ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1412–1424

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.957

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНОЗОННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. А. Б. Хасанов, Х. Н. Нормуродов, У. О. Худаёров

Для интегрирования нелинейного уравнения Лиувилля в классе периодических бесконечнозонных функций применён метод обратной спектральной задачи. Введена эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением нелинейного уравнения Лиувилля. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина в классе трижды непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда, построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формулы первого следа, удовлетворяет уравнению Лиувилля.

DOI: 10.31857/S0374064123100084, EDN: OOBNJP

Введение. В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Лиувилля (см. [1, с. 14; 2]) вида

$$q_{xt} = a(t)e^q, \quad q = q(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,0) = q_0(x), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(\mathbb{R}), \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π-периодических по x функций:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t), \quad q(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(t>0) \bigcap C(t \geqslant 0). \tag{3}$$

Здесь $a(t) \in C([0,\infty))$ – заданная непрерывная ограниченная функция. Нетрудно убедиться в том, что условия совместности линейных уравнений

$$y_x = \begin{pmatrix} q_x/2 & -\lambda \\ \lambda & -q_x/2 \end{pmatrix} y, \quad y_t = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 0 & b(t)e^q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

эквивалентны уравнению (1) для функции $q = q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Хорошо известно, что нахождение явной формулы для решения нелинейного эволюционного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (мКдФ), нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ), уравнения синус-Гордона, уравнения Хирота и др. в классе периодический функций существенно зависит от количества нетривиальных лакун в спектре периодического оператора Штурма–Лиувилля и оператора Дирака. С помощью метода обратной спектральной задачи для оператора Штурма–Лиувилля и оператора Дирака с периодическим потенциалом, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун, в работах [3–8] была установлена полная интегрируемость нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордона, Хироты и др.) в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Кроме того, для конечнозонных решений нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ и др.) была выведена явная формула через тета-функции Римана. Таким образом, в этих работах была доказана разрешимость задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений при любых конечнозонных начальных данных. Более подробно эта теория изложена в монографиях [9, 10], а также в статье [11].

В связи с этим класс периодических функций удобно разбить на два множества:

1) класс периодических конечнозонных функций;

2) класс периодических бесконечнозонных функций.

Известно [12], что если $q(x) = 2a\cos(2x)$, $a \neq 0$, то в спектре оператора Штурма–Лиувилля $Ly \equiv -y'' + q(x)y$, $x \in \mathbb{R}$, открыты все лакуны, иначе говоря, $q(x)$ – периодический бесконечнозонный потенциал. Аналогичные примеры имеются для периодического оператора Дирака (см. [13]).

В данной работе предлагается алгоритм построения периодических бесконечнозонных решений $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, задачи (1)–(3) сведением её к обратной спектральной задаче для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} P(x,t) & Q(x,t) \\ Q(x,t) & -P(x,t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad P(x,t) = 0, \quad Q(x,t) = \frac{1}{2}q'_x(x,t).$$

Отметим, что задача Коши в классе периодических и почти-периодических бесконечнозонных функций для нелинейных эволюционных уравнений без источника и с источником, а также с дополнительным членом в различных постановках изучалась в работах [14–24].

1. Эволюция спектральных данных. Обозначим через

$$c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^{\text{т}}, \quad s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^{\text{т}}$$

решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^{\text{т}}$ и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^{\text{т}}$ соответственно.

Функция

$$\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$$

называется *функцией Ляпунова* для уравнения (4).

Кроме того, для решений $c(x,\lambda,\tau,t)$ и $s(x,\lambda,\tau,t)$ при больших $|\lambda|$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$c(x,\lambda,\tau,t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{pmatrix} + \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}[q'_x(x+\tau,t) + q'_x(\tau,t)]\sin(\lambda x) + a(x,\tau,t)\sin(\lambda x) \\ -\frac{1}{2}[q'_x(x+\tau,t) - q'_x(\tau,t)]\cos(\lambda x) - a(x,\tau,t)\cos(\lambda x) \end{pmatrix} + \\ + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \to \infty, \tag{5}$$

$$s(x,\lambda,\tau,t) = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda x) \\ \cos(\lambda x) \end{pmatrix} + \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}[q'_x(x+\tau,t) - q'_x(\tau,t)]\cos(\lambda x) + a(x,\tau,t)\cos(\lambda x) \\ -\frac{1}{2}[q'_x(x+\tau,t) + q'_x(\tau,t)]\sin(\lambda x) + a(x,\tau,t)\sin(\lambda x) \end{pmatrix} + \\ + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \to \infty, \tag{6}$$

где

$$a(x,\tau,t) = \frac{1}{4}\int_0^x [q'_s(s+\tau,t)]^2\,ds.$$

Из этих асимптотик при действительных λ получим

$$\Delta(\lambda,\tau,t) = 2\cos(\lambda\pi) + \frac{1}{\lambda}a(\pi,\tau,t)\sin(\lambda\pi) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \to \infty,$$

$$\Delta^2(\lambda,\tau,t)-4=-4\sin^2(\lambda\pi)+\frac{4a(\pi,\tau,t)}{\lambda}\cos(\lambda\pi)\sin(\lambda\pi)+O\biggl(\frac{1}{\lambda^2}\biggr),\quad |\lambda|\to\infty.$$

Вектор-функции

$$\psi^{\pm}(x,\lambda,\tau,t)=(\psi_1^{\pm}(x,\lambda,\tau,t),\psi_2^{\pm}(x,\lambda,\tau,t))^{\text{т}}=c(x,\lambda,\tau,t)+m^{\pm}(\lambda,\tau,t)s(x,\lambda,\tau,t)$$

называются *решениями Флоке* уравнения (4).

Функции Вейля–Титчмарша определяются следующими формулами:

$$m^{\pm}(\lambda,\tau,t)=\frac{s_2(\pi,\lambda,\tau,t)-c_1(\pi,\lambda,\tau,t)\mp\sqrt{\Delta^2(\lambda,\tau,t)-4}}{2s_1(\pi,\lambda,\tau,t)}.$$

Спектр оператора Дирака $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L)=\{\lambda\in\mathbb{R}:|\Delta(\lambda)|\leqslant 2\}=\mathbb{R}\setminus\biggl(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\biggr).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, называются *лакунами*, где λ_n – корни уравнения $\Delta(\lambda)\mp 2=0$. Они совпадают с собственными значениями периодической или антипериодической $(y(0,\tau,t)=\pm y(\pi,\tau,t))$ задачи для уравнения (4). Нетрудно доказать, что $\lambda_{-1}=\lambda_0=0$, т.е. $\lambda=0$ является двукратным собственным значением периодической задачи для уравнения (4).

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t)=0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, и при этом $\xi_n(\tau,t)\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Так как коэффициенты в уравнении (4) имеют вид $P(x,t)\equiv\equiv 0$, $Q(x,t)=q_x'(x,t)/2$, то $\lambda_{-1}=\lambda_0=\xi_0=0$, т.е. $\xi=0$ является собственным значением задачи Дирихле.

Числа $\xi_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, и знаки $\sigma_n(\tau,t)=\operatorname{sign}\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t)-c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\}$, $n\in\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, называются *спектральными параметрами* оператора $L(\tau,t)$. Спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, и границы спектра $\{\lambda_n(\tau,t),n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ называются *спектральными данными* оператора Дирака $L(\tau,t)$.

Определение 1. Коэффициенты $P(x,t)\equiv 0$, $Q(x,t)=q_x'(x,t)/2$ периодического оператора Дирака $L(\tau,t)$ называются *бесконечнозонными функциями*, если границы лакуны $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n\in\mathbb{Z}$, удовлетворяют условиям

$$\ldots<\lambda_{-3}<\xi_{-1}<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<\xi_0<\lambda_0<\lambda_1<\xi_1<\lambda_2<\ldots,$$

где $\lambda_{-1}=\lambda_0=\xi_0=0$.

Определение 2. Коэффициенты $P(x,t)\equiv 0$, $Q(x,t)=q_x'(x,t)/2$ периодического оператора Дирака $L(\tau,t)$ называются *конечнозонными функциями*, если существует такое конечное число N, что для всех $|n|>N$ выполняются равенства $\lambda_{2n-1}=\lambda_{2n}=\xi_n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача восстановления коэффициента $\Omega(x,t)$ оператора $L(\tau,t)$ по спектральным данным называется *обратной задачей*. Коэффициент $\Omega(x,t)$ оператора $L(\tau,t)$ определяется однозначно по спектральным данным $\lambda_n(\tau,t)$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Если с помощью начальной функции $q_0(x+\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}$, построить оператор Дирака $L(\tau,0)$ вида

$$L(\tau,0)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega_0(x+\tau)y=\lambda y,\quad x\in\mathbb{R},\quad \tau\in\mathbb{R},$$

где

$$\Omega_0(x+\tau)=\begin{pmatrix}0 & q_0'(x+\tau)/2\\ q_0'(x+\tau)/2 & 0\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},$$

то увидим, что границы спектра $\lambda_n(\tau)$, $n\in\mathbb{Z}$, полученной задачи не зависят от параметра $\tau\in\mathbb{R}$, т.е. $\lambda_n(\tau)=\lambda_n$, $n\in\mathbb{Z}$, а спектральные параметры от параметра τ зависят: $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in\mathbb{Z}$, и являются периодическими функциями:

$$\xi_n^0(\tau+\pi)=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n^0(\tau+\pi)=\sigma_n^0(\tau),\quad \tau\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Решив прямую задачу, найдём спектральные данные $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ оператора $L(\tau, 0)$.

Обратная задача для оператора Дирака вида

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R},$$

с периодическими коэффициентами $p(x) = p(x+\pi)$, $q(x) = q(x+\pi)$ в различных постановках изучена в работах [25–32]. Следует отметить, что обратная задача в терминах спектральных данных для оператора Хилла исследована в статьях [33–35].

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, – решение задачи (1)–(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, оператора $L(\tau,t)$ не зависят от параметров $\tau \in \mathbb{R}$ и t, т.е. $\lambda_n(\tau,t) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, удовлетворяют соответственно первой и второй системе дифференциальных уравнений Дубровина:*

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))\xi_n(\tau,t), \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))g_n(\xi(\tau,t)), \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{8}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,0) = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,0) = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{9}$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, – спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$. Последовательности $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, в уравнении (8) определяются по формулам

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\, f_n(\xi), \quad f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{a(t)}{2\xi_n(\tau,t)}\exp\{q(\tau,t)\}, \quad \xi(\tau,t) = (\ldots, \xi_{-1}(\tau,t), \xi_1(\tau,t), \ldots).$$

Доказательство. Пусть π-периодическая по x функция $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, удовлетворяет уравнению (1). Обозначим через $y_n(x,\tau,t) = (y_{n,1}(x,\tau,t), y_{n,2}(x,\tau,t))^{\mathrm{T}}$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, ортонормированные собственные вектор-функции оператора $L(\tau,t)$, рассматриваемого на отрезке $[0,\pi]$ с граничными условиями Дирихле

$$y_1(0,\tau,t) = 0, \quad y_1(\pi,\tau,t) = 0,$$

соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Дифференцируя по переменной t тождество

$$\xi_n(\tau,t) = (L(\tau,t)y_n, y_n), \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

и используя симметричность оператора $L(\tau,t)$, получаем

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = (\dot{\Omega}(x+\tau,t)y_n, y_n), \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{10}$$

Используя явный вид скалярного произведения

$$(y,z)=\int\limits_0^{\pi}[y_1(x)\overline{z_1(x)}+y_2(x)\overline{z_2(x)}]\,dx,\quad y=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix}z_1(x)\\ z_2(x)\end{pmatrix},$$

запишем равенство (10) в виде

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=\int\limits_0^{\pi}y_{n,1}y_{n,2}q_{xt}\,dx. \tag{11}$$

Подставив (1) в (11), получим равенство

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=a(t)I_1(\tau,t), \tag{12}$$

где $I_1(\tau,t)=\int_0^{\pi}y_{n,1}y_{n,2}e^{q(x+\tau,t)}\,dx$.

С помощью тождеств

$$y_{n,1}(x,\tau,t)=\frac{1}{\xi_n(\tau,t)}\bigg(y'_{n,2}(x,\tau,t)+\frac{1}{2}q'_x(x+\tau,t)y_{n,2}(x,\tau,t)\bigg),$$

$$y_{n,2}(x,\tau,t)=\frac{1}{\xi_n(\tau,t)}\bigg(-y'_{n,1}(x,\tau,t)+\frac{1}{2}q'_x(x+\tau,t)y_{n,1}(x,\tau,t)\bigg)$$

нетрудно вычислить интеграл

$$I_1(\tau,t)=\int\limits_0^{\pi}y_{n,1}y_{n,2}e^{q(x+\tau,t)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\xi_n(\tau,t)}\int\limits_0^{\pi}y_{n,2}e^{q(x+\tau,t)}\bigg(y'_{n,2}(x,\tau,t)+\frac{1}{2}q'_x(x+\tau,t)y_{n,2}(x,\tau,t)\bigg)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\xi_n(\tau,t)}\bigg(\int\limits_0^{\pi}[y^2_{n,2}(x,\tau,t)e^{q(x+\tau,t)}]'\,dx\bigg)=\frac{1}{2\xi_n(\tau,t)}e^{q(\tau,t)}[y^2_{n,2}(\pi,\tau,t)-y^2_{n,2}(0,\tau,t)]. \tag{13}$$

Подставив (13) в тождество (12), будем иметь

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=\frac{a(t)}{2\xi_n(\tau,t)}\exp\{q(\tau,t)\}[y^2_{n,2}(\pi,\tau,t)-y^2_{n,2}(0,\tau,t)]. \tag{14}$$

Так как собственные значения $\xi_n(\tau,t)$ задачи Дирихле для уравнения (4) простые, то справедливо равенство

$$y_n(x,\tau,t)=\frac{1}{c_n(\tau,t)}s(x,\xi_n(\tau,t),\tau,t),$$

где

$$c^2_n(\tau,t)=\int\limits_0^{\pi}[s^2_1(x,\xi_n(\tau,t),\tau,t)+s^2_2(x,\xi_n(\tau,t),\tau,t)]\,dx=-\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t).$$

Используя это равенство, найдём

$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t)-y_{n,2}^2(0,\tau,t)=-\left(s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)-\frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}\right)\left(\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}.$$

Подставим в это соотношение равенство

$$s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)-c_1(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)=s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)-\frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}=$$

$$=\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(\tau,t))-4}$$

и получим

$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t)-y_{n,2}^2(0,\tau,t)=-\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(\tau,t))-4}\left(\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}. \qquad (15)$$

С учётом разложений

$$\Delta^2(\lambda)-4=-4\pi^2\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_{2k-1})(\lambda-\lambda_{2k})}{a_k^2},\quad s_1(\pi,\lambda,t)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k},$$

где $a_0=1$, $a_k=k$ при $k\neq 0$, запишем равенство (15) в виде

$$y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi).$$

Подставив это выражение в тождество (14), получим (8). Аналогично можно доказать (7).

Если заменить граничные условия Дирихле на периодические $(y(0,t)=y(\pi,t))$ или на антипериодические $(y(0,t)=-y(\pi,t))$ граничные условия, то вместо уравнения (14) получим $\partial\lambda_n(\tau,t)/\partial t=0$, т.е. $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau,0)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Теперь в уравнении $L(\tau,t)\nu_n=\lambda_n(\tau,t)\nu_n$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, положим $t=0$. Так как собственные значения $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau,0)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, периодической или антипериодической задач для уравнения $L(\tau,0)\nu_n=\lambda_n(\tau)\nu_n$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, не зависят от параметра $\tau\in\mathbb{R}$, то имеем $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau)=\lambda_n$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Теорема доказана.

Лемма 1. *Справедливы следующие формулы следов:*

$$q'_\tau(\tau,t)=2\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)), \qquad (16)$$

$$\left(\frac{1}{2}q_\tau(\tau,t)\right)^2+\frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t)=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right). \qquad (17)$$

Доказательство. Применим теорему Миттаг-Лёффлера и получим равенства

$$\frac{s_2(\pi,\lambda,\tau,t)-c_1(\pi,\lambda,\tau,t)}{s_1(\pi,\lambda,\tau,t)}=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\sigma_k(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_k(\tau,t))-4}}{(\lambda-\xi_k(\tau,t))}\left(\frac{\partial s_1(\pi,\xi_k(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\sigma_k(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_k(\tau,t))-4}\left(\frac{\partial s_1(\pi,\xi_k(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}\left(1-\frac{\xi_k(\tau,t)}{\lambda}\right)^{-1}=$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\sigma_k(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_k(\tau,t))-4}\left(\frac{\partial s_1(\pi,\xi_k(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}\left\{\sum_{\substack{n=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\xi_k(\tau,t)}{\lambda}\right)^n\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}2(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda|\to\infty.$$

С другой стороны, используя асимптотики (5) и (6) для решений $c(x,\lambda,\tau,t)$ и $s(x,\lambda,\tau,t)$ при больших $|\lambda|$, имеем

$$\frac{s_2(\pi,\lambda,\tau,t)-c_1(\pi,\lambda,\tau,t)}{s_1(\pi,\lambda,\tau,t)} = \frac{1}{\lambda}q'_\tau(\tau,t)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda|\to\infty.$$

Сравнив эти асимптотики, получим формулу (16).

Если $y(x,\tau,t)=(y_1(x,\tau,t),y_2(x,\tau,t))^{\mathrm{т}}$ является решением периодической или антипериодической задачи для уравнения (4), соответствующей спектральному параметру $\lambda\neq 0$, то $y_1(x,\tau,t)$ и $y_2(x,\tau,t)$ являются решениями следующих граничных задач:

$$-y_1''+q_1(x+\tau,t)y_1=\lambda^2 y_1, \quad y_1(0,\tau,t)=\pm y_1(\pi,\tau,t);$$

$$-y_2''+q_2(x+\tau,t)y_2=\lambda^2 y_2, \quad y_2(0,\tau,t)=\pm y_2(\pi,\tau,t),$$

где

$$q_1(x,t)=\frac{1}{4}q_x^2(x,t)+\frac{1}{2}q_{xx}(x,t), \quad q_2(x,t)=\frac{1}{4}q_x^2(x,t)-\frac{1}{2}q_{xx}(x,t).$$

Так как для функции $q_1(x+\tau,t)$ имеет место равенство

$$q_1(\tau,t)=\lambda_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2-2\xi_k^2(\tau,t)),$$

отсюда следует формула (17). Лемма доказана.

Далее, учитывая формулы следов (16) и (17), систему (8) можно записать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}f_n(\xi)g_n(\xi(\tau,t)), \tag{18}$$

где

$$g_n(\xi)=\frac{a(t)}{2\xi_n(\tau,t)}\exp\left\{C(t)+2\int_0^\tau\left(\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)h_k(\xi(s,t))\right)ds\right\}.$$

Здесь $C(t)$ – некоторая ограниченная непрерывная функция.

В результате замены переменных

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t), \quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{19}$$

систему дифференциальных уравнений Дубровина (18) и начальные условия (9) можно записать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)), \quad x(\tau,0)=x^0(\tau)\in K,$$

где

$$K=\left\{x(\tau,t)=(\ldots,x_{-1}(\tau,t),x_1(\tau,t),\ldots):\|x(\tau,t)\|=\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})|x_n(\tau,t)|<\infty\right\},$$

$$H(x) = (\ldots, H_{-1}(x), H_1(x), \ldots),$$
$$H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(\ldots, \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\sin^2 x_1(\tau,t), \ldots) \times$$
$$\times f_n(\ldots, \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\sin^2 x_1(\tau,t), \ldots) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(x(\tau,t)) f_n(x(\tau,t)).$$

Известно, что если $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$, то $q_0'(x) \in C^2(\mathbb{R})$. Поэтому для длины лакун оператора $L(\tau, 0)$ имеет место оценка (см. [26, с. 98])

$$\gamma_k \equiv \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{|q_{2k}^2|}{2|k|^2} + \frac{\delta_k}{|k|^3}, \tag{20}$$

где

$$\lambda_{2k} = k + \sum_{j=1}^{3} c_j k^{-j} + 2^{-2}|k|^{-2}|q_{2k}^2| + |k|^{-3}\varepsilon_k^+, \quad \lambda_{2k-1} = k + \sum_{j=1}^{3} c_j k^{-j} - 2^{-2}|k|^{-2}|q_{2k}^2| + |k|^{-3}\varepsilon_k^-,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |q_{2k}^2|^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty, \quad \delta_k = \varepsilon_k^+ - \varepsilon_k^-.$$

Отсюда, учитывая $\xi_n(\tau,t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, получаем

$$\inf_{k \neq n} |\xi_n(\tau,t) - \xi_k(\tau,t)| \geqslant a > 0.$$

Теперь, пользуясь этим неравенством и (19), (20), оценим функции

$$|f_n(x(\tau,t))|, \ |\partial f_n(x(\tau,t))/\partial x_m|, \ |g_n(x(\tau,t))|, \ |\partial g_n(x(\tau,t))/\partial x_m|.$$

Лемма 2. *Справедливы следующие оценки:*

$$C_1 \leqslant |f_n(x)| \leqslant C_2, \quad \left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\right| \leqslant C_3 \gamma_m, \tag{21}$$

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{C_4}{|n|}, \quad \left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\right| \leqslant \frac{C_5 \gamma_m}{|n|}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{22}$$

где $C_j > 0$, $j = \overline{1,5}$, *не зависят от параметров* m *и* n.

Доказательство. Оценки (21) доказаны в работе [14], поэтому докажем (22). Поскольку функция $a(t)$ ограничена, то найдётся такое число $M > 0$, что выполняется неравенство $|a(t)| \leqslant M$, пользуясь которым и (19), (20), получим оценки

$$|g_n(x(\tau,t))| \leqslant \frac{M e^{|C(t)|}}{2|\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n(\tau,t)|} \exp\left\{\int_0^\tau \left|\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} (-1)^{k-1}\gamma_k \sigma_k^0(s) \sin(2x_k(s,t)) f_k(x(s,t))\right| ds\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2A_1|n|} \exp\left\{M_1 + \int_0^\tau \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} C_2 \gamma_k \, ds\right\} \leqslant \frac{C_4}{|n|},$$

$$\left|\frac{\partial g_n(x(\tau,t))}{\partial x_m}\right| \leqslant \frac{|a(t)| e^{|C(t)|}}{2|\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n(\tau,t)|} \exp\left\{\int_0^\tau \left|\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} (-1)^{k-1}\gamma_k \sigma_k^0(s) \sin(2x_k(s,t)) f_k(x(s,t))\right| ds\right\} \times$$

$$\times\left\{\left|\int\limits_0^\tau(-1)^{m-1}\gamma_m\sigma_m^0(s)\left[2\cos(2x_m(s,t))f_m(x(s,t))+\sin(2x_m(s,t))\frac{\partial f_m(x(s,t))}{\partial x_m(s,t)}\right]ds\right|+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\tau\left|\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq m}}^{\infty}(-1)^{k-1}\gamma_k\sigma_k^0(s)\sin(2x_k(s,t))\frac{\partial f_k(x(s,t))}{\partial x_m(s,t)}\right|ds\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{2A_1|n|}\exp\left\{M_1+\int\limits_0^\tau\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}C_2\gamma_k\,ds\right\}\left\{B_1\gamma_m|\tau|+B_2\gamma_m^2|\tau|+\gamma_m\int\limits_0^\tau\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq m}}^{\infty}C_3\gamma_k\,ds\right\}\leqslant\frac{C_5\gamma_m}{|n|}.$$

Здесь $M_1=\sup C(t),\ \ t\geqslant 0.$ Лемма доказана.

Лемма 3. *Если периодическая бесконечнозонная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^3(\mathbb{R}),$ то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве $K,$ т.е. существует константа $L>0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t),y(\tau,t)\in K$ выполняется неравенство*

$$\|H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))\|\leqslant L\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\|,$$

где

$$L=C\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{\gamma_n}{|n|}<\infty. \tag{23}$$

Доказательство. Сначала, используя лемму 2, оценим производную функции $F_n(x)=$ $=g_n(x)f_n(x),\ \ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$:

$$\left|\frac{\partial F_n(x)}{\partial x_m}\right|=\left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}f_n(x)+\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}g_n(x)\right|\leqslant\left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\right||g_n(x)|+\left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\right||f_n(x)|\leqslant$$

$$\leqslant C_3\gamma_m\frac{C_4}{|n|}+C_2\frac{C_5\gamma_m}{|n|}\leqslant\frac{C\gamma_m}{|n|},$$

где положительные константы $C_2,\ C_3,\ C_4$ и C_5 не зависят от m и n. Далее, используя выражение

$$H_n(x(\tau,t))=(-1)^n\sigma_n^0(\tau)F_n(x(\tau,t)),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

получаем равенство

$$|H_n(x(\tau,t))-H_n(y(\tau,t))|=|F_n(x(\tau,t))-F_n(y(\tau,t))|.$$

Применим к функции $\varphi(t)=F_n(x+t(y-x))$ теорему Лагранжа о конечном приращении на отрезке $t\in[0,1]$ и получим $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t^*),$ т.е.

$$F_n(x)-F_n(y)=\sum_{\substack{m=-\infty\\m\neq 0}}^{\infty}\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m}(x_m-y_m),$$

где $\theta=x+t^*(y-x)$. Отсюда следует, что

$$|H_n(x(\tau,t))-H_n(y(\tau,t))|=|F_n(x(\tau,t))-F_n(x(\tau,t))|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{m=-\infty\\m\neq 0}}^{\infty}\left|\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m}\right||x_m(\tau,t)-y_m(\tau,t)|\leqslant\sum_{\substack{m=-\infty\\m\neq 0}}^{\infty}\frac{C}{|n|}|\lambda_{2m}-\lambda_{2m-1}||x_m(\tau,t)-y_m(\tau,t)|=\frac{C}{|n|}\|x-y\|.$$

Теперь оценим норму

$$\|H(x)-H(y)\| = \sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})|H_n(x)-H_n(y)| \leqslant \sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{C}{|n|}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\|x-y\| = L\|x-y\|.$$

Здесь

$$L = \sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{C}{|n|}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}) = C\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{\gamma_n}{|n|} < \infty.$$

Таким образом, условие Липшица выполняется. Поэтому решение задачи Коши (8), (9) для всех $t>0$ и $\tau\in\mathbb{R}$ существует и единственно. Лемма доказана.

Замечание 1. Теорема 1 и лемма 2 дают метод нахождения решения задачи (1)–(3).

Сначала найдём спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)=\pm 1$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, оператора Дирака $L(\tau,0)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau,t)$ через λ_n, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Теперь, решив задачу Коши (18), (9) при произвольном значении τ, найдём $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Из формулы следов (16) определим функцию $q_\tau(\tau,t)$, т.е. найдём решение задачи (1)–(3).

До сих пор мы предполагали, что задача Коши (1)–(3) имеет решение. От этого предположения нетрудно освободиться, непосредственно убедившись, что полученная таким способом функция $q_\tau(\tau,t)$, $\tau\in\mathbb{R}$, $t>0$, действительно удовлетворяет уравнению (1).

Замечание 2. Функция $q_\tau(\tau,t)$, построенная с помощью систем уравнений Дубровина (8), (9) и формулы следа (16), действительно удовлетворяет уравнению (1).

При этом мы также будем использовать вторую формулу следов (17). Продифференцировав формулу (17) по t, будем иметь

$$\frac12 q_\tau(\tau,t)q_{\tau t}(\tau,t)+\frac12(q_{\tau t}(\tau,t))_\tau = -\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}2\xi_k(\tau,t)\frac{\partial\xi_k(\tau,t)}{\partial t}. \tag{24}$$

Здесь использовали равенство $(q_\tau(\tau,t))_{t\tau}=(q_\tau(\tau,t))_{\tau t}$. Далее, учитывая систему уравнений (8), из (24) получаем

$$q_\tau(\tau,t)z(\tau,t)+z_\tau(\tau,t) = -4\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}(-1)^k\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi)a(t)\exp\{q(\tau,t)\}, \tag{25}$$

где

$$z(\tau,t)=q_{\tau t}(\tau,t). \tag{26}$$

Теперь используем систему уравнений (7), соответствующую уравнению (4), а также формулу следов (16). Тогда из (25) получим уравнение относительно $z(\tau,t)$:

$$q_\tau(\tau,t)z(\tau,t)+z_\tau(\tau,t)=2a(t)e^{q(\tau,t)}q_\tau(\tau,t). \tag{27}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$z(\tau,t)=a(t)e^{q(\tau,t)}+C_1(t)e^{-q(\tau,t)}$$

является решением линейного уравнения (27). Выбрав $C_1(t)=0$, имеем $z(\tau,t)=a(t)e^{q(\tau,t)}$. Отсюда и из обозначения (26) получим уравнение (1): $q_{\tau t}=a(t)e^{q(\tau,t)}$.

Замечание 3. Равномерная сходимость рядов в (16), (17) и (23) следует из равенств (20) и оценки (21).

Теорема 2. *Если периодическая бесконечнозонная функция* $q_0(x)$ *удовлетворяет условию*

$$q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^3(\mathbb{R}),$$

то существует однозначно определяемое решение $q'_x(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, *задачи (1)–(3), которое определяется по формуле (16) и принадлежит классу* $C^{1,1}_{x,t}(t>0)\bigcap C(t\geqslant 0)$.

Следствие 1. *Из результатов работ [29] и [33] следует, что если начальная функция* $q_0(x)$ *является действительной аналитической* π*-периодической функцией, то решение* $q(x,t)$ *задачи (1)–(3) является действительной аналитической функцией по переменной* x.

Следствие 2. *Если число* $\pi/2$ *является периодом (антипериодом) для начальной функции* $q_0(x)$, *то все корни уравнения* $\Delta(\lambda)+2=0$ $(\Delta(\lambda)-2=0)$ *являются двукратными. Так как функция Ляпунова, соответствующая коэффициенту* $q(x,t)$, *совпадает с* $\Delta(\lambda)$, *то согласно результатам работ [28] и [30] число* $\pi/2$ *является также периодом (антипериодом) для решения* $q(x,t)$ *по переменной* x.

Теперь рассмотрим конечнозонный случай. Здесь решение $q'_\tau(\tau,t)$, $\tau\in\mathbb{R}$, $t>0$, задачи (1)–(3) определяется по формуле

$$q'_\tau(\tau,t)=2\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{N}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)\bar{h}_k(\xi(\tau,t)),$$

при этом координаты $\xi=\xi(\tau,t)=(\xi_{-N}(\tau,t),\ldots,\xi_{-1}(\tau,t),\ldots,\xi_{-N}(\tau,t))$, $\sigma(\tau,t)=(\sigma_{-N}(\tau,t),\ldots$ $\ldots,\sigma_{-1}(\tau,t),\ldots,\sigma_{-N}(\tau,t))$ удовлетворяют системе уравнений Дубровина

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\,\bar{f}_n(\xi)\bar{g}_n(\xi(\tau,t)),\quad |n|\leqslant N,$$

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=0,\quad |n|\geqslant N+1,$$

с начальными условиями

$$\xi_n(\tau,0)=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,0)=\sigma_n^0(\tau),\quad n=\pm1,\pm2,\ldots,\pm N,$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)=\pm1$, $n=\pm1,\pm2,\ldots,\pm N$, – спектральные параметры конечнозонного оператора Дирака вида

$$L(\tau,0)y\equiv\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y'_1\\y'_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&q'_0(x+\tau)/2\\q'_0(x+\tau)/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\quad x\in\mathbb{R},\quad \tau\in\mathbb{R}.$$

Здесь

$$\bar{h}_n(\xi)=\begin{cases}\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\,\bar{f}_n(\xi), & |n|\leqslant N,\\ 0, & |n|\geqslant N+1,\end{cases}$$

$$\bar{f}_n(\xi)=\sqrt{\prod_{\substack{k=-N\\k\neq n}}^{N}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$\bar{g}_n(\xi)=\frac{a(t)}{2\xi_n(\tau,t)}\exp\left\{C(t)+2\int_0^\tau\left(\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{N}(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)\bar{h}_k(\xi(s,t))\right)ds\right\}.$$

Нетрудно заметить, что задача (1)–(3) разрешима при всех конечнозонных начальных данных, так как

$$L=C\sum_{\substack{n=-N\\n\neq 0}}^{N}\frac{\gamma_n}{|n|},\quad \gamma_n\equiv 0,\quad |n|\geqslant N+1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жибер А.В., Муртозина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б.* Характеристическое кольцо Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. М.; Ижевск, 2012.
2. *Жибер А.В., Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.* Уравнения типа Лиувилля // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 1. С. 26–29.
3. *Итс А.Р., Матвеев В.Б.* Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза // Журн. теор. и мат. физики. 1975. Т. 23. № 1. С. 51–68.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза // Журн. эксп. и теор. физики. 1974. Т. 67. № 12. С. 2131–2143.
5. *Итс А.Р., Котляров В.П.* Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шрёдингера // Докл. АН УССР. Сер. А. 1976. № 11. С. 965–968.
6. *Смирнов А.О.* Эллиптические решения нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза // Мат. сб. 1994. Т. 185. № 8. С. 103–114.
7. *Матвеев В.Б., Смирнов А.О.* Решения типа “волн-убийц” уравнений иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура: единый подход // Журн. теор. и мат. физики. 2016. Т. 186. № 2. С. 191–220.
8. *Матвеев В.Б., Смирнов А.О.* Двухфазные периодические решения уравнений из АКНС иерархии // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2018. Т. 473. С. 205–227.
9. *Митрапольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев, 1987.
10. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М., 1980.
11. *Matveev V.B.* 30 years of finite-gap integration theory // Philos. Trans. of the Royal Soc. A. Math. Phys. and Eng. Sci. 2008. V. 366. P. 837–875.
12. *Ince E.L.* A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1922. V. 21. P. 117–120.
13. *Джаков П.Б., Митягин Б.С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 4 (370). С. 77–182.
14. *Маннонов Г.А., Хасанов А.Б.* Задача Коши для нелинейного уравнения Хирота в классе периодических бесконечнозонных функций // Алгебра и анализ. 2022. Т. 34. № 5. С. 139–172.
15. *Хасанов А.Б., Нормуродов Х.Н., Худаёров У.О.* Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза-синус-Гордона в классе периодических бесконечнозонных функций // Журн. теор. и мат. физики. 2023. Т. 214. № 2. С. 198–210.
16. *Grinevich P.G., Taimanov I.A.* Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type // Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2. V. 224. / Eds. V.M. Buchstaer, I.M. Krichever. Providence, 2008. P. 125–138.
17. *Хасанов А.Б., Хасанов М.М.* Интегрирование нелинейного уравнения Шрёдингера с дополнительным членом в классе периодических функций // Журн. теор. и мат. физики. 2019. Т. 199. № 1. С. 60–68.
18. *Khasanov A.B., Khasanov T.G.* Integration of a nonlinear Korteweg–de Vries equation with a loaded term and a source // J. of Appl. and Industr. Math. 2022. V. 16. № 2. P. 227–239.
19. *Khasanov A.B., Allanazarova T.Z.* On the modified Korteweg–de Vries equation with loaded term // Ukrainian Math. J. 2022. V. 73. № 11. P. 1783–1809.
20. *Муминов У.Б., Хасанов А.Б.* Задача Коши для дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера с нагруженным членом // Мат. тр. 2022. Т. 25. № 1. С. 102–133.
21. *Бабажанов Б.А., Хасанов А.Б.* О периодической оценке Тоды с интегральным источником // Теор. и мат. физика. 2015. Т. 184. № 2. С. 1114–1128.
22. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Почти-периодичность бесконечномерных потенциалов оператора Дирака // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. Р. 746–748.
23. *Lax P.* Almost periodic solutions of the KdV equation // SIAM Rev. 1976. V. 18. № 3. P. 351–375.
24. *McKean H., Trubowitz E.* Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branchpoints // Comm. Pure Appl. Math. 1976. V. 29. P. 143–226.
25. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М., 1988.
26. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. I // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 30. / Под ред. В.А. Марченко. Харьков, 1978. С. 90–101

27. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 31. / Под ред. В.А. Марченко. Харьков, 1979. С. 102–109.
28. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Аналог обратной теоремы Г. Борга для оператора Дирака // Узб. мат. журн. 2000. № 3–4. С. 40–46.
29. *Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М.* Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // Узб. мат. журн. 2001. № 3–4. С. 48–55.
30. *Currie S., Roth T., Watson B.* Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // Proc. Edinb. Math. Soc. 2017. V. 60. № 3. P. 615–633.
31. *Grebert B., Guillot J.C.* Gap of one dimensional periodic AKNS systems // Forum Math. 1993. V. 5. № 5. P. 459–504.
32. *Korotayev E., Mokeev D.* Dubrovin equation for periodic Dirac operator on the half-line // Appl. Anal. 2020. V. 101. № 1. P. 1–29.
33. *Trubowtz E.* The inverse problem for periodic potentials // Comm. Pure. Appl. Math. 1977. V. 30. P. 321–337.
34. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Обратная задача на полулинии для оператора Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 1. Р. 23–32.
35. *Бабаджанов Б.А., Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 3. Р. 298–305.

Самаркандский государственный университет
имени Ш. Рашидова, Узбекистан,
Самаркандский государственный
архитектурно-строительный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 27.03.2023 г.
После доработки 24.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.