ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1425–1432

## ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

# НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДА К СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ

**© 2023 г. А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова**

Рассматривается задача стабилизации переключаемой интервальной линейной системы с медленными переключениями, недоступными для наблюдения. Решение предлагается искать в классе регуляторов переменной структуры. Для обеспечения работоспособности такого регулятора необходимо построение наблюдателя переключающего сигнала. Настоящая работа посвящена некоторым теоретическим вопросам, связанным с периодом квантования времени работы нейронаблюдателя.

DOI: 10.31857/S0374064123100096, EDN: OOCCAQ

**1. Постановка задачи.** Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{1}$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ – непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; $S_\tau$ – множество всех переключающих сигналов $\sigma$, для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше $\tau$ $(\tau > 0)$; $I$ – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1); $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ – композиция отображения $[A] : I \to \{[A_1], \ldots, [A_m]\}$ $([A_i] \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\mathbb{IR}^{n\times n}$ – множество всех квадратных интервальных матриц порядка $n)$ и переключающего сигнала $\sigma$, $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ – аналогичная композиция для отображения $[b] : I \to \{[b_1], \ldots, [b_m]\}$ $([b_i] \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbb{IR}^n$ – множество всех интервальных векторов размерности $n)$; пары интервальных матриц $([A_i], [b_i])$, $i = \overline{1, m}$, определяют режимы функционирования системы (1); $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ – управляющий вход.

Переключаемую интервальную систему (1) будем понимать как бесконечное семейство обычных переключаемых систем вида

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1x(t) + b_1u & \text{при } \sigma(t) = 1, \\ A_2x(t) + b_2u & \text{при } \sigma(t) = 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A_mx(t) + b_mu & \text{при } \sigma(t) = m, \end{cases} \tag{2}$$

где $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$ (здесь под включением понимается принадлежность каждого элемента матрицы $A_i$ либо столбца $b_i$ соответствующему промежутку – элементу интервальной матрицы $[A_i]$ либо интервального столбца $[b_i]$), $i = \overline{1, m}$, $\sigma \in S_\tau$. При этом если $t_0$, $t_1$, $\ldots$, $t_n$, $\ldots$ представляет собой последовательность моментов переключения, то $t_j - t_i \geqslant \tau$ для всех $j > i$.

Далее предполагаем, что переключающий сигнал не доступен для наблюдения.

**Задача.** Требуется стабилизировать систему (1) в нулевом положении равновесия, т.е. построить обратную связь $u = u(x)$ такую, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S_\tau$ и любых наборов $\{A_1, \ldots, A_m\}$ $(A_i \in [A_i])$, $\{b_1, \ldots, b_m\}$ $(b_i \in [b_i])$ норма $\|x(t)\|$ соответствующего решения системы (2), замкнутой этой обратной связью, стремится к нулю при $t \to \infty$.

При этом вектор-функция $x(t)$ определяется как решение линейной нестационарной системы с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma \in S_\tau,$$

где $A_{\sigma(t)} \in \{A_1, \ldots, A_m\}$, $b_{\sigma(t)} \in \{b_1, \ldots, b_m\}$. Далее для векторов будем использовать нормы $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$ или $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, а для матриц, соответственно, $\|A\| = \max\limits_i \sum_j |a_{ij}|$ или $\|A\|_2 = \sqrt{\max\limits_i s_i(A^*A)}$, где $s_i(A^*A)$ – собственные числа матрицы $A^*A$.

В работе [1] была рассмотрена подобная задача стабилизации для скалярной переключаемой линейной системы без интервальной неопределённости вида

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u, \quad \sigma \in S_\tau. \tag{3}$$

При этом для её решения был использован подход, заключающийся в построении регулятора переменной структуры (переключаемого регулятора)

$$u = u_\sigma(x), \tag{4}$$

каждый режим которого является стабилизирующей обратной связью $u = u_i(x)$ для, соответственно, $i$-го режима $\dot{x} = A_i x + b_i u$ переключаемой системы (3), т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = A_i x + b_i u_i(x).$$

Отметим, что в предположении полной управляемости пары $(A_i, b_i)$ стабилизирующую обратную связь для каждого режима системы (3) было предложено искать в форме линейной статической обратной связи $u = -k_i^{\mathrm{т}} x$. Известно [2, с. 249], что такая обратная связь всегда существует как решение задачи модального управления.

В настоящей статье для стабилизации системы (1) также предлагается использовать указанный подход и искать стабилизирующую обратную связь в виде переключаемого регулятора вида (4) с режимами в форме линейной статической обратной связи $(u = -k_i^{\mathrm{т}} x)$

$$u = -k_\sigma x, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{5}$$

где $k_\sigma = k \circ \sigma$ – композиция отображения $k : I \to \{k_1^{\mathrm{т}}, \ldots, k_m^{\mathrm{т}}\}$ $(k_i \in \mathbb{R}^n)$ и переключающего сигнала $\sigma$. Тогда система (1), замкнутая регулятором (4), будет иметь вид

$$\dot{x} = [A_\sigma]x - [b_\sigma]k_\sigma x, \quad \sigma \in S_\tau. \tag{6}$$

Теперь заметим, что при использовании переключаемого регулятора для стабилизации системы (1) необходимо решить две проблемы. Первая состоит в поиске для каждого интервального режима

$$\dot{x} = [A_i]x + [b_i]u$$

стабилизирующей линейной статической обратной связи $u = -k_i^{\mathrm{т}} x$, существование которой уже не гарантируется легко проверяемым критерием, как в случае обычных (не интервальных) линейных систем. Вместе с этим поиск стабилизирующей обратной связи для каждого режима переключаемой системы (1) неразрывно связан с решением вопроса об устойчивости этой системы, замкнутой соответствующим регулятором (5), поскольку известно, что устойчивость каждого замкнутого режима

$$\dot{x} = ([A_i]x - [b_i]k_i^{\mathrm{т}})x$$

системы (1) в отдельности ещё не является достаточным условием устойчивости замкнутой переключаемой системы (6).

Вторая проблема состоит в том, что для реализации указанного регулятора необходимо знать моменты переключения режимов и номера активных режимов в каждый момент времени, для того чтобы обеспечить синхронность переключений регулятора. Но, по условию, такая информация о переключаемой системе в режиме реального времени не доступна.

В п. 2 настоящей работы для решения первой проблемы предлагается использовать результаты статьи [3], позволяющие свести задачу нахождения стабилизирующей обратной связи для каждого интервального режима к решению системы линейных матричных неравенств, а для решения задачи устойчивости замкнутой системы (6) будет предложена методика получения оценок времени задержки $\tau$ для обеспечения устойчивости переключаемой интервальной системы с устойчивыми режимами на основе результатов работ [4, с. 64; 5, с. 88]. Решение второй проблемы основано на методе построения нейронаблюдателя переключающего сигнала, изложенного в статье [1], и представлено в пп. 3, 4.

**2. Выбор режимов переключаемого регулятора.** Зафиксируем произвольный номер $i \in I$ и рассмотрим задачу поиска параметров вектора $k_i \in \mathbb{R}^n$, обеспечивающего устойчивость любой системы из семейства

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_i^{\text{т}})x. \tag{7}$$

Для решения этой задачи может быть использован следующий подход. Для каждой интервальной матрицы $[A_i]$ построим множество вершинных матриц $A_{r,i}$ $(r = \overline{1, 2^{n^2}})$, т.е. таких матриц, элементы которых принимают только крайние значения (либо $\underline{a}_{ij}$, либо $\overline{a}_{ij}$) из соответствующих промежутков $[a]_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$. Аналогично строим множества вершинных векторов $b_{q,i}$ $(q = \overline{1, 2^n})$.

Далее в соответствии с методикой, изложенной в [3], по вершинным матрицам $A_{r,i}$ и векторам $b_{q,i}$ интервальных семейств $[A_i]$ и $[b_i]$ строятся специальные множества матриц $F_{l,i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и векторов $g_{l,i} \in \mathbb{R}^n$ $(l = \overline{1, \kappa}$, где $\kappa = 2^{n^2+n})$, после чего вектор обратной связи $k_i$ находим из системы линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} P_i F_{l,i}^{\text{т}} + F_{l,i} P_i + z_i g_{l,i}^{\text{т}} + g_{l,i} z_i^{\text{т}} < 0, \\ P_i > 0, \quad l = \overline{1, \kappa}. \end{cases} \tag{8}$$

Если $(z_i, P_i)$ – решение системы (8), то $k_i^{\text{т}} = -z_i^{\text{т}} P_i^{-1}$. При этом функция

$$V_i(x) = x^{\text{т}} P_i x$$

является общей квадратичной функцией Ляпунова для семейства систем (7).

Итак, пусть стабилизирующие обратные связи $u = -k_i^{\text{т}} x$ для каждого $i$-го режима системы (1) построены. Рассмотрим теперь вопрос об оценке времени задержки $\tau$, которое гарантирует устойчивость замкнутой системы (6) при любом $\sigma \in S_\tau$.

Зафиксируем номер $i \in \{1, \ldots, m\}$ и рассмотрим произвольную систему

$$\dot{x} = (A - bk_i^{\text{т}})x, \tag{9}$$

где $A \in [A_i]$, $b \in [b_i]$. В работе [3] показано, что матрица такой системы может быть представлена в виде

$$A - bk_i^{\text{т}} = \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i), \quad \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l = 1, \quad \lambda_l \geqslant 0, \tag{10}$$

где $\Psi_l^{(i)}(k_i) = F_{l,i} - g_{l,i} k_i^{\text{т}}$.

Пусть пара $(z_i, P_i)$ – решение системы (8). В [3] показано, что тогда для всех $l = \overline{1, \kappa}$ выполняется неравенство

$$(\Psi_l^{(i)}(k_i))^{\text{т}} Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i) < 0,$$

где $k_i^{\text{т}} = -z_i^{\text{т}} P_i^{-1}$, $Q_i = P_i^{-1}$. Отсюда и из (10) имеем

$$(A - bk_i^{\text{т}})^{\text{т}} Q_i + Q_i (A - bk_i^{\text{т}}) = \left(\sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i)\right)^{\text{т}} Q_i + Q_i \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\kappa} (\lambda_l (\Psi_l^{(i)}(k_i))^{\text{т}} Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i)) = -\sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l H_l^{(i)},$$

где $H_l^{(i)} = -((\Psi_l^{(i)}(k_i))^{\text{т}} Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i))$ – положительно определённые матрицы.

Таким образом,

$$(A - bk_i)^{\text{т}} Q_i + Q_i(A - bk_i) = -\sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l H_l^{(i)},$$

причём матрица $H^{(i)} = \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l H_l^{(i)}$ является положительно определённой. Отсюда получаем, что система (9) асимптотически устойчива, а в силу произвольности выбора матрицы $A$ и вектора $b$ получаем, что обратная связь $u = -k_i^{\text{т}} x$ обеспечивает устойчивость семейства замкнутых систем (7).

Далее пусть $h_{\min}^{(i)}$ – минимальное собственное значение матрицы $H^{(i)}$. Тогда имеем следующую цепочку соотношений:

$$h_{\min}^{(i)} = \min_{\|x\|_2=1} (x^{\text{т}} H^{(i)} x) = \min_{\|x\|_2=1} \left( x^{\text{т}} \left( \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l H_l^{(i)} \right) x \right) = \min_{\|x\|_2=1} \left( \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l (x^{\text{т}} H_l^{(i)} x) \right) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\|x\|_2=1} \left( \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l (h_l^{(i)} \|x\|_2^2) \right) \geqslant \min_{\|x\|_2=1} \left( \|x\|_2^2 \left( \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l h_l^{(i)} \right) \right) = \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l h_l^{(i)}, \qquad (11)$$

где $h_l^{(i)}$ – минимальные собственные значения матриц $H_l^{(i)}$. Обозначим $\mu_i = \min\limits_l h_l^{(i)}$. Тогда из (11) получаем

$$h_{\min}^{(i)} \geqslant \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l h_l^{(i)} \geqslant \mu_i \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l = \mu_i,$$

т.е.

$$h_{\min}^{(i)} \geqslant \mu_i. \qquad (12)$$

В соответствии с [4, с. 56] для любого решения $x(t)$ системы (9) выполнено неравенство

$$\|x(t)\|_2 \leqslant c_i e^{-\theta_i(t-s)} \|x(s)\|_2, \quad t \geqslant s \geqslant 0,$$

где $c_i = \sqrt{M_i/m_i}$, $\theta_i = h_{\min}^{(i)}/(2M_i)$, а $m_i$ и $M_i$ – соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы $Q_i$. В силу (12)

$$e^{-\theta_i(t-s)} \leqslant e^{-\nu_i(t-s)} \quad \text{при} \quad t > s \geqslant 0,$$

где $\nu_i = \mu_i/(2M_i)$, а тогда для любого решения $x(t)$ системы (9) получаем

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{n} \|x(t)\|_2 \leqslant c_i \sqrt{n} e^{-\nu_i(t-s)} \|x(s)\|_2 \leqslant c_i \sqrt{n} e^{-\nu_i(t-s)} \|x(s)\| \quad \text{при} \quad t > s \geqslant 0.$$

Обозначив $c_{ii} = c_i \sqrt{n}$, $\alpha_{ii} = -\nu_i$, запишем последнее неравенство в виде

$$\|x(t)\| \leqslant c_{ii} e^{\alpha_{ii}(t-s)} \|x(s)\|, \quad t \geqslant s \geqslant 0. \qquad (13)$$

На основании изложенного выше и достаточного условия устойчивости переключаемой линейной системы, полученного в работе [5], справедлива

**Теорема 1.** *Пусть для переключаемой интервальной линейной системы (1) при любом* $i \in I$ *совместна система линейных матричных неравенств (8) и* $(z_i, P_i)$ *– её соответствующее решение. Тогда переключаемый регулятор*

$$u = -k_\sigma x, \quad k_i^{\text{т}} = -z_i^{\text{т}} P_i^{-1}, \quad \sigma \in S_\tau, \qquad (14)$$

*стабилизирует систему (1) при*

$$\tau > \frac{2 \ln c}{|\alpha|},$$

*где* $c = \max\limits_i c_{ii}$, $\alpha = \max\limits_i \alpha_{ii}$.

**3. Построение нейронаблюдателя режимов замкнутой переключаемой системы.** Как уже было упомянуто выше, отсутствие информации о значении переключающего сигнала в процессе функционирования переключаемой системы не даёт возможности непосредственно использовать переключаемый регулятор (14). Для того чтобы обеспечить синхронность переключений самой системы и регулятора, необходимо построить наблюдатель, который бы формировал в каждый момент времени оценку переключающего сигнала $\sigma(t)$. В настоящей работе, как и в статье [1], предлагается строить оценку переключающего сигнала на основе нейросетевого подхода, который заключается в том, что в качестве упомянутого выше наблюдателя режимов используется нейронная сеть. Считаем, что выходом такой нейросети является оценка $\hat\sigma(t)$ недоступного для измерения переключающего сигнала $\sigma(t)$. При этом регулятор переменной структуры будет иметь вид

$$u = -k_{\hat\sigma}x, \tag{15}$$

где $\hat\sigma(t)$ – оценка переключающего сигнала, $\hat\sigma(t)\in\{1,\ldots,m\}$, а векторы $k_i\in\mathbb{R}^n$ выбираются из условий устойчивости семейств матриц $[A_i]-[b_i]k_i$.

Пара – переключаемый регулятор и нейронная сеть – в [1] была названа *нейрорегулятором.* Систему (1), замкнутую нейрорегулятором, можно представить переключаемой системой следующего вида:

$$\dot x = ([A_\sigma]-[b_\sigma]k_{\hat\sigma})x, \quad \sigma\in S_\tau, \quad \hat\sigma\in[S]_{\varepsilon_p}, \tag{16}$$

где $\varepsilon_p=\tau/p$ – достаточно малая положительная константа, $p\in\mathbb{N}$ – некоторый фиксированный параметр алгоритма наблюдения, $[S]_{\varepsilon_p}$ – множество переключающих сигналов, для которых моменты переключений принадлежат множеству $\{l\varepsilon_p,\ l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}\}$. Перенумеруем (от 1 до $m^2$) все возможные режимы

$$\dot x = ([A_i]-[b_i]k_j)x, \quad i,j=\overline{1,m},$$

переключаемой системы (16), присвоив каждому $(ij)$-му режиму соответствующий номер $s=$ $=(i-1)m+j$. Введём функцию $\xi:\{1,\ldots,m^2\}\to\{1,\ldots,m\}$, отображающую каждый номер $s$ в соответствующий ему индекс $i$, т.е. $\xi(s)=i$.

Как и в случае построения нейронаблюдателя для переключающего сигнала обычной переключаемой системы, рассмотренной в [1], работа нейронной сети в качестве наблюдателя переключающего сигнала для переключаемой интервальной системы (1) также осуществляется в процессе функционирования системы и состоит в том, что для заданной дискретной последовательности моментов времени $l\varepsilon_p$, $l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, по каждой паре измерений вектора состояния $(x(l\varepsilon_p),x((l+1)\varepsilon_p))$ нейронная сеть в момент времени $t=(l+1)\varepsilon_p$ должна определять номер $s$ текущего режима переключаемой системы (16). Также как и в [1] обозначим выход нейросети в момент $l\varepsilon_p$ через $N[l\varepsilon_p]$. На основе данной информации оценка $\hat\sigma[l\varepsilon]$ переключающего сигнала $\sigma(t)$ строится следующим образом:

$$\hat\sigma(t)\equiv\xi(N[l\varepsilon_p]) \quad \text{при} \ \ t\in[l\varepsilon_p,(l+1)\varepsilon_p), \quad l\in\mathbb{N}. \tag{17}$$

В результате переключение векторов $k_i$ стабилизирующей обратной связи задаёт переключающий сигнал (17) с некоторым заданным начальным условием $\hat\sigma(0)=\hat\sigma_0$ $(\hat\sigma_0\in\{1,\ldots,m\})$. Описанный наблюдатель далее обозначаем через $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$. По аналогии с [1] введём дискретную ошибку оценивания $e_\sigma[l\tau]$ $(l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\})$ сигнала $\sigma(t)$:

$$e_\sigma[l\tau]=\max_{i=\overline{0,l-1}}\mu_{i\tau}^{(i+1)\tau},$$

где $\mu_{i\tau}^{(i+1)\tau}$ – количество промежутков вида $[j\varepsilon_p,(j+1)\varepsilon_p)\subset[i\tau,(i+1)\tau]$, для которых $\sigma(t)\not\equiv$ $\not\equiv\hat\sigma(j\varepsilon_p)$.

Заметим, что построение описанного нейронаблюдателя для переключаемой интервальной системы является существенно более сложной задачей по сравнению с обычной системой, рассмотренной в статье [1], поскольку в данном случае каждый режим, по сути, представляет собой континуальное семейство систем, в связи с чем теперь речь идёт о распознавании с помощью нейросети различных семейств линейных динамических систем.

**4. Квантование времени работы наблюдателя переключающего сигнала.** Одной из основных проблем обеспечения работоспособности переключаемого регулятора (15) является правильный выбор величины $\varepsilon_p$ (периода срабатывания нейронаблюдателя). Учитывая, что режимы регулятора (15) могут переключаться только в дискретные моменты времени $t = l\varepsilon_p$ и при этом ещё могут возникать ошибки в распознавании режимов замкнутой системы (16), практически неизбежно будут возникать неустойчивые режимы на промежутках времени, длина которых будет зависеть от величины $\varepsilon_p$. И для того чтобы при этом обеспечить стремление нормы решения к нулю, необходимо рассчитать "правильное" значение величины $\varepsilon_p$ в зависимости от возможной ошибки оценивания переключающего сигнала и от величины задержки $\tau$. Решим этот вопрос.

Итак, для каждого замкнутого режима

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_j)x, \quad i \neq j, \tag{18}$$

построим интервальное расширение

$$\dot{x} = [\Lambda_{ij}]x, \quad [\Lambda_{ij}] = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n} : |\Lambda - \Lambda^\circ_{ij}| \leqslant \triangle\Lambda_{ij}\}, \tag{19}$$

где $\Lambda^\circ_{ij}$ – центральный элемент интервального семейства, $\triangle\Lambda_{ij}$ – размах интервальной неопределённости и $A_i - b_ik_j \in [\Lambda_{ij}]$ для любых $A \in [A_i]$ и $b \in [b_i]$. Знаки модуля $|\cdot|$ и неравенства $\leqslant$ относительно матриц далее понимаем поэлементно.

Рассмотрим следующие системы:

$$(\Sigma_1) \ \ \dot{x} = \Lambda^\circ_{ij}x,$$

$$(\Sigma_2) \ \ \dot{x} = (|\Lambda^\circ_{ij}| + \triangle\Lambda_{ij})x,$$

$$(\Sigma_3) \ \ \dot{x} = |\Lambda^\circ_{ij}|x.$$

Пусть $J^{(l)}_{ij}$ – жорданова нормальная форма (ЖНФ) для матрицы системы $\Sigma_l$, $r^{(l)}_{ij}$ – размер максимальной клетки Жордана для $J^{(l)}_{ij}$, $M^{(l)}_{ij}$ – соответствующая матрица преобразования к ЖНФ $J^{(l)}_{ij}$. Обозначим

$$\alpha^{(l)}_{ij} = \max_{\lambda^{(ijl)}_k \in \operatorname{Spec} J^{(l)}_{ij}} \operatorname{Re}\lambda^{(ijl)}_k, \quad c^{(l)}_{ij} = \|(M^{(l)}_{ij})^{-1}\|\|(M_{ij})^{(l)}\|, \quad P^{(1)}_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{r^{(l)}_{ij}-1}\frac{t^k}{k!}.$$

Тогда, в соответствии с [6, с. 57], для норм матриц Коши систем $\Sigma_l$, $l = 1, 2, 3$, выполняются оценки

$$\|e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)}\| \leqslant c^{(1)}_{ij}e^{\alpha^{(1)}_{ij}(t-s)}P^{(1)}_{ij}(t-s),$$

$$\|e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)}\| \leqslant c^{(2)}_{ij}e^{\alpha^{(2)}_{ij}(t-s)}P^{(2)}_{ij}(t-s),$$

$$\|e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}\| \leqslant c^{(3)}_{ij}e^{\alpha^{(3)}_{ij}(t-s)}P^{(3)}_{ij}(t-s) \tag{20}$$

при любых $t > s \geqslant 0$.

Пусть теперь $\Lambda$ – некоторая произвольная матрица из семейства $[\Lambda_{ij}]$. Тогда, в соответствии с [7, с. 88], для матрицы Коши системы

$$\dot{x} = \Lambda x \tag{21}$$

при любых $t > s \geqslant 0$ имеем следующую оценку:

$$|e^{\Lambda(t-s)} - e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)}| \leqslant e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}$$

или

$$e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)} - e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)} + e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)} \leqslant e^{\Lambda(t-s)} \leqslant e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)} + e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}.$$

Отсюда для любого решения системы (21) справедлива оценка

$$\|x(t)\| = \|e^{\Lambda(t-s)}x(s)\| \leqslant \|e^{\Lambda(t-s)}\|\|x(s)\| \leqslant \|e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)} + e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}\|\|x(s)\|.$$

Учитывая (20) и неравенство

$$\|e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)} - e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)} + e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}\| \leqslant \|e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)}\| + \|e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)}\| + \|e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}\|,$$

получаем

$$\|x(t)\| \leqslant \left(\sum_{l=1}^{3} c^{(l)}_{ij} e^{\alpha^{(l)}_{ij}(t-s)} P^{(l)}_{ij}(t-s)\right)\|x(s)\|, \quad t > s \geqslant 0.$$

Введём обозначения

$$c_{ij} = 3\max\{c^{(1)}_{ij}, c^{(2)}_{ij}, c^{(3)}_{ij}\}, \quad \alpha_{ij} = \max\{\alpha^{(1)}_{ij}, \alpha^{(2)}_{ij}, \alpha^{(3)}_{ij}\}, \quad r_{ij} = \max\{r^{(1)}_{ij}, r^{(2)}_{ij}, r^{(3)}_{ij}\}$$

и окончательно будем иметь

$$\|x(t)\| \leqslant c_{ij} e^{\alpha_{ij}(t-s)} P_{ij}(t-s)\|x(s)\|, \quad t > s \geqslant 0, \tag{22}$$

где $P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{r_{ij}-1} t^k/k!$. И поскольку каждая система семейства (18) принадлежит также семейству (19), то для любого решения режима (18) верна та же оценка (22). Обозначим

$$\rho = \max_{i\neq j} \alpha_{ij}, \quad \beta = \max_{i\neq j} c_{ij}, \quad r = \max_{i\neq j} r_{ij}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\rho > 0$.

Основываясь теперь на неравенствах (13), (22) и основном результате работы [1], сформулируем достаточное условие устойчивости замкнутой системы (16).

**Теорема 2.** *Пусть для замкнутой системы (16) при любом переключающем сигнале* $\sigma \in S_\tau$ *и любом начальном условии* $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *наблюдатель* $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ *генерирует оценку* $\hat{\sigma} \in [S]_{\varepsilon_p}$ *с ошибкой, удовлетворяющей условию*

$$e_\sigma[l\tau] \leqslant \theta$$

*для некоторого* $\theta \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \theta \leqslant [p/2]$.

*Тогда если*

$$\tau > \frac{2\ln h}{|\alpha|},$$

*где* $h = c^{\theta+2}\beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}$, *то для любого начального условия* $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *и любого переключающего сигнала* $\sigma \in S_\tau$ *норма соответствующего решения системы (16) стремится к нулю:*

$$\|x(t)\| \to 0, \quad t \to \infty.$$

*Здесь* $P(t) = \sum_{k=0}^{r-1} t^k/k!$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М.* Теоретические аспекты построения нейрорегулятора для переключаемых систем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1548–1556.
2. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976.
3. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М.* Достаточные условия существования стабилизирующих регуляторов для переключаемых интервальных систем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 534–544.
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М., 2014.
5. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* Сверхстабилизация линейных динамических объектов при действии операторных возмущений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 7. С. 865–876.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
7. *Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В.* Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. М., 2006.


Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 07.06.2023 г.
После доработки 26.07.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.