вычислив интеграл по формуле 2.12.4.28 из [26], будем иметь

$$u(t)=\frac{2^{k/2+1/2}(A_0t)^{1/2-k/2}}{\Gamma(1/2-k/2)}K_{1/2-k/2}(A_0t)u_0.$$

Отметим, что в силу экспоненциального убывания функции Макдональда при $t\to\infty$ в последнем примере решение $u(t)=W_k(t)u_0$ стремится к нулю при $t\to\infty$. Но в общем случае из оценки (15) стремление решения $u(t) = W_k(t)u_0$ к нулю при $t \to \infty$ не вытекает. Приведём достаточное условие, обеспечивающее это стремление.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно при* $s > 0$

$$\Big\| \int\limits_0^s Y_q(\tau)u_0\, d\tau \Big\| < \infty. \tag{24}$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} W_k(t)u_0 = 0.$

Доказательство. Проинтегрировав по частям, запишем решение задачи Дирихле в виде

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s) s^{2n} Y_{2n}(s)u_0\, ds =$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(s^{2n}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)\right) \int\limits_0^s Y_{2n}(\tau)u_0\, d\tau ds. \tag{25}$$

С учётом равенства (13) дифференцированием получим

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(s^{2n}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)\right) = \sum_{j=1}^n j\theta_{j,n} s^{j-1}\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j} + \sum_{j=1}^n \theta_{j,n} s^j \frac{\partial^{j+1} Z_k(t,s)}{\partial s^{j+1}},$$

и, применив в (25) оценки (12), (24), будем иметь

$$\|W_k(t)u_0\| \leqslant \Upsilon_1 \|u_0\| t^{1-k} \sum_{j=1}^n j|\theta_{j,n}| M_{k,j} \int\limits_0^\infty \frac{s^{j-1}\, ds}{t^{1-k+(j+1)/m} + s^{m(1-k)+j+1}} +$$

$$+ \Upsilon_1 \|u_0\| t^{1-k} \sum_{j=1}^n |\theta_{j,n}| M_{k,j+1} \int\limits_0^\infty \frac{s^j\, ds}{t^{1-k+(j+2)/m} + s^{m(1-k)+j+2}} = \Phi(t) + \Psi(t).$$

В этом равенстве первое слагаемое $\Phi(t)$ после замен

$$s = t^\alpha \xi, \quad \alpha = \frac{1-k+(j+1)/m}{m(1-k)+j+1}, \quad \beta = \frac{-m(1-k)-j-1}{m(m(1-k)+j+1)}$$

превратится в

$$\Phi(t) = \Upsilon_1 \|u_0\| t^\beta \sum_{j=1}^n j\theta_{j,n} M_{k,j} \int\limits_0^\infty \frac{\xi^{j-1}\, ds}{1 + \xi^{m(1-k)+j+1}},$$

и поскольку $\beta < 0,$ то $\Phi(t) \to 0$ при $t \to \infty.$

Второе слагаемое $\Psi(t)$ рассматривается аналогично с заменой j на $j+1,$ откуда и вытекает нужное нам утверждение теоремы. Теорема доказана.

Например, если в условиях теоремы 1 оператор A является генератором равномерно ограниченной операторной косинус-функции $Y_0(s) = C(s),$ то, как следует из теоремы 2, помимо этого для стремления решения $u(t) = W_k(t)u_0$ к нулю при $t \to \infty$ следует дополнительно потребовать ограниченность операторной синус-функции

$$S(s) = \int\limits_0^t C(\tau)\, d\tau.$$

В этом случае условие (24) выполнено, если, например, $A = A_1^2$, где оператор A_1 – генератор равномерно ограниченной группы $T(s; A_1)$ и, кроме того, точка $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора A_1, $0 \in \rho(A_1)$. Тогда

$$Y_0(s) = C(s) = \frac{1}{2}(T(s; A_1) + T(-s; A_1)),$$

$$\int_0^s T(\tau; A_1)u_0\,d\tau = \int_0^s AT(\tau; A_1)A^{-1}u_0\,d\tau = \int_0^s T'(\tau; A_1)A^{-1}u_0\,d\tau = (T(s; A_1) - I)A^{-1}u_0,$$

и условие (24), очевидно, справедливо, поскольку группа $T(s; A_1)$ равномерно ограничена.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда $E = H$ – гильбертово пространство и $A = -A_0^2$, где A_0 – самосопряжённый оператор, действующий в H, $0 \in \rho(A_0)$. Пусть E_λ – спектральная функция оператора A_0. По теореме Стоуна (см., например, [1, § 4, теорема 4.7]) оператор A_0 является генератором унитарной группы

$$T(t; A_0)x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dE_\lambda x, \quad x \in H,$$

которая удовлетворяет неравенству (24). Действительно,

$$\int_0^s T(\tau; A_0)x\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^s e^{i\lambda\tau}d\tau\,dE_\lambda x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda s} - 1}{i\lambda}dE_\lambda x = -i(T(s; A_0) - I)A_0^{-1}x,$$

следовательно, операторная синус-функция ограничена, неравенство (24) выполнено и решение задачи Дирихле

$$u(t) = W_k(t)u_0 = 2\int_0^{\infty} Z_k(t,s)\cos(A_0 s)u_0\,ds$$

стремится к нулю при $t \to \infty$.

3. Задача Дирихле в случае $k < 1$ с оператором вида $P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1}B_m \times A^m u(t) + \sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n u(t)$, $\sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n \neq 0$. Введём в рассмотрение оператор

$$B = -\mu^{2m}B_m - \sum_{n=0}^{m-1}\mu^{2n}B_n, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Условие 2. Если $\sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n \neq 0$, то при любом $\mu \in \mathbb{R}$ спектр $\sigma(B)$ оператора B не лежит на мнимой оси.

В случае выполнения условия 2 для определяемого равенством (6) фундаментального решения $G(t,s)$ в статье [10] установлена оценка

$$\left\|\frac{\partial^j G(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant M_j t^{-(j+1)/(2m)}\exp(-at^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)} - \delta_1 t), \tag{26}$$

где $M_j > 0$, $a > 0$, $0 < \delta_1 < \delta$, постоянная δ взята из условия 1 (параболичности). Отметим, что в отличие от оценки (11) оценка (26) содержит множитель $\exp(-\delta_1 t)$.

Покажем, что условие 2 позволит ослабить требование равномерной ограниченности ОФБ $Y_q(s)$ при установлении разрешимости задачи Дирихле и допустить её экспоненциальный рост.

Лемма 5. *Если выполнено условие 2, то для определяемой равенством (9) операторной функции $Z_k(t,s)$ и её производных до порядка $j=\overline{0,2m}$ существуют постоянные $M_{k,j}$, Ω, $\Omega_1>0$ такие, что при $t>0$ справедлива оценка*

$$\left\|\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant \frac{M_{k,j}t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m}+|s|^{m(1-k)+j+1}}e^{-\Omega_1 t-\Omega|s|}. \tag{27}$$

Доказательство. Также как и при доказательстве леммы 2, продифференцируем равенство (9) и воспользуемся оценкой (26). Обозначив $a=a_1+a_2$, $0<a_1<a$, $a_2=a-a_1$, $1=b_1+b_2$, $0<b_1<1$, $b_2=1-b_1$, $\delta_1=\delta_2+\delta_3$, $0<\delta_2<\delta_1$, $\delta_3=\delta_1-\delta_2$, получим

$$\left\|\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant M_j\int\limits_0^\infty h_k(t,\tau)\tau^{-(j+1)/(2m)}\exp(-a\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}-\delta_1\tau)\,d\tau =$$

$$=\frac{M_j t^{1-k}}{2^{k-1}\Gamma(1/2-k/2)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)}\exp\left(-\frac{(b_1+b_2)t^2}{4\tau}-(a_1+a_2)\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}-(\delta_2+\delta_3)\tau\right)d\tau. \tag{28}$$

Покажем далее, что при $s\in\mathbb{R}$, $t,\tau>0$ справедливы неравенства

$$\exp(-a_2\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}-\delta_3\tau)\leqslant e^{-\Omega|s|}, \tag{29}$$

$$\exp(-b_2\tau^{-1}t^2-\delta_2\tau)\leqslant e^{-\Omega_1 t}, \tag{30}$$

где

$$\Omega=a_2^{(2m-1)/(2m)}(\delta_3(2m-1))^{1/(2m)}+\delta_3^{1/(2m)}(a_2/(2m-1))^{(2m-1)/(2m)},\quad \Omega_1=2\sqrt{b_2\delta_2}. \tag{31}$$

Неравенство (29) при $s=0$, очевидно, выполнено. Пусть теперь $s\neq 0$. Докажем соотношение

$$a_2\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}+\delta_3\tau\geqslant\Omega|s|$$

или равносильное ему

$$a_2\left(\frac{|s|}{\tau}\right)^{1/(2m-1)}+\delta_3\frac{\tau}{|s|}\geqslant\Omega.$$

Наименьшее значение функции $\varphi(t)=a_2t^{1/(2m-1)}+\delta_3/t$ при $t>0$ равно Ω, что и доказывает оценка (29).

Неравенство (30) получается из (29) заменой a_2 на b_2, m на 1, s на t, δ_3 на δ_2.

Учитывая неравенства (29), (30), из (28) выводим

$$\left\|\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant \frac{M_j t^{1-k}}{2^{k-1}\Gamma(1/2-k/2)}e^{-\Omega_1 t-\Omega|s|}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)}\exp\left(-\frac{b_1t^2}{4\tau}-a_1\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}\right)d\tau. \tag{32}$$

Оценка интеграла в неравенстве (32) фактически была проведена ранее в лемме 2. Применив эту оценку, придём к требуемому неравенству (27). Лемма доказана.

Следующая лемма является непосредственным следствием лемм 3 и 5.

Лемма 6. *Если выполнено условие 2, то для определяемой равенством (9) операторной функции* $Z_k(t,s)$ *при* $t>0$ *справедлива оценка*

$$\left\|\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)\right\| \leqslant t^{1-k}e^{-\Omega_1 t-\Omega|s|}\sum_{j=1}^{n}\frac{|\theta_{j,n}|M_{k,j}s^{j-2n}}{t^{1-k+(j+1)/m}+|s|^{m(1-k)+j+1}}, \quad M_{k,j}>0. \tag{33}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1 и 2,* $u_0\in D(A^m)$, *оператор* A *при некотором* $q\geqslant 0$ *является генератором ОФБ* $Y_q(s)$, *удовлетворяющей оценке*

$$\|Y_q(s)\|\leqslant \Upsilon e^{\omega s}, \quad s\geqslant 0, \quad \Upsilon\geqslant 1, \quad 0\leqslant\omega<\Omega, \tag{34}$$

где Ω *– постоянная из (31). Тогда задача Дирихле (3), (4) имеет единственное решение, стремящееся к нулю при* $t\to\infty$, *которое представимо в виде*

$$u(t)=W_k(t)u_0=\frac{(-1)^n\cdot 2}{(2n-1)!!}\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds,$$

где $Z_k(t,s)$ *определена равенством (9), а ОФБ* $Y_{2n}(s)$ *выражается через ОФБ* $Y_q(s)$ *по формуле (2).*

Доказательство. Сходимость определяющего функцию $u(t)=W_k(t)u_0$ интеграла и возможность его дифференцирования обусловлены оценкой (33). Проверим, что эта функция является решением задачи (3), (4).

Также как и при доказательстве теоремы 1 предположим вначале, что $u_0\in D(A^{m+[n/2]+2})$, $q>0$ и $\tilde Y_0(s)u_0$ определена равенством (18). После интегрирования по частям внеинтегральные слагаемые обратятся в нуль и мы получим

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=2\int\limits_0^\infty\left(\frac{\partial^2 Z_k(t,s)}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial Z_k(t,s)}{\partial t}\right)\tilde Y_0(s)u_0\,ds=$$

$$=2\int\limits_0^\infty\left((-1)^m B_m\frac{\partial^{2m}Z_k(t,s)}{\partial s^{2m}}-\sum_{n=0}^{m-1}B_n\frac{\partial^{2n}Z_k(t,s)}{\partial s^{2n}}\right)\tilde Y_0(s)u_0\,ds=$$

$$=2\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\left((-1)^m B_{2m}\frac{d^{2m}\tilde Y_0(s)u_0}{ds^{2m}}-\sum_{n=0}^{m-1}B_n\frac{d^{2n}\tilde Y_0(s)u_0}{ds^{2n}}\right)ds=$$

$$=2\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\left((-1)^m B_m A^m\tilde Y_0(s)u_0-\sum_{n=0}^{m-1}B_nA^n\tilde Y_0(s)u_0\right)ds=-2P_m(A)\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\tilde Y_0(s)u_0\,ds=$$

$$=\frac{(-1)^n\cdot 2}{(2n-1)!!}P_m(A)\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds=-P_m(A)u(t).$$

Таким образом, функция $W_k(t)u_0$ является решением уравнения (3) на плотном в $D(A^m)$ множестве $D(A^{m+[n/2]+2})$ элементов u_0. В силу ограниченности в пространстве E операторной функции $W_k(t)$ утверждение будет справедливо и для $u_0\in D(A^m)$.

Случай $q=0$ рассматривается аналогично, причём со значительными упрощениями.

Поскольку оценка (33) содержит множитель $\exp(-\Omega_1 t)$, то, очевидно, решение $u(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$.

Остальные утверждения теоремы 3 уже фактически установлены в теореме 1. Теорема доказана.

Замечание. Если в теореме 3 условие 2 не выполнено, то также как и в теореме 1 ОФБ $Y_q(s)$ должна быть равномерно ограниченной. При этом указанное решение задачи Дирихле (3), (4), вообще говоря, не обязано стремится к нулю при $t \to \infty$. Для стремления решения к нулю, также как и в теореме 2, от ОФБ $Y_q(s)$ следует дополнительно потребовать выполнения неравенства (24).

Пример 3. Пусть $E = \mathbb{R}$, параметр $m = 1$, $P_1(A) = B_1 A + B_0$, где $B_1 > 0$ (условие параболичности), $A = -A_0^2$, $A_0 \in \mathbb{R}$, и тогда $Y_0(s) = \cos(A_0 s)$. Пусть также $B_0 < 0$ (условие эллиптичности многочлена $P_1(A)$), при этом оператор $B = -\mu^2 B_1 - B_0$ для $\mu \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию 2. Тогда, учитывая результаты примера 1, получаем

$$Q(t,\sigma) = \exp(-tB_1\sigma^2 + tB_0), \quad G(t,s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t B_1}} \exp\left(-\frac{s^2}{4tB_1} + tB_0\right),$$

$$Z_k(t,s) = \frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\Gamma(1/2-k/2)\sqrt{\pi B_1}} \int\limits_0^\infty \tau^{k/2-2} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau} - \frac{s^2}{4\tau B_1} + \tau B_0\right) d\tau =$$

$$= \frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\Gamma(1/2-k/2)\sqrt{\pi B_1}} \int\limits_0^\infty \tau^{k/2-2} \exp\left(-\frac{t^2 B_1 + s^2}{4\tau B_1} + \tau B_0\right) d\tau =$$

$$= \frac{2^{k/2} t^{1-k} (t^2 B_1 + s^2)^{k/4-1/2}}{\Gamma(1/2-k/2)\sqrt{\pi B_1}(-B_0 B_1)^{k/4-1/2}} K_{1-k/2}\left(\frac{\sqrt{-B_0 B_1 (t^2 B_1 + s^2)}}{B_1}\right),$$

при этом был использован интеграл 2.3.16.1 из [25].

По формуле (16) запишем стремящееся к нулю при $t \to \infty$ решение задачи Дирихле (3), (4) для $m = 1$ в виде

$$u(t) = W_k(t) u_0 = 2 \int\limits_0^\infty Z_k(t,s) \cos(A_0 s) u_0 \, ds.$$

4. Весовые граничные задачи в случае $k \geqslant 1$. Непосредственной проверкой устанавливается следующая

Лемма 7. *Если при $k < 1$ функция $v_k(t)$ удовлетворяет задаче Дирихле (3), (4), то при $k > 1$ функция $u(t) = t^{1-k} v_{2-k}(t)$ является ограниченным на бесконечности решением уравнения (3), удовлетворяющим условию*

$$\lim_{t\to 0} t^{k-1} u(t) = u_0. \tag{35}$$

Из леммы 7 и теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Пусть $k > 1$, $u_0 \in D(A^m)$, выполнены условия 1 и 2, оператор A при некотором $q \geqslant 0$ является генератором ОФБ $Y_q(s)$, удовлетворяющей оценке (34). Тогда весовая задача Дирихле (3), (35) имеет единственное решение, стремящееся к нулю при $t \to \infty$, которое представимо в виде*

$$u(t) = \frac{(-1)^n \cdot 2t^{1-k}}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_{2-k}(t,s) s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 \, ds,$$

где $Z_{2-k}(t,s)$ определена равенством (9), а ОФБ $Y_{2n}(s)$, $2n \geqslant q$, выражается через ОФБ $Y_q(s)$ по формуле (2).

Как уже было установлено ранее, если выполнено условие 2 и оператор A является генератором операторной косинус-функции $Y_0(s)$, то определяемая равенством (11) полугруппа $U(t; P_m(A))$ будет сжимающей, следовательно, по теореме 5.6 из [1, гл. 1, § 5] оператор

$$P_{1/2}(A) = -\sqrt{-P_m(A)}$$

является генератором сжимающей полугруппы $U_1(t;P_{1/2}(A))$, которая имеет вид

$$U_1(t;P_{1/2}(A))=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \sin(t\sqrt{\tau})(\tau I+P_{1/2}(A))^{-1}\,d\tau.$$

В силу теоремы 4.1 из [27] справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть параметр* $k\geqslant 1$, $u_0\in D(A^{2m})$, *выполнены условия 1 и 2, оператор* A *является генератором операторной косинус-функции* $Y_0(s)$, *удовлетворяющей оценке (34). Тогда функция*

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_1^\infty(\xi^2-1)^{k/2-1}U_1(t\xi;P_{1/2}(A))(-P_{1/2}(A))^{k-1}u_1\,d\xi$$

является единственным решением уравнения (3), удовлетворяющим условиям

$$\lim_{t\to 0}t^k u'(t)=u_1,\quad \lim_{t\to\infty}u(t)=0. \tag{36}$$

Теорема 5, по сравнению с задачей (3), (35), содержит решение ещё одной весовой граничной задачи при $k>1$, а также решение задачи (3), (36) при $k=1$, которое имеет вид

$$u(t)=-\int\limits_1^\infty(\xi^2-1)^{-1/2}U_1(t\xi;-\sqrt{-P_m(A)})u_1\,d\xi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
2. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, 1989.
3. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. ВИНИТИ. Т. 28. 1990. С. 87–202.
4. *Мельникова И.В., Филинков А.И.* Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. Вып. 6 (300). С. 111–150.
5. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя // Докл. АН СССР. 1997. Т. 352. № 5. С. 587–589.
6. *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 41–59.
7. *Глушак А.В.* Семейство операторных функций Бесселя // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и её прил. Темат. обз. Т. 187. ВИНИТИ РАН, М., 2020. С. 36–43.
8. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 1. Вып. 2 (42). С. 102–143.
9. *Глушак А.В.* О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 583–589.
10. *Кононенко В.И., Шмулевич С.Д.* Об одном абстрактном параболическом уравнении // Изв. вузов. Математика. 1984. № 4. С. 72–75.
11. *Воробьева С.А., Глушак А.В.* Абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащее степени неограниченного оператора // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 706–709.
12. *Глушак А.В.* О свойствах решений уравнений, содержащих степени неограниченного оператора // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1355–1365.
13. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
14. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Соврем. математика. Фунд. направления. 2018. Т. 64. № 2. С. 211–426.

15. *Ситник С.М., Шишкина Э.Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М., 2019.
16. *Шишкина Э.Л.* Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу и гиперболические B-потенциалы // Соврем. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. № 2. С. 157–338.
17. *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1610–1620.
18. *Глушак А.В.* О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 510–514.
19. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.
20. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967.
21. *Глушак А.В., Шмулевич С.Д.* Интегральные представления решений одного сингулярного уравнения, содержащего сумму коммутирующих операторов // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 831–838.
22. *Glushak A.V.* A family of singular differential equations // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 5. P. 763–771.
23. *Koh E.L., Zemanian A.N.* The complex Hankel and I-transformations of generalized functions // SIAM J. Appl. Math. 1968. V. 16. № 5. P. 945–957.
24. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
25. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
26. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
27. *Глушак А.В.* О связи решений абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с дробными степенями операторного коэффициента уравнения // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 575–590.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (НИУ "БелГУ")

Поступила в редакцию 09.04.2023 г.
После доработки 09.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.