

---



---

**УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**


---



---

УДК 517.958

## ОДНОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

© 2023 г. В. Г. Романов

Для системы нелинейных уравнений электродинамики рассматривается задача об определении коэффициента проводимости среды, стоящего при нелинейности. Предполагается, что коэффициенты электрической и магнитной проницаемостей постоянны, а проводимость зависит лишь от одной пространственной переменной  $x$ , причём эта проводимость равна нулю на полуоси  $x < 0$ . Для моды, в которой участвуют только две компоненты электромагнитного поля, рассматривается процесс распространения волн, вызванный падением плоской волны с постоянной амплитудой из области  $x < 0$  на неоднородность, локализованную на полупрямой  $x \geq 0$ . Изучаются условия разрешимости прямой задачи при заданном коэффициенте проводимости и свойства её решения. Для решения обратной задачи задаётся след электрической компоненты решения прямой задачи на конечном отрезке оси  $x = 0$ . Устанавливается теорема о локальном существовании и единственности решения обратной задачи и находится глобальная оценка условной устойчивости её решений.

DOI: 10.31857/S0374064123100072, EDN: ONVPZC

**Введение.** Рассмотрим систему уравнений электродинамики с нелинейным поглощением

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \mathbf{E}_t + \sigma(\mathbf{x})|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \mathbf{H}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4, \quad (1)$$

в которой  $\varepsilon$  и  $\mu$  – вещественные положительные числа, характеризующие электрическую и магнитную проницаемости,  $\sigma(\mathbf{x}) \geq 0$  – проводимость среды,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – векторы напряжённости электрического и магнитного полей. В частном случае, когда функция  $\sigma(\mathbf{x})$  зависит лишь от одной пространственной переменной  $x$ , существуют решения системы уравнений (1) вида  $\mathbf{E} = (0, E_2(x, t), 0)$ ,  $\mathbf{H} = (0, 0, H_3(x, t))$ , при этом компоненты  $E_2(x, t)$  и  $H_3(x, t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\varepsilon(E_2)_t + \sigma(x)(E_2)^3 + (H_3)_x = 0, \quad \mu(H_3)_t + (E_2)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

В дальнейшем система уравнений (2) будет рассматриваться в области  $\Omega(T) = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \leq T\}$ ,  $T > 0$ .

Обозначим через  $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  скорость распространения электромагнитных волн и через  $\theta_0(t)$  – функцию Хевисайда:  $\theta_0(t) = 1$  для  $t \geq 0$  и  $\theta_0(t) = 0$  для  $t < 0$ .

Предположим, что  $\sigma(x) \equiv 0$  для  $x < 0$  и  $\sigma \in C[0, cT/2]$ . Для уравнений (2) при известной функции  $\sigma(x)$  поставим задачу Коши с данными при  $t \leq 0$ :

$$E_2|_{t \leq 0} = \frac{a}{2\sqrt{\varepsilon}} \theta_0(t - x/c), \quad H_3|_{t \leq 0} = \frac{a}{2\sqrt{\mu}} \theta_0(t - x/c), \quad (3)$$

где  $a > 0$  – некоторое фиксированное число.

Задачу (2), (3) назовём *прямой задачей*. Поставим по отношению к ней *обратную задачу* об определении коэффициента  $\sigma(x)$ , а именно: требуется найти  $\sigma(x)$  по следу компоненты  $E_2$  решения прямой задачи на отрезке  $[0, T]$  оси  $x = 0$ :

$$E_2|_{x=0} = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Прямые и обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений и систем активно изучаются в последнее десятилетие. Прямые задачи обычно посвящены вопросам существования или несуществования решений на бесконечном интервале по времени (см., например,

статьи [1–3] и литературу в них). Обратные задачи заключаются в определении переменных коэффициентов, входящих в уравнения. В частности, в работах [4–9] для полулинейных уравнений на лоренцевом многообразии рассмотрены вопросы реконструкции этого многообразия по данным о решении прямых задач (например, по заданному отображению Дирихле–Неймана). Обратные задачи об определении коэффициентов в различных полулинейных уравнениях изучены в работах [10–14]. В статьях [15–18] ряд обратных задач исследован для полулинейного волнового уравнения. Их анализ основан на асимптотических разложениях решения прямой задачи по особенностям вблизи характеристических поверхностей. Это позволило свести рассматриваемые задачи к задачам интегральной геометрии (или томографии). В работе [19] подобный метод использован для исследования трёхмерной обратной задачи для нелинейной системы уравнений электродинамики.

Рассматриваемая в настоящей статье постановка одномерной (по числу пространственных переменных) обратной задачи для нелинейной системы (1) является новой. В п. 1 анализируются свойства решения прямой задачи (2), (3) для заданного множества функций  $\sigma(x)$ . Результаты представлены теоремой об однозначной разрешимости прямой задачи. В п. 2 установлена теорема о локальном существовании и единственности решения обратной задачи. В п. 3 дана глобальная оценка условной устойчивости решения обратной задачи.

**1. Исследование прямой задачи.** Преобразуем задачу (2), (3) к более удобному для исследований виду. С этой целью введём римановы инварианты  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$ , определив их следующим образом:

$$u = \sqrt{\varepsilon}E_2 + \sqrt{\mu}H_3, \quad v = \sqrt{\varepsilon}E_2 - \sqrt{\mu}H_3.$$

Тогда уравнения (2) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u + \hat{\sigma}(x)(u + v)^3 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)v + \hat{\sigma}(x)(u + v)^3 = 0, \quad (x, t) \in \Omega(T), \quad (5)$$

где  $\hat{\sigma}(x) = \sigma(x)/(8\varepsilon^2)$ . Условия (3) для функций  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  принимают вид

$$u|_{t \leq 0} = a\theta_0(t - x/c), \quad v|_{t \leq 0} = 0. \quad (6)$$

В обратной задаче условие (4) должно быть заменено на следующее:

$$(u + v)|_{x=0} = 2\sqrt{\varepsilon}f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (7)$$

Введём в рассмотрение области

$$D_T^+ = \{(x, t) : x \geq 0, \quad x/c < t \leq T - x/c\}, \quad (D'_T)^+ = \{(x, t) : x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq x/c \leq T/2\},$$

$$D_T^- = \{(x, t) : x < 0, \quad -x/c < t \leq T + x/c\}, \quad (D'_T)^- = \{(x, t) : x < 0, \quad 0 \leq t \leq -x/c \leq T/2\}.$$

Так как  $\hat{\sigma}(x) = 0$  для  $x < 0$ , то в области  $D_T^- \cup (D'_T)^-$  функция  $u(x, t)$  удовлетворяет однородному уравнению  $u_t + cu_x = 0$  и начальному условию  $u|_{t=0} = a$ , поэтому  $u(x, t) = a$  для  $(x, t) \in D_T^- \cup (D'_T)^-$ . Кроме того, из уравнения  $v_t - cv_x = 0$  и начального условия  $v|_{t=0} = 0$  следует, что  $v(x, t) = 0$  для  $(x, t) \in (D'_T)^-$ . Проинтегрировав уравнение  $v_t - cv_x = 0$ , находим, что

$$v(x, t) = v(0, t + x/c), \quad (x, t) \in D_T^-.$$

Таким образом, функции  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  полностью определяются в области  $D_T^- \cup (D'_T)^-$  граничными значениями функции  $v|_{x=0}$ . В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать прямую задачу только в области  $D_T^+ \cup (D'_T)^+$ . Из изложенного выше следует граничное условие

$$u(0, t) = a, \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

В области  $(D_T')^+$  система уравнений (5) однородна и удовлетворяет нулевым начальным условиям  $u|_{t=0} = 0$ ,  $v|_{t=0} = 0$ , поэтому

$$u(x, t) = 0, \quad 0 < t < x/c < T/2; \quad v(x, t) = 0, \quad 0 \leq t < x/c \leq T/2.$$

В частности, отсюда и из второго уравнения (5) следует условие

$$v(x, x/c) = 0, \quad x \in [0, cT/2]. \quad (9)$$

Задача (5) с граничными условиями (8) и (9) корректна в области  $D_T^+$ . Заменяем её системой интегральных уравнений. Интегрируя второе уравнение (5) на плоскости переменных  $\xi$ ,  $\tau$  вдоль характеристики  $c\tau + \xi = ct + x$  и используя условие (9), получаем

$$v(x, t) = - \int_{(t+x/c)/2}^t \hat{\sigma}(\xi)(u(\xi, \tau) + v(\xi, \tau))^3|_{\xi=x+c(t-\tau)} d\tau, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (10)$$

Интегрируя первое уравнение (5) вдоль характеристики  $c\tau - \xi = ct - x$  от точки  $(x, t)$  до точки  $(0, t - x/c)$  и используя условие (8), находим второе интегральное уравнение

$$u(x, t) = a - \int_{t-x/c}^t \hat{\sigma}(\xi)(u(\xi, \tau) + v(\xi, \tau))^3|_{\xi=x-c(t-\tau)} d\tau, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (11)$$

При исследовании системы интегральных уравнений (10), (11) удобно использовать новую функцию

$$w(x, t) = u(x, t) + v(x, t).$$

Интегральное уравнение для этой функции образуется в результате сложения уравнений (10) и (11) и имеет вид

$$w(x, t) = a - \int_{t-x/c}^t \hat{\sigma}(\xi)w^3(\xi, \tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)} d\tau - \int_{(t+x/c)/2}^t \hat{\sigma}(\xi)w^3(\xi, \tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)} d\tau, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (12)$$

**Определение 1.** Будем говорить, что  $\hat{\sigma} \in \mathcal{Q}(\sigma_0, \sigma_1, T)$ , если

$$\sigma \in C([0, cT/2]), \quad 0 < \sigma_0 \leq \hat{\sigma}(x) \leq \sigma_1, \quad x \in [0, cT/2]. \quad (13)$$

**Лемма 1.** Пусть  $\hat{\sigma} \in \mathcal{Q}(\sigma_1, T)$  и выполнено условие

$$a^2 \sigma_1 T \leq 1. \quad (14)$$

Тогда уравнение (12) имеет единственное решение, принадлежащее пространству  $C(D_T^+)$ , и для него выполнены неравенства

$$a/2 \leq w(x, t) \leq a, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (15)$$

**Замечание 1.** Условие (14) при фиксированных  $T$  и  $\sigma_1$  является условием на выбор положительного числа  $a$  в прямой задаче.

**Доказательство леммы 1.** Определим для уравнения (12) последовательные приближения  $w_n(x, t)$  по формулам

$$w_0(x, t) = a,$$

$$w_n(x, t) = a - \int_{t-x/c}^t \hat{\sigma}(\xi) w_{n-1}^3(\xi, \tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)} d\tau -$$

$$- \int_{(t+x/c)/2}^t \hat{\sigma}(\xi) w_{n-1}^3(\xi, \tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)} d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (x, t) \in D_T^+.$$

Из равенства  $w_0(x, t) = a$  и условий (13), (14) следует, что  $w_1 \in C(D_T^+)$ , и для этой функции выполнены соотношения

$$\frac{a}{2} \leq a - \sigma_1 a^3 \frac{T}{2} \leq w_1(x, t) \leq a, \quad (x, t) \in D_T^+.$$

Так как  $w_1 \in C(D_T^+)$ , отсюда следует, что  $w_2 \in C(D_T^+)$ . Кроме того, из неравенства  $w_1(x, t) \leq a$  вытекают соотношения

$$\frac{a}{2} \leq a - \sigma_1 a^3 \frac{T}{2} \leq w_2(x, t) \leq a, \quad (x, t) \in D_T^+.$$

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что при любом  $n$  справедливо утверждение  $w_n \in C(D_T^+)$ , и все последовательные приближения ограничены сверху и снизу положительными числами:

$$\frac{a}{2} \leq w_n(x, t) \leq a, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (x, t) \in D_T^+. \tag{16}$$

Покажем равномерную сходимость последовательности  $w_n(x, t)$  в области  $D_T^+$ . Вычислив разность  $w_{k+1}(x, t) - w_k(x, t) = \tilde{w}_{k+1}(x, t)$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , получим

$$|\tilde{w}_1(x, t)| \leq \sigma_1 \left( \int_{t-x/c}^t a^3 d\tau + \int_{(t+x/c)/2}^t a^3 d\tau \right),$$

$$|\tilde{w}_{k+1}(x, t)| \leq \sigma_1 \int_{t-x/c}^t [(w_k^2(\xi, \tau) + w_k(\xi, \tau)w_{k-1}(\xi, \tau) + w_{k-1}^2(\xi, \tau))|\tilde{w}_k(\xi, \tau)|]_{\xi=x-c(t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \sigma_1 \int_{(t+x/c)/2}^t [(w_k^2(\xi, \tau) + w_k(\xi, \tau)w_{k-1}(\xi, \tau) + w_{k-1}^2(\xi, \tau)) \times$$

$$\times |\tilde{w}_k(\xi, \tau)|]_{\xi=x+c(t-\tau)} d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (x, t) \in D_T^+. \tag{17}$$

Так как  $w_{k-1}(x, t) \leq a$ ,  $w_k(x, t) \leq a$ , то из формулы (17) вытекают неравенства

$$|\tilde{w}_1(x, t)| \leq \frac{1}{2} a^3 \sigma_1 t,$$

$$|\tilde{w}_{k+1}(x, t)| \leq 3a^2 \sigma_1 \left[ \int_{t-x/c}^t |\tilde{w}_k(\xi, \tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)} d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{(t+x/c)/2}^t |\tilde{w}_k(\xi, \tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)} d\tau \right], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (x, t) \in D_T^+. \tag{18}$$

Из неравенств (18) находим последовательно:

$$|\tilde{w}_1(x, t)| \leq \frac{1}{2}\sigma_1 a^3 t, \quad |\tilde{w}_2(x, t)| \leq \frac{1}{3}a(6\sigma_1 a^2)^2 \frac{t^2}{2!},$$

$$|\tilde{w}_n(x, t)| \leq \frac{1}{3}a(6\sigma_1 a^2)^n \frac{t^n}{n!} \leq \frac{1}{3}a(6\sigma_1 a^2)^n \frac{T^n}{n!}, \quad n = 3, 4, \dots, \quad (x, t) \in D_T.$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности  $w_n(x, t)$  в области  $D_T^+$ . Предельная функция  $w(x, t)$  этой последовательности является функцией класса  $C(D_T^+)$ . Из неравенств (16) вытекает, что для неё справедливы оценки (15).

Установим единственность непрерывного решения уравнения (12). Допустим, что уравнение имеет два таких решения:  $w_1(x, t)$  и  $w_2(x, t)$ . Обозначим  $\bar{w}(x, t) = w_1(x, t) - w_2(x, t)$ . Тогда

$$|\bar{w}(x, t)| \leq \sigma_1 \int_{t-x/c}^t [(w_1^2(\xi, \tau) + w_1(\xi, \tau)w_2(\xi, \tau) + w_2^2(\xi, \tau))|\bar{w}(\xi, \tau)|]_{\xi=x-c(t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \sigma_1 \int_{(t+x/c)/2}^t [(w_1^2(\xi, \tau) + w_1(\xi, \tau)w_2(\xi, \tau) + w_2^2(\xi, \tau))|\bar{w}(\xi, \tau)|]_{\xi=x+c(t-\tau)} d\tau, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (19)$$

С учётом того, что  $w_1(x, t)$  и  $w_2(x, t)$  не превосходят числа  $a$ , из неравенства (19) выводим оценку

$$|\bar{w}(x, t)| \leq 3a^2\sigma_1 \left( \int_{t-x/c}^t |\bar{w}(\xi, \tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)} d\tau + \int_{(t+x/c)/2}^t |\bar{w}(\xi, \tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)} d\tau \right), \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (20)$$

Пусть

$$z(t) = \begin{cases} \max_{x \in [0, ct]} |\bar{w}(x, t)|, & t \in [0, T/2], \\ \max_{x \in [0, T-ct]} |\bar{w}(x, t)|, & t \in [T/2, T]. \end{cases}$$

Тогда из (20) следует неравенство

$$z(t) \leq 6a^2\sigma_1 \int_0^t z(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

из которого вытекает, что  $z(t) = 0$  для всех  $t \in [0, T]$ , и, значит,  $\bar{w}(x, t) = 0$  в области  $D_T^+$ . Поэтому  $w_1(x, t) = w_2(x, t)$  для  $(x, t) \in D_T^+$ .

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда решение уравнения (12) принадлежит классу  $C^1(D_T^+)$ . Кроме того, если выполнено условие

$$48a^2\sigma_1^2 T \leq \sigma_0, \quad (21)$$

то имеет место оценка

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32} \leq -w_t(x, t) \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (22)$$

**Замечание 2.** Как и в случае леммы 1, условие (21) является условием на выбор числа  $a$ .

**Доказательство леммы 2.** Чтобы показать, что функция  $w(x, t)$  обладает в области  $D_T^+$  непрерывными частными производными по переменным  $x$  и  $t$ , запишем уравнения (10)–(12), заменив в них переменную интегрирования  $\tau$  на  $\xi$ . После этой замены представим уравнения для функций  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$  в виде

$$v(x, t) = -\frac{1}{c} \int_x^{(x+ct)/2} \hat{\sigma}(\xi) w^3(\xi, \tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi, \quad (x, t) \in D_T^+, \quad (23)$$

$$u(x, t) = a - \frac{1}{c} \int_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^3(\xi, \tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c} d\xi, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (24)$$

Уравнение для  $w(x, t)$  имеет вид

$$w(x, t) = -\frac{1}{c} \int_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^3(\xi, \tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c} d\xi - \frac{1}{c} \int_x^{(x+ct)/2} \hat{\sigma}(\xi) w^3(\xi, \tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (25)$$

Продифференцировав равенство (25) по переменной  $t$ , получим

$$w_t(x, t) = -\frac{3}{c} \int_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, \tau) w_\tau(\xi, \tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c} d\xi - \frac{3}{c} \int_x^{(x+ct)/2} \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, \tau) w_\tau(\xi, \tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi - \frac{1}{2} \hat{\sigma}((x+ct)/2) w^3((x+ct)/2, (t+x/c)/2), \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (26)$$

Аналогично, продифференцировав уравнение (25) по переменной  $x$ , будем иметь

$$w_x(x, t) = \frac{3}{c^2} \int_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, \tau) w_\tau(\xi, \tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c} d\xi - \frac{3}{c^2} \int_x^{(x+ct)/2} \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, \tau) w_\tau(\xi, \tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi - \frac{1}{2c} \hat{\sigma}((x+ct)/2) w^3((x+ct)/2, (t+x/c)/2), \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (27)$$

Рассмотрим уравнение (26). Для удобства дальнейших вычислений введём функцию

$$\varphi(x, t) = -w_t(x, t)$$

и вернёмся в (26) к переменной интегрирования  $\tau$ . Тогда получим уравнение

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x, t) - 3 \int_{t-x/c}^t \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, \tau) \varphi(\xi, \tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)} d\tau - 3 \int_{(t+x/c)/2}^t \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, \tau) \varphi(\xi, \tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)} d\tau, \quad (x, t) \in D_T^+, \quad (28)$$

в котором

$$\varphi_0(x, t) = \frac{1}{2} \hat{\sigma}((x + ct)/2) w^3((x + ct)/2, (t + x/c)/2). \quad (29)$$

Так как функция  $w^2$ , входящая в (28), известна, то это уравнение является линейным интегральным уравнением относительно функции  $\varphi(x, t)$ . Оно принадлежит к уравнениям типа Вольтерры с непрерывным ядром. Его решение можно найти методом последовательных приближений. Действительно, определим  $\varphi_n(x, t)$  формулой

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, t) = & \varphi_0(x, t) - 3 \int_{t-x/c}^t \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, \tau) \varphi_{n-1}(\xi, \tau) |_{\xi=x-c(t-\tau)} d\tau - \\ & - 3 \int_{(t+x/c)/2}^t \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, \tau) \varphi_{n-1}(\xi, \tau) |_{\xi=x+c(t-\tau)} d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (x, t) \in D_T^+. \end{aligned} \quad (30)$$

Покажем, что последовательность  $\varphi_n(x, t)$  сходится равномерно в области  $D_T^+$ . Для функции  $\varphi_0(x, t)$  из равенства (29) следует оценка

$$0 < \varphi_0(x, t) \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad (x, t) \in D_T^+.$$

Из формулы (30) находим последовательно, что

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x, t) - \varphi_0(x, t)| & \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2} (6\sigma_1 a^2) t, \quad |\varphi_2(x, t) - \varphi_1(x, t)| \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2} (6\sigma_1 a^2)^2 \frac{t^2}{2!}, \\ |\varphi_n(x, t) - \varphi_{n-1}(x, t)| & \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2} (6\sigma_1 a^2)^n \frac{t^n}{n!} \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2} (6\sigma_1 a^2)^n \frac{T^n}{n!}, \quad n = 3, 4, \dots, \quad (x, t) \in D_T^+. \end{aligned}$$

Из этих оценок следует равномерная сходимость последовательности  $\varphi_n(x, t)$  в области  $D_T^+$ . Следовательно, предельная функция  $\varphi(x, t)$  последовательности  $\varphi_n(x, t)$  является непрерывной в  $D_T^+$ . Единственность решения уравнения (28) устанавливается стандартным способом.

Так как функция  $\varphi(x, t)$  непрерывна в области  $D_T^+$ , то из уравнения (27) следует непрерывность в той же области производной  $w_x(x, t)$ . Таким образом, установлена принадлежность функции  $w(x, t)$  классу  $C^1(D_T^+)$ .

Установим теперь оценку (22) при выполнении условия (21). В этом случае последовательные приближения могут быть оценены более точно. Учитывая, что  $a/2 \leq w(x, t) \leq a$  (согласно лемме 1), из формулы (29) получаем соотношения

$$\frac{\sigma_0 a^3}{16} \leq \varphi_0(x, t) \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad (x, t) \in D_T^+.$$

Далее из (30), используя условие (21), находим оценки

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_0 a^3}{32} & \leq \frac{\sigma_0 a^3}{16} - \frac{3\sigma_1^2 a^5 T}{2} \leq \varphi_1(x, t) \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \\ \frac{\sigma_0 a^3}{32} & \leq \frac{\sigma_0 a^3}{16} - \frac{3\sigma_1^2 a^5 T}{2} \leq \varphi_n(x, t) \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (x, t) \in D_T^+, \end{aligned}$$

из которых следует, что предельная функция  $\varphi(x, t)$  удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32} \leq \varphi(x, t) \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (31)$$

Из (31) следует (22).

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда система уравнений (10), (11) имеет в области  $D_T^+$  единственное решение и оно принадлежит классу  $C^1(D_T^+)$ .

**Доказательство.** Из леммы 1 следуют существование, единственность и непрерывность в области  $D_T^+$  функций  $u(x, t)$  и  $v_2(x, t)$ . Чтобы показать, что эти функции обладают в области  $D_T^+$  непрерывными производными по переменным  $x$  и  $t$ , достаточно продифференцировать уравнения (23), (24) по этим переменным. Выполним это, как пример, для функции  $v(x, t)$ . Продифференцировав уравнение (23), получим равенства

$$v_t(x, t) = -\frac{3}{c} \int_x^{(x+ct)/2} \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi, \tau)w_\tau(\xi, \tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi - \frac{1}{2}\hat{\sigma}((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2, (t+x/c)/2), \quad (x, t) \in D_T^+, \tag{32}$$

$$v_x(x, t) = -\frac{3}{c^2} \int_x^{(x+ct)/2} \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi, \tau)w_\tau(\xi, \tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi - \frac{1}{2c}\hat{\sigma}((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2, (t+x/c)/2) + \frac{1}{c}\hat{\sigma}(x)w^3(x, t), \quad (x, t) \in D_T^+. \tag{33}$$

Из равенств (32), (33) вытекает непрерывность производных функции  $v(x, t)$  в области  $D_T^+$ . Следовательно,  $v \in C^1(D_T^+)$ . Аналогично доказывается, что  $u \in C^1(D_T^+)$ .

**2. Теорема о существовании и единственности локального решения обратной задачи.** Рассмотрим обратную задачу (2)–(4), полагая, что функция  $f(t)$  задана. Принимая введённые далее обозначения, заменим её эквивалентной задачей (5)–(7). Проведённое выше исследование прямой задачи показывает, что функции  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  должны удовлетворять на границе области  $D_T^+$  условиям (8), (9). Поэтому обратную задачу можно переформулировать в следующем виде: найти функции  $\hat{\sigma}(x)$ ,  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u + \hat{\sigma}(x)w^3 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)v + \hat{\sigma}(x)w^3 = 0, \quad (x, t) \in D_T^+, \tag{34}$$

в которых  $w = u + v$ , и условиям

$$u(0, t) = a, \quad v(0, t) = 2\sqrt{\varepsilon}f(t) - a, \quad t \in [0, T], \quad v(x, x/c) = 0, \quad x \in cT/2. \tag{35}$$

Если предположить, что условия лемм 1 и 2 выполнены, то из этих лемм следует, что функция  $f(t)$  должна удовлетворять следующим условиям:

$$f \in C^1[0, T], \quad f(t) > 0, \quad f'(t) < 0, \quad t \in [0, T], \quad f(0) = a. \tag{36}$$

Последнее из этих равенств следует из уравнения (12) для функции  $w(x, t)$ . Однако при рассмотрении вопроса о разрешимости обратной задачи мы не в праве предполагать выполнения условий лемм 1 и 2. Но отмеченное выше даёт основание предположить выполнение условий (36). Покажем, что при выполнении этих условий существует локально единственное решение обратной задачи (34), (35).

**Теорема 2.** Пусть выполнены уравнения (34) и соотношения (35), а функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям (36). Тогда найдётся  $T^* \in (0, T]$  такое, что на отрезке  $[0, T^*]$  существует единственное непрерывное и положительное решение обратной задачи.

**Доказательство.** Согласно (35) функция  $v(0, t)$  задана на отрезке  $[0, T]$ . Поэтому запишем для неё новое интегральное соотношение, более удобное здесь, чем (10). Проинтегрировав

второе уравнение (34) вдоль характеристики  $\xi + c\tau = x + ct$  от точки  $(x, t) \in D_T^+$  до точки  $(0, t + x/c)$ , получим уравнение

$$v(x, t) = 2\sqrt{\varepsilon}f(t + x/c) - a - \frac{1}{c} \int_0^x \hat{\sigma}(\xi)w^3(\xi, t + (x - \xi)/c) d\xi, \quad (x, t) \in D_T^+.$$

Складывая его с уравнением (24), находим уравнение для функции  $w(x, t)$ :

$$w(x, t) = w_0(x, t) - \frac{1}{c} \int_0^x \hat{\sigma}(\xi)w^3(\xi, t + (x - \xi)/c) d\xi - \\ - \frac{1}{c} \int_0^x \hat{\sigma}(\xi)w^3(\xi, t - (x - \xi)/c) d\xi, \quad (x, t) \in D_T^+, \quad (37)$$

в котором

$$w_0(x, t) = 2\sqrt{\varepsilon}f(t + x/c).$$

Продифференцировав это уравнение по переменной  $t$  и сохранив ранее введённое обозначение  $\varphi(x, t) = -w_t(x, t)$ , получим уравнение

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x, t) - \frac{3}{c} \int_0^x \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi, t + (x - \xi)/c)\varphi(\xi, t + (x - \xi)/c) d\xi - \\ - \frac{3}{c} \int_0^x \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi, t - (x - \xi)/c)\varphi(\xi, t - (x - \xi)/c) d\xi, \quad (x, t) \in D_T^+, \quad (38)$$

где

$$\varphi_0(x, t) = -2\sqrt{\varepsilon}f'(t + x/c).$$

Положим  $x = 0$  в (32) и используем вторую формулу из (35). Тогда придём к уравнению

$$2\sqrt{\varepsilon}f'(t) = \frac{3}{c} \int_0^{ct/2} \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi, \tau)\varphi(\xi, \tau)|_{\tau=t-\xi/c} d\xi - \frac{1}{2}\hat{\sigma}(ct/2)w^3(ct/2, t/2), \quad t \in [0, T],$$

которое преобразуем к виду

$$\hat{\sigma}(x) = \hat{\sigma}_0(x) + \hat{\sigma}_0(x) \left( \frac{w_0^3(x, x/c)}{w^3(x, x/c)} - 1 \right) + \\ + \frac{6}{cw^3(x, x/c)} \int_0^x \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi, \tau)\varphi(\xi, \tau)|_{\tau=(2x-\xi)/c} d\xi, \quad x \in [0, cT/2], \quad (39)$$

здесь

$$\hat{\sigma}_0(x) = -\frac{4\sqrt{\varepsilon}f'(2x/c)}{w_0^3(x, x/c)}.$$

Соотношения (37)–(39) образуют в области  $D_T^+$  замкнутую систему уравнений относительно функций  $w(x, t)$ ,  $\varphi(x, t)$  и  $\hat{\sigma}(x)$ . Из условий теоремы 2 следует, что функции  $w_0(x, t)$ ,  $\varphi_0(x, t)$

и  $\hat{\sigma}_0(x)$  непрерывны и положительны в  $D_T^+$ . Поэтому найдутся положительные числа  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что

$$\alpha \leq w_0(x) \leq \beta, \quad \alpha \leq \varphi_0(x) \leq \beta, \quad (x, t) \in D_T^+, \quad \alpha \leq \hat{\sigma}_0(x) \leq \beta, \quad x \in [0, cT/2]. \quad (40)$$

Введём вектор-функции

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= (w(x, t), \varphi(x, t), \hat{\sigma}(x)) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3), \\ \psi^0(x, t) &= (w_0(x, t), \varphi_0(x, t), \hat{\sigma}_0(x)) = (\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0). \end{aligned}$$

Пусть  $\mathcal{M}(T)$  – множество функций  $\psi(x, t)$ , непрерывных в  $D_T^+$  и таких, что

$$\|\psi - \psi^0\| = \max_{k=1,2,3} \max_{(x,t) \in D_T^+} |\psi_k(x, t) - \psi_k^0(x, t)| \leq \frac{\alpha}{2}. \quad (41)$$

Запишем систему уравнений (37)–(39) в операторном виде

$$\psi = \mathcal{A}(\psi), \quad (42)$$

где  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$  – нелинейный векторный оператор, а его компоненты определены правыми частями уравнений (37)–(39) соответственно. Покажем, что оператор  $\mathcal{A}$  является сжимающим на множестве  $\mathcal{M}(T^*)$  при подходящем выборе  $T^*$ .

Докажем сначала, что для некоторого  $T_1 \in (0, T]$  оператор  $\mathcal{A}$  переводит множество  $\mathcal{M}(T_1)$  в себя. Пусть  $\psi \in \mathcal{M}(T)$ . Тогда из неравенств (40), (41) следуют априорные оценки для компонент функции  $\psi(x, t)$ :

$$\frac{\alpha}{2} \leq \psi_k(x, t) \leq \beta + \frac{\alpha}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (43)$$

Из уравнения (37), оценивая первую компоненту вектора  $\mathcal{A}(\psi) - \psi^0$  с помощью неравенств (43), находим, что

$$|\mathcal{A}_1(\psi) - w_0(x, t)| \leq C_1 T, \quad C_1 = \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^4, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (44)$$

Действуя аналогично, из уравнения (38) получаем оценку

$$|\mathcal{A}_2(\psi) - \varphi_0(x, t)| \leq C_2 T, \quad C_2 = 3\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^4, \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (45)$$

Чтобы оценить разность  $|\mathcal{A}_3(\psi) - \hat{\sigma}_0(x)|$ , используем неравенство (44) для оценки второго слагаемого правой части уравнения (39). При этом

$$\begin{aligned} \left| \frac{w_0^3(x, x/c)}{w^3(x, x/c)} - 1 \right| &= \frac{|w(x, x/c) - w_0(x, x/c)|}{w^3(x, x/c)} (w^2(x, x/c) + w(x, x/c)w_0(x, x/c) + w_0^2(x, x/c)) \leq \\ &\leq \frac{24}{\alpha^3} \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^6 T, \quad x \in [0, cT/2]. \end{aligned}$$

Из уравнения (39) имеем оценку

$$|\mathcal{A}_3(\psi) - \hat{\sigma}_0(x)| \leq C_3 T, \quad C_3 = \frac{24}{\alpha^3} \left[ \beta \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^6 + \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^4 \right], \quad x \in [0, cT/2]. \quad (46)$$

Выберем  $T_1$  из условия

$$T_1 = \min\left(T, \frac{\alpha}{2C_1}, \frac{\alpha}{2C_2}, \frac{\alpha}{2C_3}\right).$$

Тогда из оценок (44)–(46) следует, что выполнено неравенство (41), если в нём положить  $T = T_1$ . Следовательно, оператор  $\mathcal{A}(\psi)$  отображает множество  $\mathcal{M}(T_1)$  на себя.

Покажем теперь, что оператор  $\mathcal{A}(\psi)$  сжимает расстояние между любыми элементами множества  $\mathcal{M}(T^*)$  при некотором  $T^* \in (0, T_1]$ . Пусть  $\psi^k = (w_k, \varphi_k, \hat{\sigma}_k)$ ,  $k = 1, 2$ , – два произвольных элемента множества  $\mathcal{M}(T)$ . Запишем равенство (37) для  $k = 1$  и  $k = 2$  и вычтем одно из другого. Тогда из полученного равенства следует оценка

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1(\psi^1) - \mathcal{A}_1(\psi^2)| &= |w_1(x, t) - w_2(x, t)| \leq \frac{1}{c} \int_0^x |\hat{\sigma}_1(\xi) - \hat{\sigma}_2(\xi)| w_1^3(\xi, \tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi + \\ &+ \frac{1}{c} \int_0^x \hat{\sigma}_2(\xi) (w_1^2(\xi, \tau) + w_1(\xi, \tau)w_2(\xi, \tau) + w_2^2(\xi, \tau)) |w_1(\xi, \tau) - w_2(\xi, \tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi + \\ &+ \frac{1}{c} \int_0^x |\hat{\sigma}_1(\xi) - \hat{\sigma}_2(\xi)| w_1^3(\xi, \tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c} d\xi + \\ &+ \frac{1}{c} \int_0^x \hat{\sigma}_2(\xi) (w_1^2(\xi, \tau) + w_1(\xi, \tau)w_2(\xi, \tau) + w_2^2(\xi, \tau)) |w_1(\xi, \tau) - w_2(\xi, \tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c} d\xi \leq \\ &\leq C_4 T \|\psi^1 - \psi^2\|, \quad (x, t) \in D_T^+, \end{aligned} \tag{47}$$

в которой  $C_4 = 4(\beta + \alpha/2)^3$ . Аналогично из равенства (38) имеем оценку

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_2(\psi^1) - \mathcal{A}_2(\psi^2)| &= |\varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t)| \leq \\ &\leq \frac{3}{c} \int_0^x [|\sigma_1(\xi) - \sigma_2(\xi)| w_1^2(\xi, \tau) \varphi_1(\xi, \tau) + \sigma_2(\xi) (w_1(\xi, \tau) + w_2(\xi, \tau)) |w_1(\xi, \tau) - w_2(\xi, \tau)| \varphi_1(\xi, \tau) + \\ &+ \sigma_2(\xi) w_2^2(\xi, \tau) |\varphi_1(\xi, \tau) - \varphi_2(\xi, \tau)|]_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi + \\ &+ \frac{3}{c} \int_0^x [|\sigma_1(\xi) - \sigma_2(\xi)| w_1^2(\xi, \tau) \varphi_1(\xi, \tau) + \sigma_2(\xi) (w_1(\xi, \tau) + w_2(\xi, \tau)) |w_1(\xi, \tau) - w_2(\xi, \tau)| \varphi_1(\xi, \tau) + \\ &+ \sigma_2(\xi) w_2^2(\xi, \tau) |\varphi_1(\xi, \tau) - \varphi_2(\xi, \tau)|]_{\tau=t-(x-\xi)/c} d\xi \leq C_5 \|\psi^1 - \psi^2\| T, \quad (x, t) \in D_T^+, \end{aligned} \tag{48}$$

в которой  $C_5 = 12(\beta + \alpha/2)^3$ .

Из уравнения (39) находим, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_3(\psi^1) - \mathcal{A}_3(\psi^2)| &= |\hat{\sigma}_1(x) - \hat{\sigma}_2(x)| \leq \\ &\leq \frac{|w_1(x, x/c) - w_2(x, x/c)|}{w_1^3(x, x/c)w_2^3(x, x/c)} (w_1^2(x, x/c) + w_1(x, x/c)w_2(x, x/c) + w_2^2(x, x/c)) \times \\ &\times \left( \hat{\sigma}_0(x)w_0^3(x, x/c) + \frac{6}{c} \int_0^x \hat{\sigma}_1(\xi) w_1^2(\xi, \tau) \varphi_1(\xi, \tau)|_{\tau=(2x-\xi)/c} d\xi \right) + \\ &+ \frac{6}{cw_2^3(x, x/c)} \int_0^x [|\hat{\sigma}_1(\xi) - \hat{\sigma}_2(\xi)| w_1^2(\xi, \tau) \varphi_1(\xi, \tau) + \hat{\sigma}_2(\xi) (w_1(\xi, \tau) + w_2(\xi, \tau)) \times \\ &\times |w_1(\xi, \tau) - w_2(\xi, \tau)| \varphi_1(\xi, \tau) + \hat{\sigma}_2(\xi) w_2^2(\xi, \tau) |\varphi_1(\xi, \tau) - \varphi_2(\xi, \tau)|]_{\tau=(2x-\xi)/c} d\xi, \quad x \in [0, cT/2]. \end{aligned}$$

Используем для оценки разности  $w_1(x, x/c) - w_2(x, x/c)$  соотношения (44) и неравенства (40), (43) для остальных слагаемых. Тогда вычисления приводят к оценке

$$|A_3(\psi^1) - A_3(\psi^2)| \leq (C_6 T + C_7 T^2) \|\psi^1 - \psi^2\|, \quad x \in [0, cT/2], \tag{49}$$

где постоянные  $C_6$  и  $C_7$  вычисляются по формулам

$$C_6 = 3 \frac{8^2 \beta^4}{\alpha^6} \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^6 + 24 \frac{8}{c\alpha^3} \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^3, \quad C_7 = 9 \frac{8^2}{\alpha^6} \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^{10}.$$

Пусть  $\rho \in (0, 1)$ . Учитывая, что  $C_5 > C_4$ , выберем  $T^*$  из условия

$$T^* = \min\left(T_1, \frac{\rho}{C_5}, \frac{-C_6 + \sqrt{C_6^2 + 4\rho C_7}}{2C_7}\right).$$

Тогда из оценок (47)–(49) следует, что

$$\|\mathcal{A}(\psi^1) - \mathcal{A}(\psi^2)\| \leq \rho \|\psi^1 - \psi^2\|, \quad (x, t) \in D_{T^*}^+.$$

Так как  $\rho < 1$ , то это означает, что оператор  $\mathcal{A}$  сжимает расстояние между элементами множества  $\mathcal{M}(T^*)$ . Из теоремы о сжимающих отображениях заключаем, что уравнение (42) имеет решение на множестве  $\mathcal{M}(T^*)$ , и притом только одно. Отсюда следует утверждение теоремы 2.

**3. Глобальная оценка условной устойчивости решений обратной задачи.** Из установленного выше факта, что оператор  $\mathcal{A}$  является сжимающим на множестве  $\mathcal{M}(T^*)$ , нетрудно вывести оценку устойчивости решения обратной задачи на отрезке  $[0, cT^*/2]$ . Однако это будет локальная оценка, так как, вообще говоря,  $T^* < T$ . При априорном условии, что решения обратной задачи принадлежат заданному множеству  $\mathcal{Q}(\sigma_0, \sigma_1, T)$ , можно получить оценку устойчивости решения обратной задачи при любом конечном  $T$ . Эта оценка имеет условный характер, но она является глобальной и поэтому зачастую полезна при конструировании вычислительных алгоритмов. Далее выводится оценка условной устойчивости решений рассматриваемой обратной задачи.

**Определение 2.** Будем говорить, что функция  $f \in \mathcal{F}(T)$ , если  $f \in C^1([0, T])$  и для неё выполнены условия (36).

Обозначим

$$\|f\|_{C^1([0, T])} = \max\left(\max_{t \in [0, T]} |f(t)|, \max_{t \in [0, T]} |f'(t)|\right).$$

**Теорема 3.** Пусть для  $k = 1, 2$  существуют решения  $\hat{\sigma}_k \in \mathcal{Q}(\sigma_0, \sigma_1, T)$  обратной задачи с данными  $f = f_k \in \mathcal{F}(T)$  в (7). Пусть, кроме того, для числа  $a > 0$  выполнены условия (14) и (21). Тогда найдётся положительная постоянная  $C = C(\varepsilon, a, \sigma_0, \sigma_1, T)$  такая, что

$$|\hat{\sigma}_1(x) - \hat{\sigma}_2(x)| \leq C \|f_1 - f_2\|_{C^1([0, T])}, \quad x \in [0, cT/2]. \tag{50}$$

**Доказательство.** Обозначим через  $u_k(x, t)$ ,  $v_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2$ , функции, соответствующие решению прямой задачи (5)–(7) при  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_k(x)$ , и пусть  $w_k(x, t) = u_k(x, t) + v_k(x, t)$ .

Тогда функции  $w_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2$ , положительны в  $D_T^+$  (как следует из леммы 1) и для них верны оценки

$$0 < a/2 \leq w_k(x, t) \leq a, \quad (x, t) \in D_T^+, \quad k = 1, 2. \tag{51}$$

Кроме того, из леммы 2 следует положительность функций  $\varphi_k(x, t) = -(w_k)_t(x, t)$  и справедливость неравенств

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32} \leq \varphi_k(x, t) \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad (x, t) \in D_T^+, \quad k = 1, 2. \tag{52}$$

Это означает также, что функции  $f_k(t) = w_k(0, t)$  должны удовлетворять условиям

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32} \leq -f'_k(t) \leq \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2. \quad (53)$$

Введём обозначения

$$w_1(x, t) - w_2(x, t) = \bar{w}(x, t), \quad \varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t) = \bar{\varphi}(x, t), \quad \hat{\sigma}_1(x) - \hat{\sigma}_2(x) = \bar{\sigma}(x),$$

$$f_1(t) - f_2(t) = \bar{f}(t), \quad Z(x) = \max \left( \max_{t \in [x/c, T-x/c]} |\bar{w}(x, t)|, \max_{t \in [x, T-x]} |\bar{\varphi}(x, t)|, |\bar{\sigma}(x)| \right). \quad (54)$$

Воспользуемся равенствами (37)–(39). Заменяем в них функции  $w, \varphi, \hat{\sigma}$  на  $w_k, \varphi_k, \hat{\sigma}_k$ ,  $k = 1, 2$ , и  $w_0, \varphi_0, \hat{\sigma}_0$  на  $w_{0k}, \varphi_{0k}, \hat{\sigma}_{0k}$ . При этом нужно заменить  $f$  на  $f_k$ . Вычтем из получившихся равенств при  $k = 1$  соответствующие равенства при  $k = 2$  и последовательно оценим  $\bar{w}(x, t)$ ,  $\bar{\varphi}(x, t)$  и  $\bar{\sigma}(x)$ .

Из (37) выводим равенство

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, t) = & 2\sqrt{\varepsilon} \bar{f}(t + x/c) - \frac{1}{c} \int_0^x [\bar{\sigma}(\xi) w_1^3(\xi, \tau) + \\ & + \sigma_2(\xi) \bar{w}(\xi, \tau) (w_1^2(\xi, \tau) + w_1(\xi, \tau) w_2(\xi, \tau) + w_2^2(\xi, \tau))]_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi - \\ & - \frac{1}{c} \int_0^x [\bar{\sigma}(\xi) w_1^3(\xi, \tau) + \sigma_2(\xi) \bar{w}(\xi, \tau) (w_1^2(\xi, \tau) + w_1(\xi, \tau) w_2(\xi, \tau) + w_2^2(\xi, \tau))]_{\tau=t-(x-\xi)/c} d\xi, \quad (x, t) \in D_T^+, \end{aligned}$$

из которого, используя неравенства (51) и априорное условие  $\hat{\sigma}_k \in \mathcal{Q}(\sigma_0, \sigma_1, T)$ , находим оценку

$$|\bar{w}(x, t)| \leq 2\sqrt{\varepsilon} \|\bar{f}\|_{C[0, T]} + C_8 \int_0^x Z(\xi) d\xi, \quad C_8 = \frac{2a^2}{c} (a + 3\sigma_1), \quad (x, t) \in D_T. \quad (55)$$

Аналогично, используя уравнение (38), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x, t) = & 2\sqrt{\varepsilon} \bar{f}'(t + x/c) - \frac{3}{c} \int_0^x [\bar{\sigma}(\xi) w_1^2(\xi, \tau) \varphi_1(\xi, \tau) + \\ & + \sigma_2(\xi) \bar{w}(\xi, \tau) (w_1(\xi, \tau) + w_2(\xi, \tau)) \varphi_1(\xi, \tau) + \hat{\sigma}_2(\xi) w_2^2(\xi, \tau) \bar{\varphi}(\xi, \tau)]_{\tau=t+(x-\xi)/c} d\xi - \\ & - \frac{3}{c} \int_0^x [\bar{\sigma}(\xi) w_1^2(\xi, \tau) \varphi_1(\xi, \tau) + \sigma_2(\xi) \bar{w}(\xi, \tau) (w_1(\xi, \tau) + w_2(\xi, \tau)) \varphi_1(\xi, \tau) + \\ & + \hat{\sigma}_2(\xi) w_2^2(\xi, \tau) \bar{\varphi}(\xi, \tau)]_{\tau=t-(x-\xi)/c} d\xi, \quad (x, t) \in D_T^+. \end{aligned}$$

Из этого равенства и неравенств (51), (52) следует оценка

$$|\bar{\varphi}(x, t)| \leq 2\sqrt{\varepsilon} \|\bar{f}'\|_{C[0, T]} + C_9 \int_0^x Z(\xi) d\xi, \quad C_9 = \frac{3a^2 \sigma_1}{c} (a^2 (a + 2\sigma_1) + 2), \quad (x, t) \in D_T^+. \quad (56)$$

Наконец, используя равенство (39), приходим к соотношению

$$\bar{\sigma}(x) = -4\sqrt{\varepsilon} \bar{f}'_1(2x/c) + \frac{\bar{w}(x, x/c)}{w_1^3(x, x/c) w_2^3(x, x/c)} [w_1^2(x, x/c) + w_1(x, x/c) w_2(x, x/c) + w_2^2(x, x/c)] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left( 4\sqrt{\varepsilon} f_2'(2x/c) - \frac{6}{c} \int_0^x \hat{\sigma}_1(\xi) w_1^2(\xi, \tau) \varphi_1(\xi, \tau) |_{\tau=(2x-\xi)/c} d\xi \right) + \frac{6}{cw_2^3(x, x/c)} \int_0^x [|\bar{\sigma}(\xi)| w_1^2(\xi, \tau) \varphi_1(\xi, \tau) + \\ & + \hat{\sigma}_2(\xi) |\bar{w}(\xi, \tau)| (w_1(\xi, \tau) + w_2(\xi, \tau)) \varphi_1(\xi, \tau) + \hat{\sigma}_2(\xi) w_2^2(\xi, \tau) |\bar{\varphi}(\xi, \tau)|]_{\tau=(2x-\xi)/c} d\xi, \quad x \in [0, cT/2]. \end{aligned}$$

При оценке слагаемых правой части этого равенства воспользуемся для  $\bar{w}(x, x/c)$  неравенством (55), а для оценки  $\varphi_k(x, t)$  и  $f_2'(2x/c)$  – неравенствами (52) и (53) соответственно. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} |\bar{\sigma}(x)| & \leq 4\sqrt{\varepsilon} \|\bar{f}'\|_{C[0,T]} + C_{10} \int_0^x Z(\xi) d\xi, \quad x \in [0, cT/2], \\ C_{10} & = 3 \frac{8^2 a^5 \sigma_1 C_8}{2\alpha^6} [4\sqrt{\varepsilon} + 3T\sigma_1 a^2] + \frac{24\sigma_1}{c\alpha^3} [a^4(a + 2\sigma_1) + 2a^2]. \end{aligned} \quad (57)$$

Из оценок (55)–(57) следует итоговое неравенство

$$Z(x) \leq 4\sqrt{\varepsilon} \|\bar{f}\|_{C^1[0,T]} + K \int_0^x Z(\xi) d\xi, \quad x \in [0, cT/2], \quad (58)$$

в котором  $K = \max(C_8, C_9, C_{10})$ . Применив к интегральному соотношению (58) неравенство Гронуолла–Беллмана (см., например, [20]), получим

$$Z(x) \leq 4\sqrt{\varepsilon} \|\bar{f}\|_{C^1[0,T]} \exp(Kx) \leq 4\sqrt{\varepsilon} \|\bar{f}\|_{C^1[0,T]} \exp(KcT/2), \quad x \in [0, cT/2].$$

Из этой оценки, с учётом обозначений (54), следует неравенство (50).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики имени С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Piskin E.* On the decay and blow up of solutions for a quasilinear hyperbolic equations with nonlinear damping and source terms // *Boundary Value Problems.* 2015. Art. 127.
2. *Messaoudi S.A., Talahmeh A.A.* On wave equation: review and recent results // *Arab. J. Math.* 2018. V. 7. P. 113–145.
3. *Ogbiyele P.A., Arawomo P.O.* Existence and blow up time estimate for a negative initial energy solution of a nonlinear Cauchy problem // *Acta Appl. Math.* 2020. V. 170. P. 443–458.
4. *Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G.* Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // *Invent. Math.* 2018. V. 212. P. 781–857.
5. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // *Commun. Math. Phys.* 2018. V. 360. P. 555–609.
6. *Lassas M.* Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // *Proc. Intern. Congress Math.* 2018. V. 3. P. 3739–3760.
7. *Hintz P., Uhlmann G.* Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // *Int. Math. Res. Notices.* 2019. V. 22. P. 6949–6987.
8. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // *Int. Math. Res. Notices.* 2022. V. 17. P. 13181–13211.
9. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* The Dirichlet-to-Neumann map for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // *arXiv:2103.08110v1 [math.AP].* 15 Mar. 2021.
10. *Barreto A.S.* Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // *Inverse Probl. Imaging.* 2020. V. 14. № 6. P. 1057–1105.
11. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation // *arXiv:2107.08513v1 [math.AP].* 18 Jul. 2021.
12. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // *Commun. Partial Differ. Equat.* 2019. V. 44. № 11. P. 1140–1158.

13. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53.
14. *Uhlmann G., Zhai J.* On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // J. Math. Pure Appl. 2021. V. 153. P. 114–136.
15. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Обратная задача для нелинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25. № 2. С. 83–100.
16. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25. № 3. С. 154–169.
17. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Обратная задача для волнового уравнения с полиномиальной нелинейностью // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26. № 1. С. 142–149.
18. *Романов В.Г.* Обратная задача для полулинейного волнового уравнения // Докл. РАН. 2022. Т. 504. № 1. С. 36–41.
19. *Романов В.Г.* Обратная задача для уравнений электродинамики с нелинейной проводимостью // Докл. РАН. 2023. Т. 509. № 1. С. 65–68.
20. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М., 1965.

Институт математики  
имени С.Л. Соболева СО РАН,  
г. Новосибирск

Поступила в редакцию 14.07.2023 г.  
После доработки 14.07.2023 г.  
Принята к публикации 25.08.2023 г.