ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1462–1470

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. В. С. Мокейчев, А. М. Сидоров

Предлагается новый подход к вопросу разрешимости как обыкновенных уравнений, так и с частными производными, в теории линейных дифференциальных уравнений, а также в теории интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123110031, EDN: PDRKWE

Введение. Пусть X и Y – векторные пространства, которые оба являются либо вещественными, либо комплексными, A – линейный оператор, определённый на линеале $D(A)\subset X$, с множеством значений $R(A)\subset Y$. Рассмотрим линейное уравнение

$$Ax=y, \tag{1}$$

где y – заданный элемент пространства Y, а x – искомый элемент из $D(A)$, и введём понятие его решения.

Элемент $x\in D(A)$ называется *решением уравнения* (1), где $y\in R(A)$, если Ax и y совпадают как элементы из пространства Y.

При таком подходе к понятию решения следует ответить на два вопроса: при каких ограничениях на оператор A

1) у уравнения (1) не может быть двух решений;

2) уравнение (1) имеет решение при каждом $y\in Y$?

Ответы на эти два вопроса – суть общей теории разрешимости уравнений.

Для дифференциальных уравнений с частными производными часто не удаётся ввести удовлетворительное понятие решения. М. Громов отметил [1]: “Классическая теория уравнений в частных производных уходит корнями в физику, где, как считается, эти уравнения описывают законы природы. “Законопослушные” функции, удовлетворяющие таким уравнениям, весьма редки в пространстве всех “допустимых” функций (независимо от выбора топологии в рассматриваемом функциональном пространстве)”.

Пусть математическая модель физического процесса описывается уравнением

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha(t)D^\alpha u=f(t),\quad t\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\ldots\alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_k=\partial/\partial x_k$.

Классическим решением уравнения (2) называется функция u, имеющая непрерывные частные производные $D^\alpha u$ при $|\alpha|\leqslant m$ и обращающая уравнение в тождество.

Многие задачи математической физики требуют расширения понятия решения, поскольку из физических соображений следует, что искомые функции не имеют необходимого числа производных. Это привело к понятию обобщённого решения [2]. Существуют дифференциальные уравнения, не имеющие и обобщённого решения. Например, математическая модель вынужденных 2π-периодических колебаний закреплённой на концах отрезка $[0,\pi]$ струны имеет вид

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(t,x),\quad (t,x)\in\Omega=\mathbb{R}\times[0,\pi],$$

$u,u_t,f(t,x)\in L_1^2(\Omega)$ – 2π-периодические по t функции, $u(t,0)=u(t,\pi)=0$. В работе [3] показано, что эта модель имеет или не имеет обобщённого решения при каждой функции

$f(t,x)$ в зависимости от того, не является или является c числом Лиувилля, что отражает сложность рассматриваемого процесса.

Предлагается идея: записывается счётная система $\phi = \{\phi_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ элементов, имеющая в некотором векторном пространстве H_1 со скалярным произведением $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_1$ биортогональную систему $\phi^* = \{\phi_p^*,\ p \in \mathbb{N}\}$, причём в некотором векторном пространстве H_2 со скалярным произведением $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_2$ системы $A\phi = \{A\phi_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ и $(A\phi)^* = \{(A\phi_p)^*,\ p \in \mathbb{N}\}$ биортогональны. Если существуют пространства X и Y, в которых сходятся ряды $\sum_p a_p\phi_p$, $\sum_p a_p A\phi_p$, где a_p – числа и x, y – соответствующие их суммы, то элемент x следует называть *решением уравнения* (1); так как это решение определяется множеством ϕ, то естественно назвать его *ϕ-решением.*

На первой стадии разработки теории разрешимости возникает вопрос: в каких случаях можно построить пространства X и Y, в которых при всех a_p, b_p, $p \in \mathbb{N}$, сходились бы ряды $\sum_p a_p\phi_p$ и $\sum_p b_p A\phi_p$? Эту идею удалось реализовать в статьях [4–6].

Было построено полное топологическое векторное пространство D'_ϕ, элементы u которого и только они представимы в виде $u = \sum_p a_p\phi_p$, и доказано, что уравнение (1) имеет ϕ-решение, если $y = \sum_p b_p A\phi_p$.

Отметим, что в работе [7] вводится самый широкий класс обобщённых периодических функций, который можно отождествить с множеством формальных тригонометрических рядов. Предложенный там подход является частным случаем разработанного нами подхода.

Введение пространства D'_ϕ позволило значительно расширить множество разрешимых дифференциальных уравнений, в том числе и тех, которые не имели обобщённых решений. В частности, упомянутая выше задача о колебании струны при иррациональном c однозначно разрешима в пространстве D'_ϕ [5], т.е. она однозначно разрешима при $f \in D'_\phi$ и

$$\phi = \{\exp(ik_1t)\sin(k_2x),\quad k_1 \in \mathbb{Z},\quad k_2 \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидны и недостатки.

1. Если систему ϕ мы выбираем сами, то ничто не мешает выбрать её так, что выполнится не только биортогональность, но и равенство $\phi = \phi^*$, существование у $A\phi$ биортогональной $(A\phi)^*$ в общем случае под вопросом.

2. Если элемент y задан, то возможно ли равенство $y = \sum_p b_p\phi_p$?

3. Не решены вопросы регулярности ϕ-решения.

Поэтому ниже приводится новый подход (при введённом понятии решения) к вопросу разрешимости дифференциальных уравнений. Разработанный метод универсален в том смысле, что применим к линейным уравнениям разных типов (скалярным, матричным, дифференциальным, интегральным, алгебраическим, функциональным, с отклонениями и без отклонений аргументов и многим другим), что будет показано на конкретных типах уравнений.

1. Абстрактные результаты.

1.1. Известные результаты, гарантирующие разрешимость уравнения (1). Пусть A отображает конечномерное линейное пространство L^m в конечномерное линейное пространство L^n. С помощью базисов $e_{(1)}$ в L^m и $e_{(2)}$ в L^n уравнение преобразуется к системе уравнений $A_0u = v$, в которой A_0 – прямоугольная числовая матрица размерности $m \times n$ и справедлива

Теорема 1 [8, с. 49]. *Уравнение (1) разрешимо (однозначно) тогда и только тогда, когда совпадают ранги матриц A_0 и расширенной $(A_0|y)$ (в системе $A_0e_{(1)}$ – линейно независимые элементы).*

Проблема разрешимости резко усложняется тогда, когда либо m, либо n, либо и m и n одновременно равны $+\infty$. Хотя и в этом случае часто уравнение $Ax = y$ можно преобразовать в систему $A_0u = v$, однако матрица A_0 окажется бесконечномерной и неизвестно, будет ли справедлива теорема 1.

Пусть A – линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения и замкнутым в банаховом пространстве Y множеством значений $R(A)$. Пусть A^* – оператор, сопряжённый к A, с областью определения $D(A^*)$, $N(A^*) = \{\psi \in D(A^*),\ \ A^*\psi = 0\}$.

Теорема 2 [9, с. 229]. *1. Если* $N(A^*)=\{0\}$, *то* $R(A)=Y$.

2. Если $N(A^*)\neq\{0\}$, *то для разрешимости уравнения* $Ax=y$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\langle y,\psi\rangle=0$ *для всех решений уравнения* $A^*\psi=0$.

Здесь и далее через 0 обозначаем число нуль, нулевой вектор, нулевую матрицу, нулевой элемент. По смыслу всегда будет понятно, что подразумевается под записью 0. В случае конкретных пространств X теоремы о разрешимости выглядят проще.

Теорема 3 [10, с. 44]. *Пусть* X *– полное метрическое пространство с метрикой* ρ *и оператор* $A:X\to X$ *таков, что для всех* $x,y\in X$ $\rho(Ax,Ay)\leqslant\alpha\rho(x,y)$, *где* $\alpha<1$ *и не зависит от* x *и* y. *Тогда уравнение* $Ax=x$ *имеет одно и только одно решение* x.

Теорема 4 [11, с. 37]. *Пусть* X *– банахово пространство,* A *– вполне непрерывный оператор, отображающий ограниченное замкнутое выпуклое множество* $\Omega\subset X$ *в себя. Тогда уравнение* $Ax=x$ *имеет решение* $x\in\Omega$.

Мы привели эти известные теоремы для полноты изложения.

1.2. Пространства, в которых заданный набор линейно независимых элементов образует ортогональный базис. Пусть L – векторное пространство, $g=\{g_p\in L,\ \ p\in N\subset\mathbb{Z}^n\}$ и $L_g=\{\sum_{|p|=0}^M c_pg_p,\ \ c_p\in\mathbb{C},\ \ M\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}\}$ – линейная оболочка множества g. Здесь и далее $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{Z}^n$ – множество всех n-мерных векторов $p=(p_1,\ldots,p_n)$ с целочисленными координатами, $|(p_1,\ldots,p_n)|=|p_1|+\cdots+|p_n|$, $\sum_{|p|=0}^M(\cdot)$ означает, что суммирование производится по всем $p\in N$, для которых $|p|\leqslant M$. Всюду $\mu=\{\mu_p\neq 0,\ \ p\in N\}$.

На первом этапе предполагаем, что в множестве g элементы линейно независимы, т.е. при каждом M из условия $\sum_{|p|=0}^M c_pg_p=0$ следует, что $c_p=0$ при всех p. Элементы $u\in L_g$, $v\in L_g$ однозначно представимы в виде $u=\sum u_pg_p$, $v=\sum v_pg_p$, причём в множествах $\{u_p\}$, $\{v_p\}$ имеется конечное количество ненулевых чисел. Поэтому $\langle u,v\rangle_\mu=\sum|\mu_p|^2u_p\bar{v}_p$ – скалярное произведение в L_g и $(\langle u,u\rangle_\mu)^{1/2}=\|u\|_\mu$ – норма элемента u. Итак, L_g – предгильбертово пространство.

Пополнение L_g с нормой $\|\cdot\|_\mu$ до гильбертова пространства обозначим $H_\mu(g)$. Итак, $f\in H_\mu(g)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $u_m\in L_g$ такая, что $\|f-u_m\|_\mu\to 0$ при $m\to+\infty$.

Так как $\langle g_p,g_r\rangle_\mu=0$ при $p\neq r$ и $\langle g_p,g_p\rangle_\mu=|\mu_p|^2$, то

$$\{\mu_p^{-1}g_p,\ p\in N\}\ \text{– ортонормированный базис в } L_g. \tag{3}$$

Если дополнительно не оговорено, то в дальнейшем суммирование проводится по $p\in N$.

Теорема 5. *(3) – ортонормированный базис в пространстве* $H_\mu(g)$.

Доказательство. Пусть $f\in H_\mu(g)$. Существуют $f_m=\sum f_{m,p}\mu_p^{-1}g_p\in L_g$, при которых $\|f-f_m\|_\mu\to 0$ при $m\to+\infty$, $\lim\limits_{m\to+\infty}\|f_m\|_\mu=\|f\|_\mu$. В силу (3) имеем

$$\|f_{m_1}-f_{m_2}\|_\mu^2=\sum|f_{m_1,p}-f_{m_2,p}|^2\to 0$$

при $m_1\geqslant m_2\to+\infty$. Поэтому существуют f_p, для которых $\sum|f_{m,p}-f_p|^2\to 0$ при $m\to+\infty$.

Составим ряд $\sum f_p\mu_p^{-1}g_p$ и его частные суммы $S_m=\sum_{|p|\leqslant m}f_p\mu_p^{-1}g_p$. Ввиду (3)

$$\|f_m-S_m\|_\mu^2=\sum|f_{m,p}-f_p|^2\to 0,$$

если $m\to+\infty$. Тогда

$$\|f-S_m\|_\mu\leqslant\|f-f_m\|_\mu+\|f_m-S_m\|_\mu\to 0$$

при $m\to+\infty$. Это означает, что ряд $\sum f_p\mu_p^{-1}g_p$ сходится по норме к элементу f. Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 5 следует, что ряд $\sum a_p\mu_p^{-1}g_p$ сходится в $H_\mu(g)$ по норме тогда и только тогда, когда $\sum |a_p|^2 < +\infty$; если $f \in H_\mu(g)$, $f_p = \langle f, \mu_p^{-1}g_p\rangle_\mu$, то $\sum |f_p|^2 < +\infty$, $f = \sum f_p\mu_p^{-1}g_p$, в частности, f – нулевой элемент в $H_\mu(g)$, т.е. $f_p = 0$ при всех $p \in N$. Если $h \in H_\mu(g)$ и $\hat{\mu}_p \leqslant c_1\mu_p$ при всех достаточно больших $|p|$, где c_1 не зависит от p, то $h \in H_{\hat{\mu}}(g)$.

Обозначим $H(g) = \bigcup_\mu H_\mu(g)$. Элементы из $H(g)$ называем *g-распределениями.*

Определение 1. Ряд $\sum b_pg_p$ *сходится в пространстве* $H(g)$, если существует μ, при котором ряд сходится в $H_\mu(g)$ по норме.

Теорема 6. *Все ряды* $\sum b_pg_p$ *сходятся в пространстве* $H(g)$.

Доказательство. Если $\sum |b_p|^2|\mu_p|^2 < +\infty$, то ряд сходится в силу замечания 1. Убедимся в том, что эта оценка выполняется при некотором μ. Положим $\mu_p = x_p|b_p|^{-1}$, если $b_p \neq 0$, $\mu_p = x_p$ в случае $b_p = 0$, где $x_p \neq 0$, $\sum |x_p|^2 < +\infty$. Так как $|b_p\mu_p| \leqslant |x_p|$, то $\sum |b_p|^2|\mu_p|^2 < < +\infty$.

Очевидно, что если множество $\hat{g} = \{\hat{g}_p,\ p \in N_1\}$ состоит из линейно независимых элементов и $g \subset \hat{g}$, то $H_\mu(g) \subset H_\mu(\hat{g})$. Теорема доказана.

На втором этапе построим пространство $X(g)$, в котором сходятся все ряды

$$\sum_{p\in N} a_pg_p, \quad a_p \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

в случае, когда нет линейной зависимости элементов.

Как установлено на первом этапе, $X(g) = H(g)$, если в множестве g все элементы линейно независимые. Так как элементы $g_r = 0$ не влияют на сходимость ряда (4), то предполагаем, что $g_p \neq 0$ при всех $p \in N$.

Теорема 7. *Предположим, что после удаления из множества g конечного числа элементов g_p, $p \in N_2$, линейно зависимых от оставшихся, в полученной системе $\hat{g} = \{g_p,\ p \in N_1\}$ элементы линейно независимы. Тогда $X(g) = H(\hat{g})$.*

Доказательство. Нужно доказать, что в $H(\hat{g})$ сходится каждый ряд (4). Итак,

$$\sum_{p\in N} a_pg_p = \sum_{p\in N_2} a_pg_p + \sum_{p\in N_1} a_pg_p.$$

По предположению число N_2 конечное и $g_p = \hat{g}_p$ при $p \in N_1$. Поэтому $\sum_{p\in N_2} a_pg_p = = \sum_{p\in N_1} c_p\hat{g}_p$, и среди c_p, $p \in N_1$, имеется конечное количество ненулевых элементов. Поэтому $\sum a_pg_p = \sum_{p\in N_1}(c_p + a_p)\hat{g}_p$ и ряд (4) сходится в $H(\hat{g})$. Теорема доказана.

Замечание 2. При выполнении предположения теоремы 7 ряд (4) сходится в $H(\hat{g})$ тогда и только тогда, когда $\sum |\mu_p|^2|a_p|^2 < +\infty$ при некотором μ. Это объясняется тем, что среди c_p, $p \in N$, количество ненулевых элементов конечно.

1.3. Разрешимость линейных уравнений. Зафиксируем систему $\phi = \{\phi_p,\ p \in N\}$, принадлежащую некоторому векторному пространству L. Предположим, что все элементы в ϕ линейно независимы. Тогда существует пространство $H(\phi)$, в котором сходятся все ряды

$$\sum a_p\phi_p, \quad a_p \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

причём ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$ тогда и только тогда, когда $\sum |a_p|^2|\mu_p|^2 < +\infty$.

Пусть A_0 – линейный оператор, применимый к каждому элементу множества ϕ. Введём множество $A_0\phi = \{A_0\phi_p,\ p \in N\}$, принадлежащее некоторому другому векторному пространству. Обозначим $N_3 = \{p : A_0\phi_p = 0\}$.

Предположение (P). *Из множества $\{A_0\phi_p,\ p \in N,\ p \notin N_3\}$ можно так удалить конечное количество элементов (множество их индексов обозначим через N_4), линейно зависимых от оставшихся $\{A_0\phi_p,\ p \in N_4\}$, что в $A_0\hat{\phi} = \{A_0\phi_p,\ p \in N_4\}$ элементы линейно независимы.*

При выполнении предположения (P) все ряды

$$\sum_{p\in N} a_p A_0 \phi_p, \quad a_p \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

сходятся в $H(A_0\hat{\phi})$, причём ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0\hat{\phi})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum{}' |a_p|^2 |\mu_p|^2 < +\infty.$$

Здесь запись $\sum'(\cdot)$ означает, что суммирование проводится по всем $p \in N_4$. Итак, справедлива

Теорема 8. *Пусть выполняется предположение (P). Если ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$, то ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0\hat{\phi})$; если ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0\hat{\phi})$ и в N_3 конечное количество элементов, то ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$; если в $A_0\phi$ элементы линейно независимы, то ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$ тогда и только тогда, когда ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0\phi)$.*

Введём оператор $A : H(\phi) \to H(A_0\hat{\phi})$, положив $Ax = \sum a_p A_0 \phi_p$ для $x = \sum a_p \phi_p$. Отметим, что $A\phi_p = A_0\phi_p$, $p \in N$.

Рассмотрим уравнение (1), в котором неизвестно x. Через $\|x\|_{\mu,1}$ (соответственно $\|y\|_{\mu,2}$) обозначим норму $x \in H_\mu(\phi)$ (соответственно $y \in H_\mu(A\hat{\phi})$). Как доказано ранее,

$$\Big\| \sum x_p \mu_p^{-1} \phi_p \Big\|^2_{\mu,1} = \sum |x_p|^2, \quad \Big\| \sum{}' y_p \mu_p^{-1} A\hat{\phi}_p \Big\|^2_{\mu,2} = \sum{}' |y_p|^2,$$

поэтому $\|x\|_{\mu,1} = \|y\|_{\mu,2}$, если $x \in H_\mu(\hat{\phi})$ является решением уравнения $Ax = y$ и $y \in H_\mu(A\hat{\phi})$.

2. Приложения.

2.1. Дифференциальные уравнения в частных производных с отклонениями аргументов. Рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv \sum_{\alpha\in\Phi} \sum_{j=1}^{n_1} C_{\alpha,j}(t) x^{(\alpha)}(t + \tau_{\alpha,j}) = u(t), \quad t \in \Omega \subset \mathbb{R}^s, \quad s \geqslant 1. \tag{7}$$

В этом пункте используем обозначения и предположения: Φ – конечное множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$; $C_{\alpha,j}(t)$ – квадратные $n \times n$-матрицы, не зависящие от x; $x^{(\alpha)}$ – производная порядков α_1 по t_1, …, α_s по t_s, $s \geqslant 1$; $\tau_{\alpha,j} \in \mathbb{R}^s$ и не зависят от x, t; $[0, 2\pi]^s \subset \Omega$; если $t \in \mathbb{R}^s$, $\xi \in \mathbb{R}^s$, то полагаем $t\xi = (t_1\xi_1, \ldots, t_s\xi_s)$, $t \geqslant \xi$ означает, что $t_j \geqslant \xi_j$, $j = \overline{1,s}$; i – мнимая единица; k, p, r, M_j – элементы из $\mathbb{Z}^s$; $e_q = (e_{q,1}, \ldots, e_{q,n})$, $e_{q,q} = 1$, $e_{q,j} = 0$, если $q \neq j$; $u(t)$ не зависит от x.

Уравнение вида (7) пытаются решить, полагая $x(\xi) = \psi(\xi)$ при $\xi \notin \Omega$, где $\psi(\xi)$ – заданная достаточно гладкая функция [12].

Введём систему $\phi = \{e_q \exp((\lambda + ik)t),\ q = \overline{1,n},\ k \in \mathbb{Z}^s,\ s \geqslant 1\}$, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ не зависит от k. Пусть

$$(\lambda + ik)^\alpha = \prod_{j=1}^{s} (\lambda_j + ik_j)^{\alpha_j}.$$

В ϕ функции линейно независимые, поэтому существуют пространства $H_\mu(\phi)$, $H(\phi)$. Использовав обозначение

$$A_k(t, \lambda) = \sum_{\alpha\in\Phi} \sum_{j=1}^{n_1} C_{\alpha,j}(t) (\lambda + ik)^\alpha \exp((\lambda + ik)\tau_{\alpha,J}),$$

получим $A\phi = \{A_k(t,\lambda)e_q \exp((\lambda+ik)t),\ \ q=\overline{1,n},\ \ k\in\mathbb{Z}^s,\ \ s\geqslant 1\}$. Предполагая, что $C_{\alpha,j}(t)$ – тригонометрические многочлены, т.е.

$$C_{\alpha,j}(t) = \sum_{r=M_1}^{M_2} C_{\alpha,j,r}\exp(irt)$$

при всех $\alpha\in\Phi$, $j=\overline{1,n_1}$, и используя обозначения

$$A_{k,r}(\lambda) = \sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{j=1}^{n_1} C_{\alpha,j,r}(\lambda+ik)^\alpha \exp((\lambda+ik)\tau_{\alpha,j}),$$

будем иметь

$$A_k(t,\lambda) = \sum_{r=M_1}^{M_2} A_{k,r}(\lambda)e_q\exp((\lambda+ik+ir)t). \tag{8}$$

Теорема 9. *Пусть выполняются равенства (8). Тогда:*

1) если матрицы $A_{k,M_2}(\lambda)$ обратимы при $k\geqslant M_4$, то в $A\phi(M_4)\equiv\{A(e_q\exp((\lambda+ik)t))$, $q=\overline{1,n}$, $k\geqslant M_4\}$ элементы линейно независимы;

2) если матрицы $A_{k,M_1}(\lambda)$ обратимы при $k\leqslant M_3$, то в $A\phi(M_2)\equiv\{A(e_q\exp((\lambda+ik)t))$, $q=\overline{1,n}$, $k\leqslant M_3\}$ элементы линейно независимы;

3) если матрицы $A_{k,M_2}(\lambda)$ обратимы при всех k (либо матрицы $A_{k,M_1}(\lambda)$ обратимы при всех k), то в $\{A(e_q\exp((\lambda+ik)t))$, $q=\overline{1,n}$, $k\in\mathbb{Z}^s\}$ элементы линейно независимы.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Предположим, что в $A\phi(M_4)$ имеются линейно зависимые элементы, т.е. существуют такие числа $b_{k,q}$, при которых

$$\sum_{k=M_4}^{M_5}\sum_{q=1}^{n} b_{k,q}A(e_q\exp((\lambda+ik)t))\equiv 0,\quad \sum_{k=M_4}^{M_5}\sum_{q=1}^{n}|b_{k,q}|\neq 0. \tag{9}$$

После обозначений $b_k=(b_{k,1},\ldots,b_{k,n})$ в силу (9) получим тождество

$$\sum_{k=M_4}^{M_5}\sum_{r=M_1}^{M_2} A_{k,r}(\lambda)b_k\exp(i(k+r)t)\equiv 0. \tag{10}$$

При этом было учтено, что λ не зависит от k и $\exp(\lambda t)\neq 0$. Ввиду (9), не нарушая общности, можно считать $b_{M_5}\neq 0$. Запишем (10) в виде

$$A_{M_5,M_2}b_{M_5}\exp(i(M_5+M_2)t)+{\sum}' D_{k,r}\exp(i(k+r)t),$$

здесь штрих указывает на то, что суммирование проводится по тем $k\in[M_4,M_5]$, $r\in[M_1,M_2]$, для которых $k+r\leqslant M_5+M_2$, $|k+r|<|M_5+M_2|$, т.е. $\exp(i(M_5+M_2)t)$ отсутствует в $\sum'(\cdot)$. Поэтому $A_{M_5,M_2}b_{M_5}=0$, $b_{M_5}=0$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение. Аналогично доказываются второе и третье.

Ниже $A\hat{\phi}=\{A\phi_{q,p},\ \ q,p\in N_6\}$ получается удалением из $A\phi$ всех нулевых элементов и конечного количества ненулевых элементов, линейно зависимых от оставшихся. На основании доказанных результатов сформулируем основной результат данного пункта.

Теорема 10. *Пусть в $A\hat{\phi}$ элементы линейно независимы. Тогда*

1) уравнение (7) имеет решение $x\in H(\phi)$ тогда и только тогда, когда $u\in H(A\hat{\phi})$;

2) если в $A\phi$ конечное количество нулевых элементов, то $x\in H_\mu(\phi)$ тогда и только тогда, когда $u\in H_\mu(A\hat{\phi})$;

3) уравнение (7) однозначно разрешимо в $H(\phi)$ тогда и только тогда, когда в $A\phi$ элементы линейно независимы, $u \in H(A\phi)$.

Доказательство. Нужно доказать только второе утверждение. Пусть $x \in H_\mu(\phi)$, т.е. $x = \sum x_{q,p}\mu_p^{-1}e_q\exp((\lambda+ik)t)$. Тогда $\sum|x_{q,p}|^2 < +\infty$. Значит, ряд $\sum_{q,p\in N_6} x_{q,p}\mu_p^{-1}A(e_q\exp((\lambda+ik)t))$ сходится в $H_\mu(A\hat{\phi})$, т.е. $u = Ax \in H_\mu(A\hat{\phi})$.

В случае $u \in H_\mu(A\hat{\phi})$ имеем

$$u = \sum_{q,p\in N_6} u_{q,p}\mu_p^{-1}A(e_q\exp((\lambda+ik)t)), \quad \sum_{q,p\in N_6}|u_{q,p}|^2 < +\infty.$$

Добавив конечное количество чисел, получим $\sum|u_{q,p}|^2 < +\infty$. Следовательно, ряд

$$\sum x_{q,p}\mu_p^{-1}e_q\exp((\lambda+ik)t)$$

сходится в $H_\mu(\phi)$ и его сумма x является решением уравнения (7).

Для уравнения (7) второй по важности является проблема регулярности решений, т.е. выделения дополнительных свойств решений. Например, если

$$x = \sum_k z_k\exp((\lambda+ik)t) \tag{11}$$

и ряд сходится при всех $t \in \Omega$, то x следует считать обычной функцией в Ω; если ряд сходится равномерно в Ω, то x следует считать непрерывной функцией в Ω и так далее.

Выделим условия на коэффиценты z_p, гарантирующие сходимость ряда (11) в $D'(\Omega)$ – пространстве обобщённых функций (распределений Шварца).

Пространство обобщённых функций строится по схеме:

1) фиксируется открытая область $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ ненулевой меры;

2) через $C_0^{+\infty}(\Omega)$ обозначается множество всех бесконечно дифференцируемых в Ω функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(t) \equiv 0$ вне ограниченного замкнутого множества $K_f \subset \Omega$ ненулевой меры;

3) последовательность $\{f_m(t) \in C_0^{+\infty}(\Omega),\ m = 1,2,\ldots\}$ называется *сходящейся в* $C_0^{+\infty}(\Omega)$, если существует такое ограниченное замкнутое $K \subset \Omega$, что $f_m(t) \equiv 0$ вне K для всех m и при некоторой $f_0(t) \in C_0^{+\infty}(\Omega)$, каждом α имеет место $\sup_{t\in\Omega}|f_m^{(\alpha)}(t) - f_0^{(\alpha)}(t)| \to 0$ при $m \to +\infty$;

4) каждый линейный непрерывный функционал, заданный на $C_0^{+\infty}(\Omega)$, называется *обобщённой функцией*;

5) ряд (11) называется *сходящимся в множестве обобщённых функций*, если при каждой $f(t) \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ сходится числовой ряд

$$\sum_k z_k\int_\Omega f(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt. \tag{12}$$

Теорема 11. *Пусть выполняется равенство (11) и существует $p \in \mathbb{Z}^s$, при котором*

$$\sum_k |z_k||(\lambda+ik)^p| < +\infty.$$

Тогда ряд из (11) сходится в пространстве обобщённых функций.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что все координаты в p отрицательны. Докажем абсолютную сходимость ряда (12). Так как

$$(\lambda+ik)^{-p}\exp((\lambda+ik)t) = (\exp((\lambda+ik)t))^{(-p)},$$

то

$$\int_\Omega f(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt=(\lambda+ik)^p\int_\Omega f(t)(\exp((\lambda+ik)t))^{(-p)}\,dt.$$

Напомним, что $z^{(\alpha)}$ – производная порядка α. Интегрируя по частям и учитывая $f(t)\equiv 0$ вне $K_f\subset\Omega$, получаем соотношение

$$\int_\Omega f(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt=(-1)^{|p|}(\lambda+ik)^p\int_\Omega f^{(-p)}(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt,$$

при этом

$$\left|\int_\Omega f^{(-p)}(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt\right|\leqslant\int_{K_f}|f^{(-p)}(t)||\exp(\lambda t)|\,dt=C_p<+\infty,$$

так как K_f – ограниченное и замкнутое множество, а подынтегральные функции непрерывны в K_f. Следовательно,

$$\sum_k|z_k|\left|\int_\Omega f(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt\right|\leqslant C_p\sum_k|z_k||(\lambda+ik)^p|<+\infty.$$

Замечание 3. При выполнении предположений теоремы 11 решение x уравнения (7) можно считать в Ω обобщённой функцией. Следует отметить, что фразы "x можно назвать обобщённым решением уравнения (7)" и "x – обобщённое решение уравнения (7)" имеют разный смысл. Чтобы убедиться в этом, достаточно напомнить понятие обобщённого решения.

Обобщённая функция x называется *обобщённым решением уравнения* (7), если при каждой $f\in C_0^{+\infty}(\Omega)$ выполняется $x[A^*f]=u[f]$, где A^* – сопряжённый к A оператор, $u\in D'(\Omega)$, $v[f]$ – значение обобщённой функции на f, т.е. об обобщённом решении может идти речь только тогда, когда существует A^*, $A^*C_0^{+\infty}(\Omega)\subset C_0^{+\infty}(\Omega)$, u – обобщённая функция.

Мы выбрали систему $\phi=\{e_q\exp((\lambda+ik)t)\}$, так как многие волновые процессы после замены аргументов описываются функцией $\exp(\lambda t)v(t)$, где $v(t)$ – периодическая функция; легко проверяется независимость элементов в ϕ; в случае $\det A_{k,r}(\lambda)=z(\lambda)\not\equiv 0$ всегда можно подобрать λ так, чтобы $\det A_{k,r}(\lambda)\neq 0$ при всех k, r. Действительно, положив $\lambda=$ $=\lambda_0(1,\ldots,1)$, получим скалярную, аналитическую при всех λ_0 функцию $z(\lambda_0)$. Известно, что у таких функций не более счётного множества нулей.

Полученные в п. 2.1 результаты с естественными изменениями переносятся на случай, когда $\phi=\{e_q(t-t_0)^p,\ q=\overline{1,n},\ p\in\mathbb{Z}^s\}$, где $t_j\neq t_{j,0}$ при всех j; $C_{\alpha,j}(t)=\sum_{|r|\leqslant m}C_{\alpha,j,r}(t-t_0)^r$, $t=(t_1,\ldots,t_s)$, $t_0=(t_{1,0},\ldots,t_{s,0})$. Возникающие при этом ряды называются *рядами Лорана.*

При $s=1$ уравнение (7) можно записать в виде

$$Ax\equiv\sum_{m=0}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}C_{m,j}(t)x^{(m)}(t+\tau_{m,j})=u(t),\quad t\in[a,b]\subset\mathbb{R}^1.$$

Важно отметить, что в этом случае предыдущие результаты применимы и к сингулярным дифференциальным уравнениям.

2.2. Интегральные уравнения. Речь пойдёт о линейном уравнении

$$C(t)x(t)+\int_\Omega G(t,\xi)x(\xi)d\xi=f(t),\quad t\in\Omega_1\subset\mathbb{R}^n\quad(\text{кратко }Ax=y),\tag{13}$$

где $C(t)$, $G(t,\xi)$, $f(t)$ – известные, не обязательно скалярные, функции, $\Omega\subset\Omega_1$. Линейность означает, что $C(t)$, $G(t,\xi)$, $f(t)$ не зависят от x.

Зафиксируем $\phi = \{\phi_p(\tau),\ \ p \in N\}$, $t \in \Omega_1$, – множество линейно независимых функций, для которых можно вычислить

$$A\phi = \left\{C(t)x(t) + \int\limits_{\Omega} G(t,\tau)\phi_p(\tau)d\tau, \quad p \in N\right\}. \tag{14}$$

Очевидно, что функции в $A\phi$ будут линейно независимы тогда и только тогда, когда уравнение не имеет ненулевых решений вида $\sum_{|p|\leqslant m} b_p\phi_p(t)$, $m < +\infty$. Справедливо

Утверждение. *Если функции в системе (14) линейно независимы, то существует пространство $H(A\phi)$ и при каждой функции $f \in H(A\phi)$ уравнение (13) имеет единственное решение $x_f \in H(\phi)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Казанского (Приволжского) федерального университета в рамках реализации Программы стратегического академического лидерства (“Приоритет–2030”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громов М.* Дифференциальные соотношения с частными производными. М., 1990.
2. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
3. *Мокейчев В.С., Мокейчев А.В.* Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. I // Изв. вузов. Математика. 1999. № 1. С. 25–35.
4. *Мокейчев В.С.* О разложении в ряды по заданной системе элементов // Исследования по прикладной математике и информатике. Вып. 27. Казань, 2011. С. 144–152.
5. *Мокейчев В.С.* Пространство, элементы которого и только они разлагаются в ряды Фурье по заданной системе элементов // Евразийское научное объединение. 2016. Т. 1. № 10. С. 24–31.
6. *Мокейчев В.С.* Метрические, банаховы, гильбертовы пространства ϕ_B-распределений // Изв. вузов. Математика. 2018. № 5. С. 64–70.
7. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Тригонометрические ряды и обобщённые периодические функции // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 4. С. 799–804.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., 1978.
9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
10. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М., 1965.
11. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977.
12. *Мокейчев В.С.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами. Казань, 1985.

Казанский (Приволжский)
федеральный университет

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.
После доработки 31.08.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.