ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1438–1440

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

О КРАТНОМ СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТОМ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

© 2023 г. Н. Ю. Капустин

Рассматривается задача для уравнения Бесселя целого порядка с комплексным физическим и спектральным параметрами в граничном условии. Спектральный параметр в граничное условие входит квадратично. Изучается вопрос базисности системы собственных функций в случае появления кратного собственного значения.

DOI: 10.31857/S0374064123100114, EDN: OOJKGO

1. Постановка задачи. В работе [1] рассмотрена спектральная задача для уравнения Бесселя целого порядка

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\biggl(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\biggr)R(r)=0,\quad 0<r<1, \tag{1}$$

с граничным условием

$$R'(1)=d\lambda^2R(1). \tag{2}$$

В предположении ограниченности решений уравнения (1) получена система собственных функций

$$R_k(r)=J_n(\sqrt{\lambda_k}r),\quad k\in\mathbb{N},$$

отвечающих собственным значениям λ_k – корням характеристического уравнения

$$J_n'(\sqrt{\lambda})=d(\sqrt{\lambda})^3J_n(\sqrt{\lambda}). \tag{3}$$

Для всех собственных значений задачи будем считать выполненным условие

$$-\pi/2<\arg\sqrt{\lambda_k}\leqslant\pi/2,\quad k\in\mathbb{N}.$$

2. Основные результаты. Получено уравнение

$$-4zJ_n(z)J_n'(z)+n^2J_n^2(z)=z^2[J_n^2(z)+(J_n'(z))^2] \tag{4}$$

для кратных корней уравнения (3) и доказана их простота при $n\neq 0$ (случай $n=0$ достаточно подробно изучен в статье [2] и на нём здесь мы останавливаться не будем).

Доказано следующее утверждение: если $d\notin\{J_n'(z)J_n(z)/z^3\}$, где z – любой корень уравнения (4), то система

$$\{\sqrt{r}R_k(r)=\sqrt{r}J_n(\sqrt{\lambda_k}r)\},\quad k=1,2,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m-1,m+1,\ldots,$$

собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель, без любых двух собственных функций с номерами l и m является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Биортогонально сопряжённая к этой системе система $\{\sqrt{r}W_k(r)\}$ определяется по формуле

$$\overline{W_k(r)}=A_k^{-1}\biggl[J_n(\sqrt{\lambda_k}r)-\frac{(\lambda_k-\lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_l-\lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_l})}J_n(\sqrt{\lambda_l}r)-\frac{(\lambda_k-\lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_m-\lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_m})}J_n(\sqrt{\lambda_m}r)\biggr],$$

где

$$A_k = \int\limits_0^1 rJ_n^2(\sqrt{\lambda_k}r)\,dr + 2d\lambda_k J_n^2(\sqrt{\lambda_k}) =$$

$$= \left(\frac{d^2\lambda_k^3 + 1 - n^2/\lambda_k}{2}\right)J_n^2(\sqrt{\lambda_k}) + 2d\lambda_k J_n^2(\sqrt{\lambda_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m-1, m+1, \ldots$$

Рассмотрим случай появления кратного спектра. Имеют место утверждения.

Теорема 1. *Если $d = J_n'(z)J_n(z)/z^3$, где комплексное число z – любой корень уравнения (4), то система $\{\sqrt{r}R_k(r)\}$, $k = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots$, собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель, без одной собственной функции с номером l, соответствующей кратному собственному значению $\lambda_l = z^2$, является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Биортогонально сопряжённая к этой системе система $\{\sqrt{r}V_k(r)\}$ определяется по формуле*

$$\overline{V_k(r)} = A_k^{-1}\left[J_n(\sqrt{\lambda_k}r) - \frac{(\lambda_l - \lambda_k)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{J_n(\sqrt{\lambda_l})}Z_l(r) - \left(1 - \frac{(\lambda_l - \lambda_k)Z_l(1)}{J_n(\sqrt{\lambda_l})}\right)\frac{J_n(\sqrt{\lambda_k})}{J_n(\sqrt{\lambda_l})}J_n(\sqrt{\lambda_l}r)\right],$$

где

$$Z_l(r) = \frac{r}{4\sqrt{\lambda_l}}[J_{n+1}(\sqrt{\lambda_l}r) - J_{n-1}(\sqrt{\lambda_l}r)].$$

Теорема 2. *Если $d = J_n'(z)J_n(z)/z^3$, где комплексное число z – любой корень уравнения (4), то система $\{\sqrt{r}R_k(r)\}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots$, собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель, без одной собственной функции $R_m(r)$, соответствующей простому собственному значению λ_m, при наличии кратного корня $\lambda_l = z^2$, $m \neq l$, образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Биортогонально сопряжённая к этой системе система $\{\sqrt{r}V_k(r)\}$ определяется по формулам*

$$\overline{V_l(r)} = A_l^{-1}\left[Z_l^\alpha(r) - \frac{Z_l^\alpha(1)}{J_n(\sqrt{\lambda_m})}J_n(\sqrt{\lambda_m}r)\right],$$

$$\overline{V_k(r)} = A_k^{-1}\left[J_n(\sqrt{\lambda_k}r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_l - \lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_l})}J_n(\sqrt{\lambda_l}r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_m - \lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_m})}J_n(\sqrt{\lambda_m}r)\right], \quad k \neq l,$$

где

$$Z_l^\alpha(r) = \frac{r}{4\sqrt{\lambda_l}}[J_{n+1}(\sqrt{\lambda_l}r) - J_{n-1}(\sqrt{\lambda_l}r)] + \alpha J_n(\sqrt{\lambda_l}r), \quad Z_l^\alpha(1) = \frac{J_n(\sqrt{\lambda_l})}{\lambda_l - \lambda_m},$$

$$A_l = \int\limits_0^1 rZ_l^\alpha(r)J_n(\sqrt{\lambda_l}r)dr + d(\lambda_l + \lambda_m)Z_l^\alpha(1)J_n(\sqrt{\lambda_l}) = -\left(2d + d^2\lambda_l^2 + \frac{1}{4\lambda_l}\right)J_n^2(\sqrt{\lambda_l}).$$

Доказательство этих теорем проводится по схемам, разработанным в [3, 4] с использованием результатов работ [5, 6]. Построение биортогонально сопряжённой системы основано, в свою очередь, на формулах

$$\int\limits_0^1 rJ_n(\sqrt{\lambda_m}r)J_n(\sqrt{\lambda_k}r)dr + d(\lambda_m + \lambda_k)J_n(\sqrt{\lambda_m})J_n(\sqrt{\lambda_k}) = 0,$$

$$\int\limits_0^1 rJ_n(\sqrt{\lambda_m}r)Z_l(r)dr + d(\lambda_m + \lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_m})Z_l(1) - dJ_n(\sqrt{\lambda_m})J_n(\sqrt{\lambda_l}) = 0,$$

в которых λ_m, λ_k и λ_l – различные собственные значения задачи (1), (2), причём λ_l – кратный корень.

Функция $Z_l(r)$ – это присоединённая функция для собственной функции $R_l(r) = J_n(\sqrt{\lambda_l}r)$ с кратным собственным значением. Действительно, пусть z – любой корень уравнения (4), $d = J_n'(z)J_n(z)/z^3$, $\lambda_l = z^2$. Рассмотрим задачу для присоединённой функции

$$Z_l''(r) + \frac{1}{r}Z_l'(r) + \left(\lambda_l - \frac{n^2}{r^2}\right)Z_l(r) = R_l(r), \quad 0 < r < 1, \tag{5}$$

$$Z_l'(1) = d\lambda_l^2 Z_l(1) - 2d\lambda_l R_l(1). \tag{6}$$

Решением задачи (5), (6) является корневая функция

$$Z_l^\alpha(r) = \frac{r}{4\sqrt{\lambda_l}}[J_{n+1}(\sqrt{\lambda_l}r) - J_{n-1}(\sqrt{\lambda_l}r)] + \alpha J_n(\sqrt{\lambda_l}r),$$

где α – любое комплексное число.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российский Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капустин Н.Ю.* О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1715–1718.
2. *Moiseev E.I., Moiseev T.E., Kapustin N.Yu.* On the multiple spectrum of a problem for the Bessel equation // Integral Transforms and Special Functions. 2020. V. 31. № 12. P. 1020–1024.
3. *Капустин Н.Ю., Моисеев Т.Е.* О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1426–1430.
4. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
5. *Капустин Н.Ю.* О классической задаче с комплекснозначным коэффициентом и спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 701–706.
6. *Капустин Н.Ю.* О двух спектральных задачах с одним характеристическим уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 962–964.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.
После доработки 30.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.