

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НЕЧЁТНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

© 2023 г. Т. Е. Моисеев

Исследована задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с краевым условием нечётности на границе области эллиптичности. Получены в явной форме все собственные значения и собственные функции. Доказано, что система собственных функций полна в эллиптической части области и неполна во всей области. Также доказана однозначная разрешимость задачи, решение записано в виде ряда для спектрального параметра не равного собственному значению. Для спектрального параметра, совпадающего с собственным значением, получены условия разрешимости, при выполнении которых семейство решений найдено в виде ряда. Получено условие разрешимости задачи в зависимости от собственных значений. Построенные аналитические решения могут быть эффективно использованы при численном моделировании задач трансзвуковой газовой динамики.

DOI: 10.31857/S0374064123100059, EDN: ONGOZC

1. Постановка задачи. В области $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_{1-} \cup \mathcal{D}_{2-}$, где $\mathcal{D}_+ = \{(r, \Theta) : 0 < r < 1, 0 < \Theta < \pi\}$ – полукруг в верхней полуплоскости, $\mathcal{D}_{1-} = \{(x, y) : -y < x < y + 1, -1/2 < y < 0\}$, $\mathcal{D}_{2-} = \{(x, y) : -y - 1 < x < y, -1/2 < y < 0\}$ – равнобедренные прямоугольные треугольники в нижней полуплоскости, требуется определить регулярное решение уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром μ

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \mu^2 u = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_{1-} \cup \mathcal{D}_{2-}, \quad (1)$$

которое удовлетворяет следующим краевым условиям: на границе области задаются нелокальное условие (условие нечётности)

$$u(x, y) = -u(-x, y) \quad \text{при } x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

и нормальная производная

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = f(\Theta) \quad \text{для } \Theta \in (0, \pi/2). \quad (3)$$

В области гиперболичности уравнения задаются условия Геллерстедта

$$u(x, -x) = 0, \quad x \in (0, 1/2), \quad (4)$$

$$u(x, x) = 0, \quad x \in (-1/2, 0). \quad (5)$$

Заметим, что условие (2) можно заменить условием

$$u(1, \Theta) = -u(1, \pi - \Theta) \quad \text{для } \Theta \in [0, \pi/2], \quad (6)$$

записанным в полярной системе координат. Регулярное решение задачи (1)–(5) (или (1), (3), (6)) изучается в классе функций $u \in C^0(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D}_+) \cap C^2(\mathcal{D}_{1-}) \cap C^2(\mathcal{D}_{2-})$, где $\overline{\mathcal{D}}$ – замыкание области \mathcal{D} . Кроме того, предполагается, что функция $u(x, y)$ непрерывно дифференцируема при переходе через отрезки $(0, 1)$ и $(-1, 0)$ действительной оси и $\operatorname{grad} u$ может обращаться в бесконечность медленнее первой степени в точках $(-1, 0)$, $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Для

дальнейшего изложения удобно определить область $\mathcal{D}_{1+} = \{(r, \Theta) : 0 < r < 1, 0 < \Theta < \pi/2\}$, а $\overline{\mathcal{D}}_{1+}$ будет соответственно замыканием области \mathcal{D}_{1+} .

2. Сведение задачи (1)–(5) к решению смешанной краевой задачи. Область \mathcal{D} является симметричной по x , что позволяет представить решение задачи (1)–(5) в следующем виде:

$$u(x, y) = U(x, y) + V(x, y),$$

где $u(x, y)$ – решение задачи (1)–(5), а $U(x, y)$ и $V(x, y)$ определяются по формулам

$$U(x, y) = (u(x, y) + u(-x, y))/2, \quad (7)$$

$$V(x, y) = (u(x, y) - u(-x, y))/2. \quad (8)$$

Непосредственно проверяется, что функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ являются решениями уравнения (1). Справедлива следующая

Лемма 1. *Если μ^2 не является собственным значением смешанной краевой задачи, то $U = 0$ при $x > 0$, и решение задачи в этом случае является нечётной по x функцией.*

Доказательство. Функция $U(x, y)$ является чётной по аргументу x , поэтому достаточно доказать, что $U = 0$ при $x > 0$. Как уже отмечалось, функция U является решением уравнения (1) в области \mathcal{D} , а значит и в области $\mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_{1-}$, т.е.

$$U_{xx} + (\operatorname{sgn} y)U_{yy} + \mu^2 U = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}_{1+} \cup \mathcal{D}_{1-}. \quad (9)$$

Из условия (2) и формулы (7) следует, что

$$U(1, \Theta) = 0, \quad \Theta \in [0, \pi/2]. \quad (10)$$

При $x = 0$ из формулы (7) вытекает условие

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad y \in (0, 1). \quad (11)$$

Полагая в (7) $y = -x$ и учитывая условия (4), (5), имеем

$$U(x, -x) = 0, \quad x \in [0, 1/2]. \quad (12)$$

Итак, мы получили, что функция U – решение смешанной краевой задачи (9)–(12). Задача (9)–(12) обладает только тривиальным (нулевым) решением, если только μ^2 не является точкой спектра [1]. Отсюда следует, что решение $u(x, y)$ – нечётная по x функция и справедливо равенство $u(x, y) = V(x, y)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если μ^2 не является собственным значением смешанной краевой задачи (9)–(12), то решение $u(x, y)$ задачи (1)–(5) является решением задачи Неймана–Трикоми в области $\mathcal{D}_{1+} \cup \mathcal{D}_{1-}$.*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем $u(x, y) = V(x, y)$. Как уже отмечалось, функция V является решением уравнения (1) во всей области \mathcal{D} , а значит, она будет решением уравнения в области $\mathcal{D}_{1+} \cup \mathcal{D}_{1-}$, т.е.

$$V_{xx} + (\operatorname{sgn} y)V_{yy} + \mu^2 V = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}_{1+} \cup \mathcal{D}_{1-}. \quad (13)$$

Положив в формуле (8) $x = 0$, получим равенство

$$V(0, y) = 0. \quad (14)$$

Так как $u(x, y) = V(x, y)$, то для функции $V(x, y)$ будет выполняться условие

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=1} = f(\Theta), \quad \Theta \in (0, \pi/2). \quad (15)$$

Наконец, пользуясь условиями (4), (5), находим

$$v(x, -x) = 0, \quad x \in [0, 1/2]. \tag{16}$$

Лемма доказана.

Итак, решение задачи (1)–(5) представимо в виде суммы решений смешанной краевой задачи (9)–(12) и задачи Неймана–Трикоми (13)–(16).

3. Собственные значения и собственные функции задачи (1)–(5). Собственные функции смешанной краевой задачи (9)–(12) могут быть записаны в виде

$$U = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} \cos((2m + 1/2)(\pi/2 - \Theta)) J_{2m+1/2}(r\mu) & \text{в } \mathcal{D}_{1+}, \\ \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{m+1/4} J_{2m+1/2}(\mu\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{1-}, \end{cases} \tag{17}$$

где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Собственные значения μ_{mn} смешанной краевой задачи (9)–(12) определяются как корни уравнения

$$J_{2m+1/2}(\mu_{mn}) = 0, \quad m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{18}$$

где $J_{2m+1/2}(\mu_{mn})$ – функция Бесселя первого рода.

Аналогично записываются собственные функции задачи Неймана–Трикоми (13)–(16)

$$u_k = \begin{cases} \frac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} \sin(2(k - 1/4)(\pi/2 - \Theta)) J_{2k-1/2}(r\bar{\mu}) & \text{в } \mathcal{D}_{1+}, \\ C \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{k-1/4} J_{2k-1/2}(\bar{\mu}\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{1-}, \end{cases} \tag{19}$$

где $k \in \mathbb{N}$, C – произвольная постоянная, отличная от нуля. Собственные значения $\bar{\mu}_{kl}$ задачи Неймана–Трикоми (13)–(16) определяются как корни следующего уравнения:

$$J'_{2k-1/2}(\bar{\mu}_{kl}) = 0, \quad k, l \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что если спектральный параметр μ^2 не является корнем уравнения (18), а является корнем уравнения (20), то собственные функции задачи (1)–(5) будут иметь вид

$$v_{ml} = \begin{cases} \frac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} \sin(2(k - 1/4)(\pi/2 - \Theta)) J_{2k-1/2}(r\bar{\mu}_{ml}) & \text{в } \mathcal{D}_{1+}, \\ C \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{k-1/4} J_{2k-1/2}(\bar{\mu}_{ml}\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{1-}, \\ C \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{k-1/4} J_{2k-1/2}(\bar{\mu}_{ml}\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{2-}, \end{cases} \tag{21}$$

где $m, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Перед тем как переходить к построению собственных функций, в случае когда μ^2 является точкой спектра задачи Трикоми, т.е. μ^2 является одним из корней уравнения (18), докажем важную теорему, из которой будет следовать полнота собственных функций в области эллиптичности уравнения (1).

4. Отсутствие кратных корней у уравнений для собственных значений.

Теорема 1. Уравнения (18) и (20) не имеют общих корней, за исключением быть может нуля.

Доказательство. Предположим, что нашлась точка z такая, что для некоторых чисел $k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливы равенства

$$J_{2m+1/2}(z) = 0, \tag{22}$$

$$J'_{2k-1/2}(z) = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим сначала случай $k = m$. Справедлива следующая формула [2, с. 628]:

$$\frac{(2m - 1/2)J_{2m-1/2}(z)}{z} - J'_{2m-1/2}(z) = J_{2m+1/2}(z), \quad (24)$$

из которой и из формул (22), (23) следует, что $J_{2m-1/2}(z) = 0$, поэтому с учётом (23) число z является кратным корнем уравнения $J_{2m-1/2}(z) = 0$. Но функция Бесселя может иметь кратный корень только в случае $z = 0$. Итак, в случае $k = m$ наше утверждение доказано.

Пусть $k > m$, т.е. $k = m + p$, где $p \in \mathbb{N}$. Тогда из формулы (24) получаем

$$0 = J'_{2m+2p-1/2}(z) = \frac{(2m + 2p - 1/2)J_{2m+2p-1/2}(z)}{z} - J_{2m+2p+1/2}(z). \quad (25)$$

Используя полиномы Ломмеля [3, с. 322; 4, с. 43], запишем две формулы:

$$J_{2m-1/2+2p}(z) = J_{2m+1/2}(z)R_{2p-1,2m+1/2}(z) - J_{2m-1/2}(z)R_{2p-2,2m+3/2}(z), \quad (26)$$

$$J_{2m+1/2+2p}(z) = J_{2m+1/2}(z)R_{2p,2m+1/2}(z) - J_{2m-1/2}(z)R_{2p-1,2m+3/2}(z), \quad (27)$$

где $R_{2p-2,2m+3/2}(z)$ и $R_{2p-1,2m+1/2}(z)$ – многочлены Ломмеля степени $2p - 2$ и $2p - 1$ соответственно относительно переменной $1/z$.

Подставив формулы (26), (27) в равенство (25), получим

$$0 = J_{2m+1/2}(z) \left[\frac{(2m + 2p - 1/2)}{z} R_{2p-1,2m+1/2}(z) - R_{2p,2m+1/2}(z) \right] - \\ - J_{2m-1/2}(z) \left[\frac{(2m + 2p - 1/2)}{z} R_{2p-2,2m+3/2}(z) - R_{2p-1,2m+1/2}(z) \right].$$

С учётом (22) имеем

$$0 = J_{2m-1/2}(z) \left[\frac{(2m + 2p - 1/2)}{z} R_{2p-2,2m+3/2}(z) - R_{2p-1,2m+1/2}(z) \right].$$

Из последнего равенства следует, что либо $J_{2m-1/2}(z) = 0$, либо выражение в квадратной скобке равно нулю.

Если $J_{2m-1/2}(z) = 0$, то из формулы (24) с учётом (22) следует, что $J'_{2m-1/2}(z) = 0$, но тогда z – кратный корень уравнения $J_{2m-1/2}(z) = 0$, а этого быть не может.

Остаётся рассмотреть случай, когда квадратная скобка равна нулю, т.е.

$$\frac{(2m + 2p - 1/2)}{z} R_{2p-2,2m+3/2}(z) - R_{2p-1,2m+1/2}(z) = 0.$$

В этом случае z – алгебраическое число, но по теореме Зигеля [4, с. 74] с учётом (22) этого быть не может.

Рассмотрим теперь случай $k < m$, тогда $m = k + p$, где $p \in \mathbb{N}$. Из уравнения (22) с использованием полиномов Ломмеля [3, с. 322; 4, с. 43] получаем

$$0 = J_{2m+1/2}(z) = J_{2k+1/2+2p}(z) = J_{2k+1/2}(z)R_{2p,2k+1/2}(z) - J_{2k-1/2}(z)R_{2p-1,2k+3/2}(z). \quad (28)$$

Далее, из равенства (24) при $m = k$ с учётом (23) сразу запишем

$$\frac{(2k - 1/2)J_{2k-1/2}(z)}{z} = J_{2k+1/2}(z). \quad (29)$$

Подставив теперь (29) в (28), будем иметь

$$0 = J_{2k-1/2}(z) \left[\frac{(2k-1/2)}{z} R_{2p,2k+1/2}(z) - R_{2p-1,2k+1/2}(z) \right]. \tag{30}$$

Из (30) следует, что либо $J_{2k-1/2}(z) = 0$, либо

$$\frac{(2k-1/2)}{z} R_{2p,2k+1/2}(z) - R_{2p-1,2k+1/2}(z) = 0.$$

Если $J_{2k-1/2}(z) = 0$, то в силу (23) число z – кратный корень уравнения $J_{2k-1/2}(z) = 0$, но этого быть не может. Если же

$$\frac{(2k-1/2)}{z} R_{2p,2k+1/2}(z) - R_{2p-1,2k+1/2}(z) = 0,$$

то z является рациональным числом и одновременно является корнем уравнения (22), но это противоречит теореме Зигеля [4, с. 74]. Теорема доказана.

5. Построение собственных функций в случае, когда спектральный параметр μ^2 является корнем уравнения (18). В случае если μ^2 является собственным значением смешанной задачи (9)–(12) функции, определяемые по формуле (21), не являются собственными для задачи (1)–(5) (следует из теоремы 1), и задача (9)–(12) имеет нетривиальное решение $U(x, y)$.

Поставим теперь задачу для определения функции $V(x, y)$ (формула (7)). Заметим, что эта функция нечётная, поэтому будет выполнено условие

$$V(0, y) = 0. \tag{31}$$

На характеристике $y = -x$ функция обращается в нуль:

$$V(x, -x) = 0. \tag{32}$$

Нормальная производная функции V удовлетворяет условию

$$\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=1}, \tag{33}$$

где U – собственная функция задачи (9)–(12) (формула (17)). Будем искать решение этой задачи (задачи Неймана–Трикоми) в виде

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k, \tag{34}$$

где

$$u_k = \begin{cases} \frac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} \sin(2(k-1/4)(\pi/2 - \Theta)) J_{2k-1/2}(r\mu), & y > 0, \\ C \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{k-1/4} J_{2k-1/2}(\mu \sqrt{x^2 - y^2}), & y < 0, \end{cases}$$

при $\mu = \mu_{kn}$, μ_{kn} – корень уравнения (18), а коэффициенты A_k определяются из условия (33).

Теорема 2. *Ряд, определяемый по формуле (34), является решением задачи (31)–(33) и является равномерно сходящимся в \overline{D} вместе с производной по r при $\mu = \mu_{kn}$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что функция u_k удовлетворяет условиям (31), (32). Проверка условия (33) приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} \sin(2(k-1/4)(\pi/2 - \Theta)) \mu J'_{2k-1/2}(\mu) =$$

$$= -(-1)^m \sqrt{2} \cos((2m + 1/2)(\pi/2 - \Theta)) \mu J'_{2m+1/2}(\mu). \tag{35}$$

Если мы докажем равномерную сходимость ряда в левой части равенства (35), то тем самым построим собственную функцию.

Исследуем на равномерную сходимость ряд (34). Для удобства изложения введём новые переменные

$$B_k := A_k \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} \mu J'_{2k-1/2}(\mu), \quad \psi/2 := \pi/2 - \Theta$$

и обозначим правую часть в (35) через

$$f(\Theta) := -(-1)^m \sqrt{2} \cos((2m + 1/2)(\pi/2 - \Theta)) \mu J'_{2m+1}(\mu).$$

Из (35) получаем явное выражение для B_k в следующем виде:

$$B_k = \int_0^\pi f(\pi/2 - \psi/2) h_k^{1/2} d\psi, \tag{36}$$

где

$$h_k^{1/2} = \frac{2}{\pi \sqrt{2 \cos \psi/2}} \left(\sum_{j=0}^k C_{-1/2}^j \sin((k-j)\psi) \right)$$

есть биортогональная система к системе $\{\sin((k-1/4)\psi)\}_1^\infty$. Далее из формулы (13) (см. [5]) получаем

$$-(k-1/4)h_k^{1/2} = (H_{k-1}^{-3/2})', \tag{37}$$

где

$$H_n^\beta = \frac{2}{\pi (2 \cos \psi/2)^\beta} \left(\sum_{k=0}^n C_\beta^k \sin((n-k)\psi) - C_{\beta/2}^n \right),$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\beta = -1/2$, а h_m^β определяются по формуле

$$h_m^\beta = \frac{2}{\pi (2 \cos(\psi/2))^\beta} \sum_{k=0}^{m-1} C_\beta^k \sin((m-k)\psi). \tag{38}$$

Заметим, что биномиальный коэффициент C_β^m для $\beta = -1/2$ ведет себя при $m \rightarrow \infty$ как $1/\sqrt{m}$ [4, с. 67]. Далее, подставив формулу (37) в (36) и проинтегрировав по частям полученное выражение с учётом равенства $H_n^{-3/2}(\pi) = 0$, вытекающего из (38), получим

$$B_k = \frac{f(0)H_{k-1}^{-3/2}(0)}{k-1/4} - \frac{1}{2k-1/2} \int_0^\pi f'(\pi/2 - \phi/2) H_{k-1}^{-3/2}(\phi) d\phi = B'_k + B''_k. \tag{39}$$

Оценим скорость убывания второго слагаемого в (39). Для этого подставим в него формулу (18) из работы [6] и в результате получим

$$B''_{k+1}(2k+3/2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f'(\pi/2 - \phi/2) \cos((k+3/4)\phi) d\phi + \\ + \frac{(-1)^k}{\pi^2} \int_0^\pi f'(\pi/2 - \phi/2) (2 \cos(\phi/2))^{3/2} d\phi \int_0^1 \frac{t^{k-1/2} (1-t)^{-1/2} (1+t) dt}{(1-t)^2 + 4t \cos^2(\phi/2)}. \tag{40}$$

Заметим, что первое слагаемое есть величина порядка $O(1/k^\alpha)$ [7], а внутренний интеграл второго слагаемого в (40) можно оценить через бета-функцию Эйлера:

$$\int_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t) dt}{(1-t)^2 + 4t \cos^2(\phi/2)} \leq \int_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t) dt}{[(1-t)^2 + 4t \cos^2(\phi/2)]^{1/4-\varepsilon} [(1-t)^2 + 4t \cos^2(\phi/2)]^{3/4+\varepsilon}} \leq \int_0^1 2 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{2\varepsilon-1} dt}{(2t \cos^2(\phi/2))^{3/4+\varepsilon}} \leq C \frac{B(k-1/4-\varepsilon, 2\varepsilon)}{\cos^{3/2+4\varepsilon}(\phi/2)}. \tag{41}$$

В формуле

$$B(k-1/4-\varepsilon, 2\varepsilon) = \frac{\Gamma(k-1/4-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(k-1/4+\varepsilon)},$$

связывающей бета- и гамма-функции Эйлера, величина, стоящая в правой части, имеет порядок $1/k^{2\varepsilon}$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из (41) следует, что

$$|B_k''| \leq \frac{c}{k^{1+2\varepsilon}}, \tag{42}$$

где c – некоторая положительная постоянная.

Оценим скорость убывания первого слагаемого в (39). Для этого достаточно оценить $H_{k-1}^{-3/2}(0)$. Опять, используя формулу (8) из [6], получим

$$H_n^{-3/2}(0) = \frac{2}{\pi} + \frac{2^{5/2}(-1)^n}{\pi} \int_0^1 \frac{t^{n+1/2}(1-t)^{-1/2}}{(1+t)^2} dt. \tag{43}$$

Нетрудно видеть, что интеграл в (43) допускает оценку

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1/2}(1-t)^{-1/2}}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^1 t^{n+1/2}(1-t)^{-1/2} dt = B(n+3/2, 1/2) = \frac{\Gamma(n+3/2)\Gamma(1/3)}{\gamma(n+2)} \leq \frac{C}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда и из оценки (42) получаем

$$B_k = \frac{2}{\pi k} + \bar{B}_k, \tag{44}$$

где \bar{B}_k удовлетворяет (42).

Ряд (34) можно записать следующим образом (через коэффициенты B_k):

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu} \sin((2k-1/2)\phi/2). \tag{45}$$

Используя асимптотическое выражение

$$\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu} = \frac{r^{2k-1/2}\mu}{2k-1/2} (1 + O(1/k)), \tag{46}$$

справедливое для больших k , запишем ряд (45) с учётом (44), (46) следующим образом:

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu} \sin((2k-1/2)\phi/2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k-1/2}\mu}{\pi k^2} \sin((2k-1/2)\phi/2) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k \frac{r^{2k-1/2} \mu}{2k-1/2} (1 + O(1/k)) \mu \sin(2k-1/2)\phi/2. \quad (47)$$

Из оценки (47) и из формулы (42) для \overline{B}_k следует равномерная сходимость ряда (34) и продифференцированного по r ряда (34), т.е. ряд (34) является решением задачи (31)–(33). Теорема доказана.

Следствие. Если μ является корнем уравнения (18), то собственная функция нелокальной краевой задачи (1)–(5) имеет вид

$$u(x, y) = \begin{cases} U(x, y) + V(x, y) & \text{при } x > 0, \\ U(-x, y) - V(-x, y) & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (48)$$

где $U(x, y)$ определяется по формуле (34), а $V(x, y)$ – по формуле (17).

Подытожим результаты этого пункта.

Теорема 3. Собственные функции задачи (1)–(5), отвечающие собственным значениям μ^2 , где μ определяется из уравнения (18), вычисляются по формуле (48); если же μ определяются из уравнения (20), то собственные функции вычисляются по формуле (19). Других собственных значений и собственных функций, а также присоединённых функций, нелокальная краевая задача (1)–(5) не имеет.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что не существует других собственных значений и других собственных функций, что следует из работы [1], где это было доказано для задач Трикоми и Неймана–Трикоми.

6. Полнота собственных функций.

Теорема 4. Система собственных функций задачи (1)–(5) полна в пространстве $L_2(\mathcal{D}_+)$, т.е. полна в области эллиптичности уравнения (1).

Доказательство. Достаточно доказать, что не существует функции из $L_2(\mathcal{D}_+)$, которая ортогональна всем собственным функциям. Пусть такая функция $f \in L_2(\mathcal{D}_+)$ существует. Обозначим

$$F(x, y) = [f(x, y) + f(-x, y)]/2, \quad L(x, y) = [f(x, y) - f(-x, y)]/2. \quad (49)$$

Очевидно, что $F(x, y)$ – чётная по x функция, а $L(x, y)$ – нечётная по x функция. При этом

$$f(x, y) = F(x, y) + L(x, y). \quad (50)$$

Функция $f(x, y)$ ортогональна всем собственным функциям, определяемым равенством (19), которые нечётны по x , поэтому

$$\int_{\mathcal{D}_+} f(x, y) u_k dx dy = \int_{\mathcal{D}_+} F(x, y) u_k dx dy + \int_{\mathcal{D}_+} L(x, y) v_{ml} dx dy = 2 \int_{\mathcal{D}_{1+}} L(x, y) v_{ml} dx dy = 0.$$

Итак, собственные функции задачи Неймана–Трикоми ортогональны функции $L(x, y)$ в области \mathcal{D}_{1+} . Так как собственные функции задачи Неймана–Трикоми полны в $L_2(\mathcal{D}_{1+})$, то $L(x, y) = 0$ в области \mathcal{D}_+ . Следовательно,

$$f(x, y) = F(x, y).$$

Далее, функция $f(x, y)$ (50) также ортогональна всем функциям вида (48). Так как $F(x, y)$ (49) чётная в \mathcal{D}_+ , то с учётом вида (48) получаем равенства

$$0 = \int_{\mathcal{D}_+} f(x, y) u(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{D}_+} F(x, y) u(x, y) dx dy = 2 \int_{\mathcal{D}_{1+}} F(x, y) U(x, y) dx dy.$$

Учитывая, что $V(x, y)$ – собственные функции смешанной краевой задачи (9)–(12) и они согласно [1] полны в пространстве $L_2(\mathcal{D}_{1+})$, получаем $F(x, y) = 0$. Поэтому $f(x, y) = 0$. Теорема доказана.

7. Исследование разрешимости задачи (1)–(5). В случае если μ^2 не является собственным значением смешанной краевой задачи (9)–(12) функция

$$U(x, y) = [u(x, y) - u(-x, y)]/2 = 0$$

согласно лемме 2. Поэтому $u(x, y) = V(x, y)$ является нечётной по x функцией, и её достаточно найти при $x > 0$. Запишем теперь задачу для $V(x, y)$:

$$V_{xx} + (\operatorname{sgn} y)V_{yy} + \mu^2 V = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}_{1+} \cup \mathcal{D}_{1-}, \tag{51}$$

в силу нечётности функции $V(x, y)$ при $x = 0$ получаем условие

$$V(0, y) = 0. \tag{52}$$

На характеристике $y = -x$ функция обращается в нуль:

$$V(x, -x) = 0. \tag{53}$$

Нормальная производная $V(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=1} = f(\Theta) \quad \text{для } \Theta \in (0, \pi/2). \tag{54}$$

Будем искать решение этой смешанной краевой задачи в виде

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k, \tag{55}$$

где

$$u_k = \begin{cases} \frac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} \sin(2(k-1/4)(\pi/2 - \Theta)) J_{2k-1/2}(r\mu), & y > 0, \\ C \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{k-1/4} J_{2k-1/2}(\mu\sqrt{x^2-y^2}), & y < 0. \end{cases}$$

Теорема 5. Если функция $f(\theta)$ непрерывно дифференцируема и её производная принадлежит классу Гёльдера $f'(\theta) \in C^\alpha([0, \pi/2])$ с некоторым показателем $\alpha > 0$ и $f(\pi/2) = 0$, то ряд, определяемый по формуле (55), является решением задачи (51)–(54) и равномерно сходится в $\overline{\mathcal{D}_{1+}} \cup \overline{\mathcal{D}_{1-}}$ вместе с производной по r .

Доказательство. Непосредственно проверяется, что функция u_k удовлетворяет условиям (52), (53). Проверка условия (54) приводит к условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} \sin(2(k-1/4)(\pi/2 - \Theta)) \mu J'_{2k-1/2}(\mu) = f(\theta). \tag{56}$$

Если мы докажем равномерную сходимость ряда в левой части этого равенства, то тем самым построим решение задачи (51)–(54).

Исследуем на равномерную сходимость ряд, стоящий в (56). Для удобства изложения введём новые переменные

$$B_k := A_k \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} \mu J'_{2k-1/2}(\mu), \quad \psi/2 := \pi/2 - \Theta.$$

Из (56) получаем явное выражение для B_k в следующем виде:

$$B_k = \int_0^\pi f(\pi/2 - \psi/2) h_k^{1/2} d\psi, \tag{57}$$

где

$$h_k^{1/2} = \frac{2}{\pi \sqrt{2 \cos \psi/2}} \left(\sum_{j=0}^k C_{-1/2}^j \sin((k-j)\psi) \right)$$

есть биортогональная система к $\{\sin((k-1/4)\psi)\}_1^\infty$. Далее из формулы (8) [5] имеем

$$-(k-1/4)h_k^{1/2} = (H_{k-1}^{-3/2})', \tag{58}$$

где

$$H_n^\beta = \frac{2}{\pi(2 \cos \psi/2)^\beta} \left(\sum_{k=0}^n C_\beta^k \sin((n-k)\psi) - C_\beta^n/2 \right), \tag{59}$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\beta = -1/2$, а h_m^β определяются по формуле

$$h_m^\beta = \frac{2}{\pi(2 \cos \psi/2)^\beta} \sum_{k=0}^{m-1} C_\beta^k \sin((m-k)\psi).$$

Заметим, что биномиальный коэффициент C_β^m для $\beta = -1/2$ ведет себя при $m \rightarrow \infty$ как $1/\sqrt{m}$ [4, с. 67]. Далее, подставляя формулу (58) в (57) и интегрируя по частям полученное выражение с учётом равенства $H_n^{-3/2}(\pi) = 0$, вытекающего из (59), и равенства $f(\pi/2) = 0$, будем иметь

$$B_k = \frac{2}{2k-1/2} \int_0^\pi f'(\pi/2 - \phi/2) H_{k-1}^{-3/2}(\phi) d\phi. \tag{60}$$

Оценим скорость убывания полученного выражения. Для этого подставим в (60) формулу (8) из статьи [6] и в результате получим

$$B_{k+1}(2k+3/2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f'(\pi/2 - \phi/2) \cos((k+3/4)\phi) d\phi + \frac{(-1)^k}{\pi^2} \int_0^\pi f'(\pi/2 - \phi/2) (2 \cos(\phi/2))^{3/2} d\phi \int_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t) dt}{(1-t)^2 + 4t \cos^2(\phi/2)}. \tag{61}$$

Заметим, что первое слагаемое в (61) – величина порядка $O(1/k^\alpha)$ [7], а внутренний интеграл второго слагаемого можно оценить через бета-функцию Эйлера:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t) dt}{(1-t)^2 + 4t \cos^2(\phi/2)} &\leq \int_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t) dt}{[(1-t)^2 + 4t \cos^2(\phi/2)]^{1/4-\varepsilon} [(1-t)^2 + 4t \cos^2(\phi/2)]^{3/4+\varepsilon}} \leq \\ &\leq \int_0^1 2 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{2\varepsilon-1} dt}{(2t \cos^2(\phi/2))^{3/4+\varepsilon}} \leq C \frac{B(k-1/4-\varepsilon, 2\varepsilon)}{\cos^{3/2+4\varepsilon}(\phi/2)}. \end{aligned} \tag{62}$$

В формуле

$$B(k - 1/4 - \varepsilon, 2\varepsilon) = \frac{\Gamma(k - 1/4 - \varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(k - 1/4 + \varepsilon)},$$

связывающей бета- и гамма-функции Эйлера, величина, стоящая в правой части, имеет порядок $1/k^{2\varepsilon}$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из (62) следует, что

$$|B_k| \leq \frac{c}{k^{1+2\varepsilon}}, \tag{63}$$

где c – некоторая положительная постоянная. Ряд (55) можно записать следующим образом (через коэффициенты B_k):

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu} \sin((2k - 1/2)\phi/2). \tag{64}$$

Отметим асимптотическое выражение

$$\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu} = \frac{r^{2k-1/2}\mu}{2k - 1/2} (1 + O(1/k)),$$

справедливое для больших k , из которого вытекает верное при больших k неравенство

$$\left| \frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)} \right| \leq \frac{c}{k}.$$

Из этой оценки и из формулы (63) следует равномерная сходимость ряда (55) и продифференцированного по r ряда (55), т.е. функция, представимая формулой (55), является решением задачи (50)–(54). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случаи, когда μ^2 является собственным значением задачи (1)–(5), т.е. корнем уравнения (18) или уравнения (20).

Теорема 6. *Если μ является корнем уравнения (20) при некотором $k = p$, функция $f(\theta)$ непрерывно дифференцируема и её производная принадлежит классу Гёльдера*

$$f'(\theta) \in C^\alpha([0, \pi/2]), \quad f(\pi/2) = 0,$$

то задача (1)–(5) разрешима, если выполнено следующее условие:

$$\int_0^\pi f(\pi/2 - \phi/2) h_p^{1/2} d\phi = 0,$$

где $h_p^{1/2}$ – функция из (38). В случае выполнения условия (64) решение задачи (1)–(5) неединственно и определяется с точностью до собственной функции (19), отвечающей собственному значению из уравнения (20).

Теорема 7. *Если μ является корнем уравнения (18), функция $f(\theta)$ непрерывно дифференцируема и её производная принадлежит классу Гёльдера*

$$f'(\theta) \in C^\alpha([0, \pi/2]), \quad f(\pi/2) = 0,$$

то задача (1)–(5) разрешима, её решение неединственно и определяется с точностью до собственной функции (48), отвечающей собственному значению из уравнения (18).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пономарев С.М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения Лаврентьева–Бицадзе: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
3. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. М., 1949.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., 1965.
5. *Моисеев Е.И.* О дифференциальных свойствах разложений по системе синусов и косинусов // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 1. С. 117–126.
6. *Моисеев Е.И.* О базисности систем синусов и косинусов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 794–798.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М., 1985.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
После доработки 14.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.