ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1385–1396

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.2

О ВЛИЯНИИ НЕИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ НА ПОСТАНОВКУ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© 2023 г. А. Б. Расулов

Изучено влияние неизолированных особенностей в младших коэффициентах (т.е. когда младшие коэффициенты имеют особенности по замкнутым линиям, лежащим внутри области) уравнения Бицадзе на постановку краевых задач. Обнаружено, что условия в задаче Римана–Гильберта на границе области недостаточно для её решения, поэтому рассмотрена задача, объединяющая элементы задач Римана–Гильберта на границе области и линейного сопряжения на окружностях-носителях сингулярностей коэффициентов, лежащих внутри области. С помощью надлежащего уточнения теоремы Келлога о конформном отображении этой области на круг исследован вопрос разрешимости этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123100060, EDN: ONKXZI

Статья посвящается юбилеям моих учителей:
75-летию Александра Павловича Солдатова
и 85-летию Нусрата Раджабовича Раджабова

1. История вопроса. Классическая теорема Коши–Ковалевской гарантирует локальную аналитичность решения линейного дифференциального уравнения, представленного в нормальной форме, если его коэффициенты, правая часть и начальные данные аналитичны (в случае вещественных переменных разлагаются в сходящиеся степенные ряды) или если коэффициенты и правая часть эллиптического уравнения порядка m удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$ (тогда производные порядка m любого решения этого уравнения также удовлетворяют условию Гёльдера с тем же показателем).

Исследования вырождающихся эллиптических уравнений показали, что аналитичность коэффициентов уравнения наследуется его решением. Фундаментальная система состоит из функций, представляющих собой произведение голоморфной в окрестности точки (плоскости) вырождения функции на функцию, которая может иметь особенность на указанном множестве. Эта особенность либо степенная, при этом показатель находится по коэффициентам уравнения, либо логарифмическая, степенная и логарифмическая или экспоненциальная. Для обоснования существования решения краевой задачи для вырождающихся уравнений, как правило, используют неявные методы построения решения (например, метод барьеров). При этом затруднительно выяснить структуру решения и проследить, как аналитичность коэффициентов и правой части уравнения отражается на решении задачи (см. работы [1–8]).

Как следует из исследований, посвящённых вырождающимся дифференциальным уравнениям, на решения краевых задач может влиять особенность коэффициентов, содержащихся в рассматриваемой области. Например, в статье [9] изучена разрешимость задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Коши–Римана

$$w_{\bar z} = \frac{Q(z)}{P(z)}w(z) + a(z)w + b(z)\overline{w}, \quad |z| < 1,$$

где $Q(z)$, $P(z)$ – полиномы, причём $P(z)$ внутри круга $|z| \leqslant 1$ имеет простые корни, $a(z), b(z) \in L^p(D)$ (здесь и дальше $p > 2$). Здесь и ниже используются стандартные обозначения $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$. Показано, что число непрерывных решений задачи зависит не только от индекса, но и от места расположения и типа особенностей коэффициентов уравнения.

В работе [10] для обобщённой системы Коши–Римана с сингулярной линией выявлено, что для корректной постановки краевой задачи необходимо рассматривать задачу, объединяющую элементы задач Римана–Гильберта (на границе области) и линейного сопряжения (на сингулярном отрезке, содержащемся внутри области).

В теории эллиптических уравнений важное место занимает система уравнений Бицадзе [1, с. 134]

$$u_{1xx} - u_{1yy} - 2u_{2xy} = 0, \quad 2u_{1xy} + u_{2xx} - u_{2yy} = 0.$$

Как известно, любая эллиптическая система уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и двумя неизвестными функциями от двух переменных приводится к одному из уравнений [11]:

$$u_{z\bar{z}} = 0 \quad \text{или} \quad u_{\bar{z}\bar{z}} = 0,$$

где $u = u_1 + iu_2$.

Класс задач для первого уравнения (уравнения Лапласа) хорошо изучен, в отличие от задач для второго уравнения (уравнения Бицадзе).

С другой стороны, как следует из работ [12, 13], уравнение Бицадзе непосредственно связано с уравнением Стокса. Согласно [12] в плоском случае уравнение Стокса базируется на функции потока $u_1(x, y)$ и функции напряжения $u_2(x, y)$ и имеет вид

$$u_{1xx} - u_{1yy} = -4\eta u_{2xy}, \quad -u_{1xy} = \eta(u_{2yy} - u_{2xx}),$$

где η – материальная постоянная. Подстановка $2\eta u_2 \to u_2$ переводит эту систему в систему уравнений Бицадзе, поэтому исследование системы уравнений Бицадзе с младшими членами представляет особый интерес.

Уравнение Бицадзе с младшими регулярными коэффициентами было исследовано в работах [1, 14–18] и др. Важность изучения уравнения с главной частью $u_{\bar{z}\bar{z}}$ и с особенностями в младших коэффициентах была подчёркнута ещё в 80-х годах прошлого века А.В. Бицадзе. Но эти исследования были связаны с некоторыми трудностями принципиального характера, особенно когда коэффициенты сингулярны во внутренней точке рассматриваемой области. Понятие сверхсингулярных особенностей было введено Н.Р. Раджабовым [4]. В статье [19] для уравнения Бицадзе с младшими коэффициентами, имеющими в одной внутренней точке рассматриваемой области сильную особенность, найдено интегральное представление обобщённого решения из класса непрерывных функций. В [20] для уравнения Бицадзе с младшими коэффициентами, имеющими в конечном числе точек рассматриваемой области сильные особенности и интегрируемую особенность в начале координат, найдено обобщённое решение из класса непрерывных функций задачи типа Римана–Гильберта.

В настоящей работе исследовано влияние неизолированных особенностей в младших коэффициентах уравнения Бицадзе на постановку краевых задач.

2. Интегральное представление решений в явной форме. Пусть область D содержит окружности $\gamma_j = \{z : |\delta_j| = r_j\}$, где $\delta_j \equiv z - z_j$, $j = \overline{1, n}$, и ограничена простым ляпуновским контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки, и пусть для краткости

$$\rho = \rho_1 \ldots \rho_n, \quad \rho_j(z) = \delta_j^{-1}|\delta_j|||z - z_j| - r_j|, \quad j = \overline{1, n}.$$

В открытом множестве $D_0 = D \setminus \gamma$, $\gamma = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j$, рассмотрим уравнение Бицадзе с сингулярными младшими коэффициентами следующего вида:

$$u_{\bar{z}\bar{z}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\rho_j} u_{\bar{z}} + \frac{a_0}{\rho} u = f, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in C(\overline{D})$, $a_0 = -\rho(ab + b^2)$, $a = -\sum_{j=1}^{n} a_j \rho_j^{-1}$ и функция $b(z) \in C(\overline{D})$ аналитична в области D. Относительно правой части f уравнения предполагаем, что она принадлежит пространству $L^p(G_0)$, $p > 2$, в каждой подобласти $G_0 \subseteq D_0$.

В работе для уравнения Бицадзе (1) построено представление общего решения. Далее для уравнения (1), коэффициенты которого допускают особенность первого порядка на окружности γ_j, исследована краевая задача, объединяющая элементы задач Римана–Гильберта на Γ и линейного сопряжения на γ_j, $j=\overline{1,n}$.

Выбор таких коэффициентов уравнения объясняется тем, что левую часть (1) можно представить в виде

$$u_{\bar z\bar z}+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\rho_j}u_{\bar z}+\frac{a_0}{\rho}u=\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}+a+b\right)(u_{\bar z}-bu) \tag{2}$$

и свести исследование к интегрированию уравнений первого порядка

$$U_{\bar z}-(a+b)U=f,\quad u_{\bar z}+bu=U \tag{3}$$

с сингулярным коэффициентом

$$a=\frac{a_1}{\rho_1}+\ldots+\frac{a_n}{\rho_n} \tag{4}$$

и регулярным коэффициентом b.

Заметим, что функция f принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D_0)$, если в любой подобласти $G_0\in D_0$ её обобщённая производная $f_{\overline{z}}\in L^p_{\rm loc}(G_0)$, $p>2$.

Напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенные в монографии [21] и в книге [8].

Пусть в некотором открытом множестве G на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L^p_{\rm loc}(G)$, т.е. принадлежат $W^{1,p}(G_0)$ в любой ограниченной области G_0, лежащей в множестве G вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности (см. [21]) любое слабое решение u уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}(G)$ и удовлетворяет рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\overline{G_0})$ с показателем $\mu\leqslant(p-2)/p$. В соответствии с внутренней регулярностью решений и согласно свойству левой части уравнения (2) в дальнейшем решение уравнения (1) предполагается регулярным в открытом множестве D_0.

Более точно, под *регулярным решением* уравнения (1) в рассматриваемой области D_0 понимается функция u, которая в любой замкнутой подобласти $\overline{G_0}\subseteq D_0$ имеет первую обобщённую производную по $\overline{z}$, принадлежащую классу $L^p(\overline{G_0})$, и удовлетворяет этому уравнению.

Уравнение (1), согласно (2), (3), сводится к интегрированию двух уравнений первого порядка вида

$$U_{\bar z}-CU=f. \tag{5}$$

Хорошо известно, что в его исследовании существенную роль играет интегральный оператор Помпейу–Векуа [21, с. 31]

$$(Tf)(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_D\frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta-z}, \tag{6}$$

здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. Если $f\in L^p(D)$, $p>2$, то функция $U==Tf$ принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D)$ и удовлетворяет уравнению $U_{\bar z}=f$, причём оператор (6) ограничен. Напомним, что имеет место следующее вложение [21, с. 39] данных пространств в класс Гёльдера:

$$W^{1,p}(D)\subseteq C^\mu(\overline{D}),\quad \mu=1-\frac{2}{p},$$

в частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\overline{D})$. Всюду в дальнейшем предполагается, что $p>2$. Когда точное значение показателя Гёльдера μ несущественно, вместо $C^\mu(\overline{D})$ используем обозначение $H(\overline{D})$ [22, с. 31].

Пусть в уравнении (5) коэффициент C и правая часть f принадлежат классу $L^p(D)$. Очевидно, что в этом случае для функции $V = e^{-TC}U$ справедливо соотношение $V_{\bar z} = e^{-TC}U_{\bar z} - Ce^{-TC}U = e^{-TC}f$. Следовательно, общее решение этого уравнения определяется формулой

$$U = e^{TC}\phi + (e^{TC}Te^{-TC})f \tag{7}$$

с произвольной аналитической в области D функцией ϕ. Функции $e^{\pm TC}$ рассматриваются здесь как операторы умножения.

Теперь рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} - (a+b)u = f \tag{8}$$

с коэффициентом (4), который запишем в виде

$$a(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^*(z-z_j)}{|z-z_j|(|z-z_j|-r_j)} + a_0(z), \quad a_0(z)\in L^p(D),$$

где $a_j^* \in \mathbb{C}$ и функция $b(z)\in C(\overline{D})$ аналитична в области D. В этом случае коэффициент a имеет особенность на окружностях γ_j, $j=\overline{1,n}$, и решение уравнения предполагается регулярным в множестве D_0.

Лемма 1. *Пусть $a_0(z)\in L^p(D)$, функция $b(z)\in C(\overline{D})$ аналитична в области D и $\omega_* = 2\sum_{j=1}^n a_j^* \ln||z-z_j|-r_j|$. Тогда функция*

$$\Omega(z) = \omega_*(z) + (T(a_0+b))(z), \quad z\in D_0, \tag{9}$$

удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar z} = a+b$.

Доказательство проводится проверкой, что функция $\Omega(z) = 2\sum_{j=1}^n a_j^*\ln||z-z_j|-r_j| + (T(a_0+b))(z)$ удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar z}(z) = a+b$ с функцией

$$a(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^*(z-z_j)}{|z-z_j|(|z-z_j|-r_j)} + a_0(z).$$

С другой стороны, как было отмечено выше, для $(a_0+b)\in L^p$ функция $T(a_0+b)$ является решением уравнения $(T(a_0+b))_{\bar z} = a_0+b$. Отсюда следует, что функция $\Omega(z)$ в (9) удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar z} = a+b$.

Теорема 1. *Пусть функция $\Omega(z)$ определена формулой (9) и $e^{-\Omega}f\in L^p(D)$. Тогда общее решение уравнения (8) в классе $C(\overline{D}\backslash\gamma)$ определяется формулой*

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega}f)],$$

где $\phi\in C(\overline{D}\backslash\gamma)$ аналитична в открытом множестве $D\backslash\gamma$.

Из леммы 1 следует, что у функции

$$e^{\Omega(z)} = C_0(z)||z-z_1|-r_1|^{2a_1^*}\cdots||z-z_n|-r_n|^{2a_n^*}$$

$C_0(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и всюду отлична от нуля. Поэтому, согласно теореме 1, решение $u(z)$ уравнения (9) ведет себя как

$$u(z) = O(1)(||z-z_j|-r_j|^{2a_j^*}) \quad \text{при} \quad |z-z_j|\to r_j.$$

Заметим, что функция $e^{\Omega(z)}$ при $\operatorname{Re}a_j^* < 0$, $j=\overline{1,n}$ ($\operatorname{Re}a_j^*>0$, $j=\overline{1,n}$), допускает в окружности $\delta_j = r_j$ особенность (нуль) степенного порядка. При $\operatorname{Re}a_j^*\geqslant 0$, $j=\overline{1,k}$, эти функции, очевидно, ограничены. Если $\operatorname{Re}a_j^*=0$, $j=\overline{1,n}$, т.е. $a=a_0\in L^p(D)$, то получим обычное равенство $Ta = Ta_0\in W^{1,p}(D)$.

Обратимся к уравнению (5). Пусть коэффициент $C \in L^p(D_0)$, причём функция TC существует, принадлежит $W^{1,p}(D_0)$ и удовлетворяет уравнению $(TC)_{\bar z} = C$. Тогда в предположении $e^{-TC} f \in L^p(D)$ представление (7) сохраняет свою силу по отношению к области D_0. В частности, согласно теореме 1 оно справедливо для соответствующего уравнения с коэффициентом $a = \sum_{j=1}^n a_j^* \rho_j^{-1}$, удовлетворяющим условию $a_0(z) \in L^p(D)$. Совместно с разложением (3) это обстоятельство позволяет описать общее решение уравнения (1).

Итак, на основании теоремы 1, приведённых выше рассуждений и при обозначениях

$$\omega_* = \sum_{j=1}^n a_j^* \omega_j, \quad \phi \equiv \phi_2$$

доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $a_0(z) \in L^p(D)$ *и* $\operatorname{Re} a_j^* \leqslant 0$, $j = \overline{1,n}$. *Тогда при* $e^{\omega_*} f \in L^p(D)$ *любое решение уравнения (1) в области* D_0 *определяется формулой*

$$u = e^{-Tb}\phi_1 + (e^{-Tb} T e^{\omega_* + T(a_0 + 2b)})\phi_2 + (e^{-Tb} T e^{\omega_* + T(a_0+2b)} T e^{-\omega_* - T(a_0+b)}) f, \tag{10}$$

где функции ϕ_1, ϕ_2 *аналитичны в области* D_0, *причём* $e^{-\omega_*}\phi_2 \in L^p(D)$, *и определяются однозначно по* u.

Заметим, что согласно известному свойству интегралов типа Коши [22, с. 22] функция $h_k \in H(\overline{D})$, $k = 0, 1, 2$, где $h_0 = -Tb$, $h_1 = T(a_0 + 2b)$, $h_2 = T(a_0 + b)$.

В действительности можно утверждать больше, что показывает

Лемма 2. *В условиях теоремы 2 функция* $h_k \in W^{1,p}(D)$, $k = 0, 1, 2$.

Доказательство этой леммы содержится в статье [19].

Представление (10) после переобозначения с учётом леммы 2 можем записать в виде

$$u = e^{h_0}\phi_1 + (e^{h_0} T e^{\omega_* + h_1})\phi_2 + (e^{h_0} T e^{\omega_* + h_1} T e^{-\omega_* - h_2}) f$$

с некоторыми $h_j \in W^{1,p}(D)$, $j = 0, 1, 2$, или кратко

$$u = e^{h_0}\phi_1 + T_0\phi_2 + T_1 f, \tag{11}$$

с соответствующими интегральными операторами T_0, T_1. Эти операторы действуют по формулам

$$(T_0\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{k_0(z,\zeta)}{\zeta - z} e^{\omega_*(\zeta)} \varphi(\zeta)\, d_2\zeta, \quad z \in D,$$

где $k_0(z,\zeta) = e^{h_0(z) - h_1(\zeta)}$, и

$$(T_1\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{k_1(z,\zeta)}{\zeta - z} e^{-\omega_*(\zeta)} \varphi(\zeta)\, d_2\zeta, \quad z \in D,$$

где $k_1(z,\zeta) = e^{h_0(z) - h_1(\zeta)}[h(z) - h(\zeta)]$ и $h = T e^{h_1 + \omega_*} \in W^{1,p}(D)$.

Из (10) или (11) видно, что аналитические функции ϕ_1, ϕ_2 определяются по u однозначно и восстанавливаются по формулам

$$\phi_2 = e^{-\omega_* + h_0 + h}(u_{\bar z} - bu) + T e^{-\omega_* + h_0 + h} f, \quad \phi_1 = e^{-h_0}(u - T_0\phi_2 - T_1 f). \tag{12}$$

3. Постановка краевой задачи. Полученное интегральное представление (10) позволяет для уравнения (1) исследовать краевую задачу, объединяющую элементы задач Римана–Гильберта на границе Γ и линейного сопряжения на окружностях γ_j, $j = \overline{1,n}$.

Задача *R*. Найти регулярное решение уравнения (1) в классе

$$u, e^{-\omega_*}(u_{\bar z} - bu) \in C^\mu(\overline{D_j}), \quad j = \overline{1,n}, \quad 0 < \mu < 1 - 2/p, \tag{13}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\operatorname{Re} G_1 u|_\Gamma = g_1, \quad \operatorname{Re} G_2 e^{-\omega_*}(u_{\bar z} - bu)|_\Gamma = g_2, \quad t \in \Gamma, \tag{14}$$

$$(e^{-\Omega}u)^+(t) - G_j(t)(e^{-\Omega}u)^-(t) = g_j(t), \quad t \in \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{15}$$

$$(e^{-\Omega}u)^+(t) - (e^{-\Omega}u)^-(t) = 0, \quad t \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n,$$

$$e^{-\omega_*}(u_{\bar z} - bu)^+(t) = e^{-\omega_*}(u_{\bar z} - bu)^-(t), \quad t \in \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{16}$$

где знаки “ + ” и “ − ” указывают на граничные значения со стороны D_j^+ и D_j^-.

Эту задачу рассматриваем при следующих требованиях на её данные:

1) $e^{-\omega_*} f \in L^p(D)$;

2) функции $G_k, g_k \in C^\nu(\Gamma)$, $k = 1, 2, j$, причём G_1 и G_2 всюду отличны от нуля, $G_j(t) \in \in H(\gamma_j)$ также всюду отличны от нуля, причём $\ln G_j \in H(\gamma_j)$;

3) $g(t) \in H(\Gamma)$, $g_j(t) \in H(\gamma_j)$, $j = \overline{1,n}$.

Как следует из условий задачи, одна из окружностей γ_j, лежащих внутри Γ, является носителем условий задачи линейного сопряжения (15), а остальные окружности, лежащие внутри Γ, являются носителями условий сопряжения (16).

Замечание. Из постановки задачи R видно, что окружности γ_j, $j = \overline{1,n}$, являющиеся носителями сингулярностей, разбивают область на части, на границах которых необходимо дополнительно задавать граничные условия типа (15) и (16).

4. Классическая задача Римана–Гильберта. Напомним постановку классической задачи Римана–Гильберта [22, 23]: найти аналитическую в области D функцию $\phi(z) \in H(\overline{D})$, удовлетворяющую на границе $\Gamma = \partial D$ условию

$$\operatorname{Re} G\phi|_\Gamma = g, \tag{17}$$

где функция $G = G_1 + iG_2 \in H(\Gamma)$ всюду отлична от нуля, H – класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с некоторым показателем [22, с. 18, 145].

Далее воспользуемся компактным изложением А.П. Солдатова о решении задачи Римана–Гильберта и приведём некоторые факты о разрешимости классической задачи Римана–Гильберта (17) в случае единичного круга $\mathbb{D}$ с границей $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. С этой целью функцию ϕ продолжим в область $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \{z : |z| > 1\}$, положив, что она удовлетворяет условию $\phi = \phi_*$, где ϕ_* определяется с помощью инверсии $\phi_*(z) = \overline{\phi(1/\overline{z})}$. Операция $\phi \to \phi_*$, являющаяся линейной, инволютивна над полем $\mathbb{R}$, т.е. $(\phi_*)_* = \phi$. Видно, что $\phi_*^\pm(t) = \overline{\phi^\mp}$, $t \in \mathbb{T}$. Задачу (17) с коэффициентом G можем представить в виде

$$\phi^+ - \widetilde{G}\phi^- = \widetilde{g}, \tag{18}$$

где $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$ и $\widetilde{g} = 2g/G$.

Последняя задача с коэффициентом $\widetilde{G}$ исследуется с помощью так называемой $\widetilde{G}$-канонической функции. По определению под ней понимается функция $X(z)$, которая аналитична в каждой связной компоненте $\mathbb{D}$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ и продолжается по непрерывности на её замыкание $\overline{\mathbb{D}}$, $\overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}}$; всюду отлична от нуля, включая её граничные значения $X^\pm$; вместе с $X^{-1}(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности и удовлетворяет соотношению

$$X^+ = \widetilde{G}X^-.$$

Определим индекс Коши [22, с. 125]

$$æ = \operatorname{Ind}_\Gamma G = \frac{1}{2\pi} \arg G(t)|_\Gamma.$$

Лемма 3. *Пусть* $æ = \mathrm{Ind}_\Gamma G$, *так что функция* $\theta(t) = \arg G(t) - æ\arg t \in H(\mathbb{T})$, *и пусть*

$$R(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ z^{2æ}, & |z| > 1, \end{cases} \quad \Theta(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\pi - 2\theta(t)}{t - z}\, dt.$$

Тогда функция $X(z) = R(z)e^{\Theta(z)-\Theta(0)/2}$ *является* $\widetilde{G}$-*канонической и обладает свойством*

$$X_*(z) = X(z)z^{-2æ}.$$

Теорема 3. *В условиях леммы 3 все решения задачи (17) в классе* $H(\overline{\mathbb{D}})$ *описываются формулой*

$$\phi(z) = \mathrm{Ig}\,(z) + X(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2æ}, \tag{19}$$

где

$$\mathrm{Ig}\,(z) \equiv \frac{X(z)}{\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{dt}{t - z},$$

а функция g *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q(t)\, dt = 0, \quad q \in P^0_{2æ-2}, \tag{20}$$

где P^0_k – *класс многочленов степени* k.

Доказательство. Как уже отмечалось, при дополнительном условии $\phi = \phi_*$ задача (17) эквивалентна задаче (18). Последняя представляет собой задачу линейного сопряжения по отношению к $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$ и $g = f/G$.

Очевидно, что при $æ \leqslant 0$ размерность пространства $P^0_{-2æ}$ над полем $\mathbb{R}$ равна $-2æ + 1$, а при $æ \geqslant 0$ размерность пространства $P^0_{2æ-2}$ равна $2æ - 1$. Во всех случаях индекс задачи (17) равен $-2æ + 1$ и, в частности, всегда отличен от нуля.

Рассмотрим функцию

$$A(z) = \Theta(z) - \Theta(0)/2, \quad z \in \mathbb{D},$$

фигурирующую в представлении канонической функции $X(z)$. В явном виде запишем

$$A(z) = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\theta(t)\, dt}{t - z} + \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \theta(t)\, d_1 t, \quad A(0) = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \theta(t)\, d_1 t.$$

По формуле Сохоцкого–Племеля отсюда имеем

$$A^+(t_0) = \frac{\pi i}{2} - ia(t_0) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\theta(t)\, dt}{t - t_0} + \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \theta(t)\, d_1 t.$$

Полагая $e^{2i\beta} = t_0/t$, можем записать равенства

$$\frac{dt}{t - t_0} = \frac{i\, d_1 t}{1 - e^{2i\beta}} = \frac{i - \operatorname{ctg}\beta}{2}\, d_1 t,$$

так что

$$A^+(t_0) = \frac{\pi i}{2} - ia(t_0) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \theta(t) \operatorname{ctg}\beta\, d_1 t.$$

Следовательно, функцию $A(z)$ можем однозначно определить по условиям

$$\operatorname{Im} A^+ = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \operatorname{Re} A(0) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \theta(t)\, d_1 t. \tag{21}$$

Теорема доказана.

Обратимся к общему случаю односвязной области D. Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ или, что равносильно, его производная $\omega' \in H(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ из условия $\omega(z_0) = 0$.

Теорема 4. *Пусть* $æ = \mathrm{Ind}_\Gamma G$, *так что функция* $\theta(t) = \arg G(t) - æ \arg t \in H(\Gamma)$, *и пусть* $X(z) = e^{\Theta(z) - \Theta(0)/2}$, *где функция* $\Theta \in H(\overline{D})$ *определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im}\Theta^+ = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \operatorname{Re}\Theta(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \theta(t)|\omega'(t)|\, d_1 t.$$

Тогда все решения задачи (17) в классе $H(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{\omega'(t)\, dt}{\omega(t) - \omega(z)} + X(z)p[\omega(z)], \quad p \in P^0_{-2æ}, \tag{22}$$

где функция g *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q[\omega(t)]\omega'(t)\, dt = 0, \quad q \in P^0_{2æ-2}. \tag{23}$$

Доказательство почти очевидно. Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Рассмотрим в области $\mathbb{D}$ задачу

$$\operatorname{Re} G_0\phi|_\Gamma = g_0 \tag{24}$$

с коэффициентом $G_0 = G \circ \omega^{-1}$. Пусть $A_0 \in H(\overline{\mathbb{D}}_0)$ есть решение задачи (21) по отношению к соответствующей функции $\alpha_0 = \arg G_0(t) - æ\arg t \in H(\Gamma)$, которая определяется аналогично лемме 3, и пусть $X_0 = e^{A_0}$. Тогда согласно (21) функция $A = A_0 \circ \omega$ и аналогичным образом связаны функции X и X_0. Применим теорему 4 к задаче (24), добавив к соответствующим обозначениям в соотношениях (19), (20) индекс нуль. Тогда при подстановке ω они перейдут в соотношения (22), (23), что и завершает доказательство теоремы.

5. Решение задачи *R*. Из (10) (или из (11)) видно, что аналитические функции ϕ_1, ϕ_2 определяются по u однозначно и восстанавливаются по формулам (12).

В рассматриваемом случае $(p > 2)$ пространство $W^{1,p}(D)$ вложено в гёльдерово пространство $H(\overline{D})$ (причём $C^{\mu_0}(\overline{D}) \subseteq H(\overline{D})$ с показателем $\mu_0 = 1 - 2/p$).

Следовательно, при $\mu < \mu_0$ соответствие между решением u по формуле (10) уравнения (1) из класса (13) и парой аналитических в D функций $\phi_1, \phi_2 \in H(\overline{D})$ будет взаимнооднозначным.

Положив

$$\widetilde{G}_1 = G_1 e^{-h_0 - h}|_\Gamma, \quad \widetilde{G}_2 = G_2 e^{h_0}|_\Gamma,$$

условия (14) задачи R с ограниченными операторами $R_j : H(\overline{D}) \to H(\Gamma)$, действующими по формулам

$$R_0\varphi = \operatorname{Re} G_1[T_0\varphi]|_\Gamma, \quad R_1\varphi = \operatorname{Re} G_1[T_1\varphi]|_\Gamma, \quad R_2\varphi = \operatorname{Re} G_2\varphi|_\Gamma,$$

примут вид

$$\operatorname{Re}\widetilde{G}_2\phi_2|_\Gamma = g_2 - R_2 f \equiv \tilde{g}_2, \quad \operatorname{Re}\widetilde{G}_1\phi_1|_\Gamma - R_0\phi_2 = g_1 - R_1 f \equiv \tilde{g}_1,$$

а условия (15) и (16) задачи R запишутся как

$$(\phi_1^+ - G_j\phi_1^-)|_{\gamma_j} = g_j^*, \quad \phi_2^+(t) = \phi_2^-(t), \quad t \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots n,$$

где $g_j^* = g_j - e^{-h_0}(F^+ - G_jF^-)$, $F = T_0\phi_2 + T_1 f$.

В результате задача R будет сведена к эквивалентной задаче

$$\operatorname{Re}\widetilde{G}_2\phi_2|_\Gamma = g_2 - R_2 f \equiv \tilde{g}_2, \quad \operatorname{Re}\widetilde{G}_1\phi_1|_\Gamma - R_0\phi_2 = g_1 - R_1 f \equiv \tilde{g}_1, \quad (\phi_1^+ - G_j\phi_1^-)|_{\gamma_j} = g_j^*,$$

$$\phi_2^+(t) = \phi_2^-(t), \quad t \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n.$$

Таким образом, задача R приводится к последовательному решению двух задач (см. ниже), в результате решения которых определим соответственно значения искомых функций $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$.

Решение задачи R рассмотрим в двух случаях: когда область $D \equiv \mathbb{D}$ – единичный круг и когда область D – произвольная конечная область, ограниченная гладким замкнутым контуром Γ.

Сперва рассмотрим задачу R в случае единичного круга, т.е. относительно области $\mathbb{D} = \{z : |z| \leqslant 1\}$. Тогда окружности $\gamma_k = \{z : |z - z_k| = r_k < 1\}$, $k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, являются носителями граничных данных в силу условий (16).

Согласно второму условию (16) и первой формуле обращения для функции ϕ_2 в (12) приходим к эквивалентной задаче

$$\phi_2^+(t) = \phi_2^-(t), \quad t \in \gamma_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{25}$$

где через $\phi_2^+(t)$ и $\phi_2^-(t)$ обозначены предельные значения функций $\phi_2^+(z)$ и $\phi_2^-(z)$ соответственно из внутренних частей областей $\mathbb{D}_k$, $k = \overline{1, n}$, в их внешние части и наоборот. Отметим, что мы воспользовались свойствами функций $f_0 = e^{-\omega_* + h_0 + h} f \in L^p$, $p > 2$, $(Tf_0)^\pm(t) \in H(\overline{\mathbb{D}})$ и $(h_0 + h)^+ = (h_0 + h)^-$, $(Tf_0)^+(t) = (Tf_0)^-(t)$, $t \in \gamma_j$, $j = \overline{1, n}$.

Следовательно, условия (25) определяют единую аналитическую функцию ϕ_2 во всей области D, включая все окружности γ_j, $j = \overline{1, n}$. Этот факт позволяет нам изучить второе условие в (14) и прийти к краевой задаче Гильберта со следующими данными:

$$\operatorname{Re}\widetilde{G}_2\phi_2|_\mathbb{T} = \widetilde{g}_2, \tag{26}$$

коэффициент $\widetilde{G}_2 = G_2 e^{h_0 + h}|_\mathbb{T}$, индекс

$$æ_2 = \frac{1}{2\pi}\arg\widetilde{G}_2(t)|_\mathbb{T} = \frac{1}{2\pi}\arg G_2(t)|_\mathbb{T}$$

и правая часть

$$\widetilde{g}_2 = g_2 - \operatorname{Re}[G_2 e^{h_0 + h} Tf_0|_\mathbb{T}],$$

и сформулировать её решение на основе теорем 2 и 3.

Теорема 5. *Пусть* $æ_2 = \operatorname{Ind}_\Gamma G_2$, *так что функция* $\theta_2(t) = \arg G_2(t) - æ_2 \arg t \in H(\mathbb{T})$, *и пусть* $X_2(z) = e^{\Theta_2(z) - \Theta_2(0)/2}$, *где функция* $\Theta_2 \in H(\overline{D})$ *определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im}\Theta_2^+ = \frac{\pi}{2} - \theta_2, \quad \operatorname{Re}\Theta_2(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\mathbb{T} \theta_2(t)\, d_1 t.$$

В условиях леммы 3 и теорем 2, 3 все решения задачи (26) в классе $H(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\phi_2(z) = \mathrm{I}\widetilde{\mathrm{g}}_2\,(z) + X_2(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2æ_2},$$

где

$$\mathrm{I}\widetilde{\mathrm{g}}_2\,(z) \equiv \frac{X_2(z)}{\pi i}\int\limits_\mathbb{T} \frac{\widetilde{g}_2(t)}{\widetilde{G}_2(t) X_2^+(t)}\frac{dt}{t - z},$$

а функция $\widetilde{g}_2(z)$ *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_\mathbb{T} \frac{\widetilde{g}_2(t)}{\widetilde{G}_2(t) X_2^+(t)} q(t)\, dt = 0, \quad q \in P^0_{2æ_2 - 2},$$

где P^0_k *– класс многочленов степени* k.

Теперь, используя первое условие в (16), интегральное представление (10), формулу обращения для функции ϕ_1 в (12) и условие (15), получаем для ϕ_1 краевую задачу

$$\operatorname{Re} G_0\phi_1|_\Gamma = g_0, \quad (\phi_1^+ - G_j\phi_1^-)|_l = g_j^*, \tag{27}$$

где $G_0 = G_1(e^{h_0})|_\Gamma$, $g_0 = g_1 - \operatorname{Re}[G_1F|_\Gamma]$, $g_j^* = g_j - e^{-h_0}(F^+ - G_jF^-)$, $F = T_0\phi_2 + T_1f$.

Теорема 6. *При выполнении условий теоремы 1 фредгольмова задача (27) рассматривается в классе (13) и её индекс равен* $1 - 2æ_1$, *где*

$$æ_1 = \frac{1}{2\pi}\arg G_1(t)|_\Gamma.$$

Более точно, все решения задачи (27) в классе $H(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\phi_1(z) = \frac{X_1(z)}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g_1^*(t)}{G_1(t)X_1^+(t)}\frac{dt}{t-z} + X_1(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2æ_1},$$

где $X_1(z) = e^{\Theta_1(z) - \Theta_1(0)/2}$ *– каноническая функция, функция* $\Theta_1 \in H(\overline{D})$ *определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im}\Theta_1^+ = \frac{\pi}{2} - \theta_2, \quad \operatorname{Re}\Theta_1(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \theta_1(t)\,d_1t,$$

в которой $\theta_1(t) = \arg G_1(t) - æ_1\arg t \in H(\mathbb{T})$ *и функция* g_1^* *удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g_1^*(t)}{G_1(t)X^+(t)}p(t)\,dt = 0, \quad p \in P^0_{2æ_1-2},$$

причём

$$g_1^* = g_j - \operatorname{Re}[\alpha e^{\Omega}(Tf_0)|_\mathbb{T}] - \operatorname{Re}[GX_1\psi]|_\mathbb{T}, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{g_j^*(t)}{X_j^+(t)(t-z)}\,dt,$$

$$g_1^* = g_j - e^{-h_0}(F^+ - G_jF^-), \quad F = T_0\phi_2 + T_1f.$$

Доказательство. По теореме 2 общее решение u уравнения (1) в классе (13) представимо в виде (10) (или в краткой форме в виде (11)), где функция ϕ принадлежит $H(\overline{D_j^{\pm}})$. Кроме того, в силу леммы 1 функция $\Omega \in H(\Gamma)$. Поэтому подставим данное представление в условия (14), (15) и используем формулу обращения для искомой функции ϕ_1 из (12). Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\arg G_0|_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\arg G_1|_\Gamma = æ_1. \tag{28}$$

Согласно хорошо известным свойствам интеграла типа Коши [22], функция

$$X_j(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} \frac{\ln G_j(t)(t)\,dt}{t-z}\right), \quad z \in D_j^+ \bigcup D_j^-, \tag{29}$$

принадлежит классу $H(\overline{D_j^{\pm}})$, $j = 1, 2$, причём её граничное значение $\ln X_j^{\pm} \in H(\gamma_j)$ на окружности γ_j удовлетворяет краевому условию $X_j^+ = G_jX_j^-$. Поэтому второе краевое условие в (27) можно записать в виде

$$\frac{\phi_1^+}{X_j^+} - \frac{\phi_1^-}{X_j^-} = \frac{g_j^*}{X_j^+}.$$

Функция

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} \frac{g_j^*(t)}{X_j^+(t)(t-z)}\, dt$$

принадлежит классу $H(\overline{D_j^{\pm}})$ и удовлетворяет краевому условию

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = \frac{g_j^*(t)}{X_j^+(t)}.$$

Следовательно, разность

$$\phi_0(z) = \frac{\phi_1(z)}{X_j(z)} - \psi(z) \tag{30}$$

аналитична в области D и принадлежит классу $H(\overline{D})$. Подстановка формул (29) и (30) в (27) приводит к эквивалентной задаче Римана–Гильберта:

$$\operatorname{Re}(\alpha_0\phi_0)|_{\mathbb{T}} = g_0,$$

где $\alpha_0 = G_1 X_j e^{-h_0-h}|_{\mathbb{T}}$ и $g_0 = g_1 - \operatorname{Re}[G_1 e^{-h_0-h} X_j \psi]|_{\mathbb{T}}$.

Равенство (28) сохраняется и для α_0, G_j.

Резюмируя результаты исследований, сформулированные для единичного круга в теоремах 5 и 6, используя теорему Келлога, приходим к результату, представляющему решение задачи R для области D_0. При этом сохраняем обозначения формул как в теоремах 1–6.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и* $æ_k = \operatorname{Ind}_\Gamma G_k$, $k = 1, 2$, *так что функция* $\theta_k(t) = \arg G_k(t) - æ_k \arg t \in H(\Gamma)$, *и пусть* $X_k(z) = R_k(z) e^{\Theta_k(z) - \Theta_k(0)/2}$, *где функция* $\Theta_k \in H(\overline{D})$ *аналитична в области* D *и её мнимая часть определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im}\Theta_k^+ = \frac{\pi}{2} - \theta_k, \quad \operatorname{Re}\Theta_k(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \theta_k(t)|\omega'(t)|\, d_1 t, \quad k = 1, 2.$$

Тогда все решения задачи R *в классе* $H(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$u = e^{g_0}\phi_2 + T_0\phi_1 + T_1 f,$$

в которой аналитические функции $\phi_k(z)$, $k = 1, 2$, *определяются формулами*

$$\phi_k(z) = \frac{X_k(z)}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\tilde{g}_k(t)}{\tilde{G}_k(t) X_k^+(t)} \frac{\omega'(t)\, dt}{\omega(t) - \omega(z)} + X_k(z) p_k[\omega(z)], \quad p_k \in P^0_{-2æ_k}, \quad k = 1, 2,$$

где функция $\tilde{g}_k$ *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\tilde{g}_k(t)}{\tilde{G}_k(t) X_k^+(t)} q[\omega(t)]\omega'(t)\, dt = 0, \quad q \in P^0_{2æ_k - 2}, \quad k = 1, 2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск, 1997.
3. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М., 1991.
4. *Раджабов Н.Р.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе, 1992.

5. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
6. *Коровина М.В.* Дифференциальные уравнения с коническим вырождением в пространствах с асимптотиками // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 9. С. 1249–1258.
7. *Ломов И.С.* Метод регуляризации сингулярных возмущений и исследование нерегулярно вырождающихся эллиптических задач. Некоторые проблемы теории возмущений и метод регуляризации // Сб. науч. тр., посвящ. 100-летию со дня рождения Сергея Александровича Ломова. М., 2023. С. 105–122.
8. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М., 1966.
9. *Begehr H., Dao-Qing Dai.* On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // J. Differ. Equat. 2004. V. 196. P. 67–90.
10. *Расулов А.Б., Солдатов А.П.* Краевая задача для обобщённого уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 637–650.
11. *Фролов П.С.* О компонентах связности вещественных эллиптических систем на плоскости // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181. № 6. С. 1350–1353.
12. *Bochev P.B.* Analysis of least-squares finite element methods Muhammad Tahir, A.R. Davies for the Navier–Stokes equations // Siam J. Numer. Anal. 1997. V. 34. № 5. P. 1817–1844.
13. *Tahir M., Davies A.R.* Stokes–Bitsadze problem – I // Punjab University J. of Math. 2005. V. 32. P. 77–90.
14. *Солдатов А.П.* Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Изв. РАН. 2006. Т. 70. № 6. С. 161–192.
15. *Сакс Р.С.* Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1975.
16. *Товмасян Н.Е.* Эффективные методы решения задачи Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в областях, ограниченных эллипсом // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 60–71.
17. *Tovmasyan N.E.* Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. Singapore, 1994.
18. *Бабаян А.О.* Об одной краевой задаче для уравнения Бицадзе в единичном круге // Изв. НАН Армении. Математика. 2007. Т. 42. № 4. С. 3–10.
19. *Солдатов А.П., Расулов А.Б.* Уравнение Бицадзе с сильными особенностями в младших коэффициентах // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 238–248.
20. *Rasulov A.B., Fedorov Yu.S., Sergeeva A.M.* Integral representations of solutions for the Bitsadze equation with the set of supersingular points in the lower coefficients // Proc. Intern. Conf. on Appl. and Eng. Math. (ICAEM). August 27–29, 2019. Taxila, Pakistan. Danvers, 2019. P. 13–17.
21. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. М., 1959.
22. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
23. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.

Национальный исследовательский университет
"Московский энергетический институт"

Поступила в редакцию 11.05.2023 г.
После доработки 15.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.