ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1471–1499

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛОБАЛЬНЫХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ СИСТЕМЫ ВЛАСОВА–ПУАССОНА С ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

 А. Л. Скубачевский

Рассмотрена первая смешанная задача для системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем в области с кусочно-гладкой границей. Эта задача описывает кинетику двухкомпонентной высокотемпературной плазмы под действием самосогласованного электрического поля и внешнего магнитного поля. Доказано существование глобальных слабых решений. В случае цилиндрической области получены достаточные условия существования глобальных слабых решений с носителями в строго внутреннем цилиндре, что соответствует удержанию высокотемпературной плазмы в пробочной ловушке.

DOI: 10.31857/S0374064123110043, EDN: PDXVTF

Введение. Уравнения Власова, или кинетические уравнения с самосогласованным полем, были впервые получены в статье [1]. В настоящее время они представляют собой одну из наиболее распространённых моделей кинетической теории газов. Им посвящена обширная литература как в физике (см. [2–6]), так и в математике (см. [7–25]). Обобщённые решения задачи Коши для системы уравнений Власова–Пуассона рассматривались в работах [8, 13, 16] и др. Существование глобального классического решения задачи Коши для уравнений Власова–Пуассона изучалось в статьях [11, 19, 22, 23] и др. Рядом авторов исследовались слабые решения смешанных задач для указанных уравнений (см., например, [7, 9, 12, 24, 25]). Отметим, что для уравнений Власова нет исчерпывающих результатов о повышении гладкости обобщённых решений смешанных задач, как в случае классических уравнений в частных производных второго порядка. Вопрос о существовании классических и сильных решений смешанных задач в общем случае является нерешённой проблемой ([18, 25], см. также важные работы [15, 17], посвящённые этому вопросу).

Актуальность исследования смешанных задач для системы уравнений Власова в ограниченной области относительно функций плотности распределения заряженных частиц противоположных знаков связана с созданием управляемого термоядерного синтеза. Как известно [6], в случае попадания значительного числа частиц на стенки реактора может произойти его разрушение. Для удержания заряженных частиц на некотором расстоянии от стенок реактора используется внешнее магнитное поле. С точки зрения дифференциальных уравнений это означает, что внешнее магнитное поле должно обеспечивать существование решений системы Власова–Пуассона с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих на некотором расстоянии от границы области. Существование классических решений этой задачи рассматривалось в работах [26–32].

В настоящей работе будет исследован вопрос существования глобальных слабых решений первой смешанной задачи для системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем, описывающей кинетику двухкомпонентной плазмы в ограниченной области с кусочно-гладкой границей. В случае цилиндрической области будут также получены достаточные условия существования глобальных слабых решений с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих в строго внутреннем цилиндре. Это соответствует модели удержания плазмы в пробочной ловушке.

Постановке задачи и используемым в работе обозначениям посвящён п. 1, п. 2 – свойствам характеристик уравнений Власова. В п. 3 рассмотрены сильные решения системы уравнений

Власова для фиксированной напряжённости электрического поля, доказано существование сильного решения. Сглаженной системе уравнений Власова–Пуассона посвящён п. 4, доказано существование сильного решения для произвольного параметра сглаживания $\varkappa > 0$. В п. 5 доказано существование слабого решения смешанной задачи для системы Власова–Пуассона, которое является слабым пределом подпоследовательности решений сглаженной системы. Полученные результаты являются обобщением работ [24, 25] на случай двухкомпонентной плазмы с внешним магнитным полем. Использование результатов пп. 2–4 совместно с методом априорной оценки напряжённости электрического поля через нормы начальных функций плотности распределения заряженных частиц, разработанном в статье [32], позволило доказать в п. 6 существование слабого решения смешанной задачи для системы Власова–Пуассона в цилиндре с компактными носителями функций плотности распределения заряженных частиц.

1. Постановка задачи и обозначения. Будем рассматривать систему уравнений Власова–Пуассона

$$-\Delta\varphi(x,t) = 4\pi e \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^\beta(x,v,t)\,dv, \quad x \in Q, \quad 0 < t < T, \quad \beta = \pm 1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^\beta\rangle + \frac{\beta e}{m_\beta}\Big\langle -\nabla_x\varphi + \frac{1}{c}[v,B], \nabla_v f^\beta\Big\rangle = 0, \quad x\in Q, \quad v\in\mathbb{R}^3, \quad 0<t<T, \quad \beta=\pm1, \tag{2}$$

относительно неизвестных функций $\varphi(x,t)$ и $f^\beta(x,v,t)$ $(\beta = \pm1)$. Здесь $\varphi = \varphi(x,t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля; $f^\beta = f^\beta(x,v,t)$ – функция распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t; $Q \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$ или цилиндр $G \times (-d,d)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$; ∇_x и ∇_v – градиенты по x и v соответственно; m_{+1} и m_{-1} – массы иона и электрона соответственно; e – заряд электрона; c – скорость света; B – индукция внешнего магнитного поля; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$; $[\cdot,\cdot]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Введём множество $K \subset \partial Q$ следующим образом: $K = \varnothing$, если $\partial Q \in C^\infty$, и $K = (\partial G \times \{-d\}) \bigcup (\partial G \times \{d\})$, если $Q = G \times (-d,d)$.

Добавим начальные и граничные условия на функции f^β следующего вида:

$$f^\beta(x,v,t)|_{t=0} = \mathring{f}^\beta(x,v), \quad x \in \bar{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm1, \tag{3}$$

$$f^\beta(x,v,t) = f^\beta(x, R^{-1}(x,v), t), \quad x\in\partial Q \setminus K, \quad v\in\mathbb{R}^3, \quad 0<t<T, \quad \langle n(x), v\rangle < 0, \quad \beta=\pm1, \tag{4}$$

а также условия Дирихле для потенциала самосогласованного электрического поля:

$$\varphi(x,t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{5}$$

где $\mathring{f}^\beta(x,v)$, $\beta = \pm1$, – заданные начальные функции распределения заряженных частиц; $\mathcal{R}(x,v,t) : B_+ \times (0,T) \to B_- \times (0,T)$ – биективное отображение, действующее по формулам

$$\mathcal{R}(x,v,t) := (x, R(x,v), t), \quad R(x,v) := (x, v - 2\langle v, n(x)\rangle n(x)), \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} B_+ &= \{(x,v) \in (\partial Q \setminus K) \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x)\rangle > 0\}, \\ B_- &= \{(x,v) \in (\partial Q \setminus K) \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x)\rangle < 0\}, \\ B_0 &= \{(x,v) \in (\partial Q \setminus K) \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x)\rangle = 0\}, \end{aligned} \tag{7}$$

$n(x)$ – единичный вектор внешней нормали к границе ∂Q в точке x. Отображение $\mathcal{R}$ называется *оператором зеркального отражения*.

Введём следующие обозначения:

$C^k(\bar{D})$, $k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}$, – пространство функций, непрерывных в $\bar{D}$ и имеющих непрерывные производные в $\bar{D}$ вплоть до k-го порядка с конечной нормой

$$\|u\|_{k,\bar{D}} = \max_{|\alpha|\leqslant k} \sup_x |D^\alpha u(x)|,$$

где $D = \mathbb{R}^n$ или $D \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая область;

$C^1(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T])$ – пространство функций, непрерывных и ограниченных в $\bar{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T]$, у которых производные первого порядка также непрерывны и ограничены на этом множестве;

$\mathring{C}^k(\mathbb{R}^n)(\mathring{C}^k(Q))$, $k,n \in \mathbb{N}$, – пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n(Q)$ с компактными носителями;

$\hat{C}^k(\bar{Q})$ – пространство вектор-функций $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) : \bar{Q} \to \bar{Q}$ с координатами $Y_i \in C^k(\bar{Q})$, $k \in \mathbb{N}$;

$C([0,T], C^k(\bar{Q}))$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, – банахово пространство непрерывных функций $[0,T] \ni t \mapsto \varphi(\,\cdot\,,t) \in C^k(\bar{Q})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{k,T} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|\varphi(\,\cdot\,,t)\|_k;$$

$L_p(Y)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, – пространство измеримых функций в области $Y \subset \mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|v\|_{L_p(Y)} = \|v\|_p = \left\{ \int\limits_Y |v(y)|^p\, dy \right\}^{1/p}, \quad \text{если} \quad p < \infty,$$

$$\|v\|_{L_\infty(Y)} = \|v\| = \operatorname{ess\,sup}_{y\in Y} |v(y)|, \quad \text{если} \quad p = \infty;$$

$W_p^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant p < \infty$, – пространство Соболева функций $v \in L_p(Q)$, имеющих все обобщённые производные $D^\alpha v \in L_p(Q)$, $|\alpha| \leqslant k$, с нормой

$$\|v\|_{W_p^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int\limits_Q |D^\alpha v(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}.$$

Очевидно, для $v \in C^0(\bar{D})$ $\|v\|_{0,\bar{D}} = \|v\|$. Поэтому в дальнейшем для упрощения обозначений норму функции в $C^0(\bar{D})$ будем заменять на норму в смысле пространства $L_\infty(D)$. Через c_i и k_j будем обозначать положительные константы в неравенствах, не зависящие от правой части. Будем полагать, что $B_R(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < R\}$ и $B_R := B_R(0)$.

2. Уравнения характеристик. Перейдём к уравнениям характеристик для системы уравнений Власова (2) с фиксированным потенциалом электрического поля φ. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dX_\varphi^\beta}{d\tau} = V_\varphi^\beta, \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \tag{8}$$

$$\frac{dV_\varphi^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi(X_\varphi^\beta,\tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[V_\varphi^\beta, B(X_\varphi^\beta)], \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \tag{9}$$

где $\nabla_x\varphi(X_\varphi^\beta,\tau) = \nabla\varphi_x(x,\tau)|_{x=X_\varphi^\beta}$.

Далее в работе будем предполагать, что вектор-функции $E(x,t) = -\nabla_x\varphi(x,t)$ и $B(x)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Пусть вектор-функция $E(x,t)$ непрерывна и ограничена на множестве $\bar{Q} \times [0,T)$ и непрерывно дифференцируема по x в $(\bar{Q} \setminus K) \times [0,T)$, а вектор-функция $B(x)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема в $\bar{Q}$. Кроме того, для любой точки $x^0 \in \partial Q \setminus K$

существует шар $B_\varepsilon(x^0)$, $\varepsilon > 0$, такой, что $E(x,t)$ может быть продолжена в $(\bar{Q}\bigcup\overline{B_\varepsilon(x^0)})\times$ $\times[0,T)$ до функции $\tilde{E}(x,t)$, которая непрерывна и ограничена на множестве $(\bar{Q}\bigcup\overline{B_\varepsilon(x^0)})\times$ $\times[0,T)$ и непрерывно дифференцируема по x в $((\bar{Q}\setminus K)\bigcup\overline{B_\varepsilon(x^0)})\times[0,T)$.

Замечание 1. Введём векторное поле $\Psi^\beta:\bar{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T)\to\mathbb{R}^7$ по формуле

$$\Psi^\beta(x,v,t):=\bigg(v,\frac{\beta e}{m_\beta}E(x,t)+\frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)],1\bigg).$$

Очевидно, что

$$\operatorname{div}_v\bigg(\frac{\beta e}{m_\beta}E(x,t)+\frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)]\bigg)=0,\quad (x,v,t)\in\bar{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T).$$

Замечание 2. В работах [26–30] получены достаточные условия на начальные функции распределения, напряжённость электрического поля и индукцию внешнего магнитного поля, которые гарантируют, что все характеристики, для которых начальные условия по пространственным переменным лежат на компакте внутри области, не пересекаются с границей для любых $t\in[0,T)$.

Добавим к системе (8), (9) начальные условия вида

$$X^\beta_\varphi|_{\tau=t}=x,\quad V^\beta_\varphi|_{\tau=t}=v, \tag{10}$$

где $(x,v)\in(Q\times\mathbb{R}^3)\bigcup B_-$, $t\in[0,T)$ (см. (7)).

Обозначим $\Omega:=Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T)$ и $A_\pm:=B_\pm\times(0,T)$.

В силу условия 1 для любых $p:=(x,v,t)\in\Omega\bigcup A_-\bigcup(Q\times\mathbb{R}^3\times\{0\})$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (8)–(10) на некотором полуинтервале $[t,t_1^\beta(p))$. Обозначим это решение через $S^\beta_\varphi(\tau,p):=(X^\beta_\varphi(\tau,p),V^\beta_\varphi(\tau,p))$. Очевидно, существует предел

$$(x_1^\beta,v_1^\beta):=\lim_{\tau\to t_1^\beta-0}(X^\beta_\varphi(\tau,p),V^\beta_\varphi(\tau,p))\in\bar{Q}\times\mathbb{R}^3.$$

В силу леммы 1.4 из работы [24] возможны следующие случаи:

a) $t_1^\beta=t_1^\beta(p)=T$;

b) $t_1^\beta<T$ и $(x_1^\beta,v_1^\beta)\in B_+=\{(x,v)\in\partial Q\times\mathbb{R}^3:\langle v,n(x)\rangle>0\}$;

c) $t_1^\beta<T$ и $(x_1^\beta,v_1^\beta)\in B_0=\{(x,v)\in\partial Q\times\mathbb{R}^3:\langle v,n(x)\rangle=0\}$;

d) $t_1^\beta\in K$.

В случае a) мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $[t,T)$. В случае b) рассмотрим задачу (8), (9) с начальными условиями (10), в которых в соответствии с формулой (6), описывающей зеркальное отражение, положим

$$(x,v)=(x_1^\beta,R(x_1^\beta,v_1^\beta))\in B_-=\{(x,v)\in\partial Q\times\mathbb{R}^3:\langle v,n(x)\rangle<0\}.$$

Поскольку вектор $R(x_1^\beta,v_1^\beta)$ направлен внутрь области Ω, в силу условия 1 на некотором полуинтервале $[t_1^\beta,t_2^\beta)$ существует единственное непродолжаемое решение системы (8), (9) с начальными условиями

$$X^\beta_\varphi|_{\tau=t_1^\beta}=x_1^\beta,\quad V^\beta_\varphi|_{\tau=t_1^\beta}=R(x_1^\beta,v_1^\beta).$$

Обозначим это решение через $S^\beta_\varphi(\tau,p_1^\beta)$, где $p_1^\beta=(x_1^\beta,R(x_1^\beta,v_1^\beta),t_1^\beta)$. Очевидно, $S^\beta_\varphi(\tau,p)\subset$ $\subset Q\times\mathbb{R}^3$, $t\in(t_1^\beta,t_2^\beta)$.

Для t_2^β также возможны случаи a)–d). В случае $t_2^\beta=T$ мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $[t_1^\beta,T)$. Функция $S^\beta_\varphi(\tau,p)$, рассматриваемая на полуинтервале $[t,T)$, имеет разрывы первого рода в точках t_1^β и t_2^β и удовлетворяет системе уравнений (8), (9) на интервалах (t, t_1^β) и (t_1^β, t_2^β).

В случае $t_2^\beta < T$ и $(x_2^\beta, v_2^\beta) := \lim\limits_{\tau \to t_2^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in B_+$ опять рассмотрим систему (8), (9) с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau = t_2^\beta} = x_2^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau = t_2^\beta} = R(x_2^\beta, v_2^\beta). \tag{11}$$

Существует единственное непродолжаемое решение $S_\varphi^\beta(\tau, p_2^\beta)$ задачи (8), (9), (11), где $p_2^\beta = (x_2^\beta, R(x_2^\beta, v_2^\beta), t_2^\beta)$, на некотором полуинтервале $[t_2^\beta, t_3^\beta)$ и т.д.

Если $t > 0$, то аналогичные построения можно провести для $0 < \tau < t$. Рассмотрим систему (8), (9) при $0 < \tau < t$ с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau = t} = x, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau = t} = R^{-1}(x, v). \tag{12}$$

В силу условия 1 для любых $p = (x, v, t) \in \Omega \bigcup A_-$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (8), (9), (12) на некотором полуинтервале $(t_{-1}^\beta, t]$. Обозначим это решение $S_\varphi^\beta(\tau, p_0)$, где $p_0 := (x, R^{-1}(x, v))$. Очевидно, существует предел

$$(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) := \lim_{\tau \to t_{-1}^\beta + 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p_0), V_\varphi^\beta(\tau, p_0)) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^3.$$

Аналогично предыдущему, возможны следующие случаи:

a) $t_{-1}^\beta = t_{-1}^\beta(p_0) = 0$;

b) $t_{-1}^\beta > 0$ и $(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) \in B_-$;

c) $t_{-1}^\beta > 0$ и $(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) \in B_0$;

d) $t_{-1}^\beta \in K$.

В случае $t_{-1}^\beta = 0$ мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $(0, t]$. В случае b) рассматриваем задачу (8), (9) с начальными условиями (10), в которых положим $(x, v) = (x_{-1}^\beta, R^{-1}(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta)) \in B_+$. В силу условия 1 на некотором полуинтервале $(t_{-2}^\beta, t_{-1}^\beta]$ существует единственное непродолжаемое решение этой задачи и т.д.

Точки t_1^β, t_2^β, $\ldots$, t_{-1}^β, t_{-2}^β, $\ldots$ мы назовём *моментами отражения.*

Обозначим через S множество точек $p = (x, v, t) \in \Omega \bigcup A_- \bigcup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$, для которых существует $t < t_k^\beta < T$, $k \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\text{либо} \quad (x_k^\beta, v_k^\beta) = \lim_{\tau \to t_k^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_0, \quad \text{либо} \quad (x_k^\beta, v_k^\beta) \in K,$$

или $0 < t_{-j}^\beta < t$, $j \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\text{либо} \quad (x_{-j}^\beta, v_{-j}^\beta) = \lim_{\tau \to t_{-j}^\beta + 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_0, \quad \text{либо} \quad (x_{-j}^\beta, v_{-j}^\beta) \in K,$$

или число моментов отражения бесконечно.

Положим $\Lambda = (\Omega \bigcup A_- \bigcup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})) \setminus S$. Очевидно, множество Λ состоит из всех точек $p = (x, v, t) \in \Omega \bigcup A_- \bigcup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ в начальных условиях (10), при которых построенные кусочно-непрерывные решения $\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, p)$ существуют на всём интервале $(0, T)$, имеют конечное число моментов отражения и множество моментов отражения t_k^β $(0 < t_k^\beta < T,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ таких, что $(x_k^\beta, v_k^\beta) \in B_0$ или $t_k^\beta \in K$ пусто.

Через $\mu_n(\cdot)$ обозначим n-мерную меру Лебега. Пусть $\mathcal{B}(A_\pm)$ – σ-алгебра борелевских множеств на множестве $A_\pm := B_\pm \times (0,T)$ с мерой $\nu_\pm$, определённой по формуле

$$\nu_\pm(B) := \int\limits_{A_\pm} \chi_B(x,v,t)|\langle n(x),v\rangle|\, d\sigma(x)\, dv\, dt, \quad B \in \mathcal{B}(A_\pm),$$

где $\chi_B(x,v,t)$ – характеристическая функция множества B.

Решения $\hat{S}^\beta_\varphi(\tau,x,v,t)$, $0 \leqslant t < T$, при $(x,v,t) \in \Lambda$ назовём *порождающими характеристиками.* Заметим, что при $t \leqslant \tau < T$ порождающие характеристики $\hat{S}^\beta_\varphi(\tau,x,v,t)$ непрерывны по τ справа, а при $0 < \tau \leqslant t$ они непрерывны по τ слева.

Положим $S_1 = S\bigcap\Omega$, $\Lambda_1 = \Lambda\bigcap\Omega$, $S_2 = S\bigcap A_-$, $\Lambda_2 = \Lambda\bigcap A_-$, $S_3 = S\bigcap(Q\times\mathbb{R}^3\times\{0\})$, $\Lambda_3 = \Lambda\bigcap(Q\times\mathbb{R}^3\times\{0\})$.

Из леммы 1.34 в [24] вытекает

Теорема 1. $\mu_7(S_1) = 0$, *а множество* Λ_1 *открыто в* $\mathbb{R}^7$, $\nu_-(S_2) = 0$, $\mu_6(S_3) = 0$.

Обозначим $\Gamma_t = \{(x,v,\tau) \in \Lambda_1 : \tau = t\}$. Из замечания 1 следует

Лемма 1. *Для* $0 \leqslant s,t < T$ *отображение* $\hat{S}^\beta_\varphi(s,\ldots,t) : \Gamma_t \to \Gamma_s$ *биективно и сохраняет меру Лебега* $\mu_6(\cdot)$.

Подробное доказательство см. в предложении 3 из работы [24, с. 52].

3. Сильные решения уравнений Власова. Пусть $\mathring{f}^\beta \in \mathring{C}^0(Q\times\mathbb{R}^3)$ – непрерывные функции с компактным носителем в $Q\times\mathbb{R}^3$, $\mathring{f}^\beta \geqslant 0$. Обозначим через $w_\pm : A_\pm \to \mathbb{R}$ измеримые по Борелю функции. Введём оператор $\mathcal{K}$ по формуле

$$\mathcal{K}w_+(x,v,t) := w_+(\mathcal{R}^{-1}(x,v,t)) \quad \text{для п.в.} \quad (x,v,t) \in A_-.$$

Пусть $f^\beta \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\beta = \pm1$. Зададим функции $f^\beta_\pm$, $\beta = \pm1$, по формулам

$$f^\beta_+(x,v,t) := \lim_{\tau\to t-0} f^\beta(S^\beta_\varphi(\tau,x,v,t),\tau), \quad (x,v,t) \in A_+, \tag{13}$$

$$f^\beta_-(x,v,t) := \lim_{\tau\to t+0} f^\beta(S^\beta_\varphi(\tau,x,v,t),\tau), \quad (x,v,t) \in A_-. \tag{14}$$

Существование почти всюду этих пределов вытекает из результатов п. 2 и того, что $C^0(\bar{\Omega})$ всюду плотно в $L_p(\Omega)$.

Рассмотрим следующую задачу для уравнений Власова:

$$Vf^\beta := \frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^\beta\rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta}E(x,t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)], \nabla_v f^\beta \right\rangle = 0, \tag{15}$$

где $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$, $t \in (0,T)$, $\beta = \pm1$,

$$f^\beta(x,v,0) = \mathring{f}^\beta(x,v), \quad x \in \bar{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm1, \tag{16}$$

$$f^\beta_-(x,v,t) = \mathcal{K}f^\beta_+(x,v,t), \quad (x,v,t) \in A_-, \quad \beta = \pm1. \tag{17}$$

Будем предполагать, что вектор-функции $E(x,t)$ и $B(x)$ удовлетворяют условию 1.

Определение 1. Измеримые функции $f^\beta(x,v,t)$, $\beta = \pm1$, будем называть *сильным решением задачи* (15)–(17), если f^β п.в. в Ω являются константами вдоль порождающих характеристик, удовлетворяют начальному условию (16) для п.в. $x \in \bar{Q}$ и $v \in \mathbb{R}^3$ и краевому условию (17) для п.в. $(x,v,t) \in A_-$.

Лемма 2. *Существует сильное решение задачи (15)–(17), определяемое формулой*

$$f^\beta(x,v,t) = \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_\varphi(0,x,v,t)), \quad (x,v,t) \in \Lambda_1, \tag{18}$$

которое является единственным с точностью до множества меры нуль.

Доказательство. 1. Докажем, что при подстановке порождающих характеристик в формулу (18) мы получим константу, не зависящую от t.

Из группового свойства порождающих характеристик следует, что

$$\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(s,y,w,\tau)=\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(s,\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(t,y,w,\tau),t). \tag{19}$$

Подставив в функцию $f^{\beta}(x,v,t)$ вместо (x,v) порождающую характеристику $\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(t,y,w,\tau)$, используя формулу (18) и равенство (19) при $s=0$, получим

$$f^{\beta}(x,v,t)=f^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(t,y,w,\tau),t)=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(t,y,w,\tau),t))=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,y,w,\tau)). \tag{20}$$

Очевидно, правая часть (20) не зависит от t, т.е. является константой.

2. Проверим выполнение условий (16). В силу непрерывности справа в точке 0 порождающих характеристик имеем

$$f^{\beta}(x,v,0)=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,x,v,0))=\mathring{f}^{\beta}(x,v).$$

3. Убедимся в справедливости условия (17). По построению порождающих характеристик для $(x,v,t)\in A_-$ существует $\varepsilon>0$ такое, что при $|t-\tau|<\varepsilon$ выполняются соотношения

$$S^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t)=\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t),\quad \tau>t, \tag{21}$$

$$S^{\beta}_{\varphi}(\tau,\mathcal{R}^{-1}(x,v,t))=\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t),\quad \tau<t. \tag{22}$$

Использовав последовательно (14), (21), (18), (22) и (13), получим

$$f^{\beta}_{-}(x,v,t)=\lim_{\tau\to t+0}f^{\beta}(S^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t),\tau)=\lim_{\tau\to t+0}f^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t),\tau)=$$

$$=\lim_{\tau\to t+0}\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t)),\tau)=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,x,v,t+0))=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,x,v,t-0))=$$

$$=\lim_{\tau\to t-0}\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t)),\tau)=\lim_{\tau\to t-0}f^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t),\tau)=$$

$$=\lim_{\tau\to t-0}f^{\beta}(S^{\beta}_{\varphi}(\tau,\mathcal{R}^{-1}(x,v,t)),\tau)=f^{\beta}_{+}(\mathcal{R}^{-1}(x,v,t))=\mathcal{K}f^{\beta}_{+}(x,v,t),\quad \beta=\pm1,\quad (x,v,t)\in A_-.$$

Единственность очевидна. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $\mathring{f}^{\beta}\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$. *Тогда сильное решение задачи (15)–(17) непрерывно дифференцируемо в* Λ_1.

Лемма 3. *Пусть* $\mathring{f}^{\beta}\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$, $\psi\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$ *и* $I:=[0,T)$, *а* $\{f^{\beta}\}$, $\beta=\pm1$, *– сильное решение задачи (15)–(17). Тогда отображение*

$$\left(t\longmapsto\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi(x,v)f^{\beta}(x,v,t)\,dx\,dv\right)\in C^1(I)$$

и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi(x,v)f^{\beta}(x,v,t)\,dx\,dv=$$

$$=\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\left(\langle v,\nabla_x\psi(x,v)\rangle+\left\langle-\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi(x,t)+\frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)],\nabla_v\psi(x,v)\right\rangle\right)f^{\beta}(x,v,t)\,dx\,dv. \tag{23}$$

Доказательство. В силу лемм 1, 2 имеем

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \psi(x,v)f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \psi(x,v)\mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_\varphi(0,x,v,t))\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} g(x,v,t)\,dx\,dv, \tag{24}$$

где $g(x,v,t) := \psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))\mathring{f}^\beta(x,v)\,dx\,dv.$ Аналогично доказательству леммы 3.3 в [25] можно показать, что функция $\int_{Q\times\mathbb{R}^3} g(x,v,t)\,dx\,dv$ непрерывно дифференцируема по t на полуинтервале $[0,T)$ и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} g(x,v,t)\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \frac{dg(x,v,t)}{dt}\,dx\,dv. \tag{25}$$

Из (24), (25), уравнений характеристик (8), (9), леммы 1 и равенства (18) следует, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \psi(x,v)f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \frac{d}{dt}\psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))\mathring{f}^\beta(x,v)\,dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \left\{\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial\psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))}{\partial\hat{X}^\beta_{\varphi,i}}\frac{d\hat{X}^\beta_{\varphi,i}}{dt} + \frac{\partial\psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))}{\partial\hat{V}^\beta_{\varphi,i}}\frac{d\hat{V}^\beta_{\varphi,i}}{dt}\right)\right\}\mathring{f}^\beta(x,v)\,dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \left\{\langle\hat{V}^\beta_\varphi(t,x,v,0), \nabla_{\hat{X}^\beta_\varphi}\psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))\rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_{\hat{X}^\beta_\varphi}\varphi(\hat{X}^\beta_\varphi(t,x,v,0),t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\beta e}{m_\beta c}[\hat{V}^\beta_\varphi(t,x,v,0), B(\hat{X}^\beta_\varphi(t,x,v,0))], \nabla_{\hat{V}^\beta_\varphi}\psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))\right\rangle\right\}\mathring{f}^\beta(x,v)\,dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \left\{\langle v, \nabla_x\psi(x,v)\rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi(x,t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], \nabla_v\psi(x,v)\right\rangle\right\}\mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_\varphi(0,x,v,t))\,dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \left\{\langle v, \nabla_x\psi(x,v)\rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi(x,t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], \nabla_v\psi(x,v)\right\rangle\right\}f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv.$$

Таким образом, интегральное тождество (23) доказано. Лемма доказана.

Обозначим $A_T := Q\times\mathbb{R}^3\times\{T\}$ и $A_0 := Q\times\mathbb{R}^3\times\{0\}$.

Лемма 4. *Пусть* $\{f^\beta\}$, $\beta=\pm1$, *– сильное решение задачи (15)–(17), и пусть* $\psi\in\mathring{C}^1(\bar{Q}\times\times\mathbb{R}^3\times[0,T])$. *Тогда (см. (15))*

$$\langle f^\beta, V\psi\rangle = \int\limits_{A_+}\psi f^\beta_+ d\nu_+ + \int\limits_{A_T}\psi(x,v,T)f^\beta(x,v,T)\,dx\,dv -$$

$$-\int\limits_{A_-}\psi f^\beta_- d\nu_- - \int\limits_{A_0}\psi(x,v,0)f^\beta(x,v,0)\,dx\,dv.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.5 из работы [24, с. 68].

4. Сильные решения сглаженной системы Власова–Пуассона. Обозначим через $G=G(x,y)$ функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в Q. Так как Q – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, функция Грина существует. Единственность функции Грина следует из теоремы 2.4 в [33]. Подробное изложение результатов, посвящённых функции Грина, также можно найти в статье [33].

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{\partial f_\varkappa^\beta}{\partial t}+\langle v,\nabla_x f_\varkappa^\beta\rangle+\left\langle\frac{\beta e}{m_\beta}E_\varkappa+\frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)],\nabla_v f_\varkappa^\beta\right\rangle=0,\quad x\in Q,\quad v\in\mathbb{R}^3,\quad t\in(0,T),\quad \beta=\pm1, \tag{26}$$

где $f_\varkappa^\beta$ – неизвестные функции, $\varkappa>0$.

Введём ядро усреднения $\omega_\varkappa(x)$ следующим образом. Пусть

$$\omega(t):=\begin{cases} ce^{-1/(1-t^2)}, & |t|<1,\\ 0, & |t|\geqslant 1,\end{cases} \tag{27}$$

где постоянная $c>0$ определяется из условия

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\omega(|x|)\,dx=1. \tag{28}$$

Очевидно, $\omega\in\mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp}\omega=[-1,1]$. Положим $\omega_\varkappa(x):=\varkappa^{-3}\omega(|x|/\varkappa)$. Тогда $\omega_\varkappa\in$ $\in\mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\operatorname{supp}\omega_\varkappa=\overline{B_\varkappa(0)}$, при этом в силу (27), (28)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\omega_\varkappa(x)\,dx=1. \tag{29}$$

Функцию $E_\varkappa$ будем определять из соотношений

$$G_\varkappa(x,y)=\int\limits_Q G(x,\xi)\omega_\varkappa(y-\xi)d\xi, \tag{30}$$

$$E_\varkappa(x,t)=-\nabla_x\varphi_\varkappa(x,t),\quad \varphi_\varkappa(x)=\int\limits_Q G_\varkappa(x,y)\rho_\varkappa(y,t)\,dy, \tag{31}$$

$$\rho_\varkappa(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(f_\varkappa^{+1}(x,v,t)-f_\varkappa^{-1}(x,v,t))\,dv. \tag{32}$$

Вместе с уравнениями (26) рассмотрим начальные условия

$$f_\varkappa^\beta(x,v,0)=\mathring{f}^\beta(x,v),\quad x\in\bar{Q},\quad v\in\mathbb{R}^3,\quad \beta=\pm1, \tag{33}$$

где $\mathring{f}^\beta(x,v)\in\mathring{C}^0(Q\times\mathbb{R}^3)$, а также краевые условия

$$f_{\varkappa,-}^\beta(x,v,t)=\mathcal{K}f_{\varkappa,+}^\beta,\quad x\in A_-,\quad v\in\mathbb{R}^3,\quad t\in(0,T),\quad \beta=\pm1, \tag{34}$$

где

$$f_{\varkappa,+}^\beta:=\lim_{\tau\to t-0}f_\varkappa^\beta(S_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t),\tau),\quad (x,v,t)\in A_+,$$

$$f_{\varkappa,-}^\beta:=\lim_{\tau\to t+0}f_\varkappa^\beta(S_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t),\tau),\quad (x,v,t)\in A_-,$$

а $S_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t):=(X_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t),V_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t))$ – решение следующей системы уравнений характеристик:

$$\frac{dX_\varkappa^\beta}{d\tau}=V_\varkappa^\beta,\quad 0<\tau<T,\quad \beta=\pm1, \tag{35}$$

$$\frac{dV_\varkappa^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[V_\varkappa^\beta, B(X_\varkappa^\beta)], \quad 0<\tau<T, \quad \beta=\pm 1, \tag{36}$$

с начальными условиями $X_\varkappa^\beta(t,x,v,t)=x$, $V_\varkappa^\beta(t,x,v,t)=v$, соответствующих сглаженной системе Власова–Пуассона (26), (30)–(32).

Для множества $X\subset\mathbb{R}^n$ и отображения $f: X\to\mathbb{R}$ обозначим через $\tilde f$ продолжение f нулём на $\mathbb{R}^n\setminus Q$. Тогда в уравнении (26) при определении $E_\varkappa(x,t)$ плотность заряда $\rho_\varkappa(x,t)$ мы заменим на сглаженную плотность $\sigma_\varkappa=(\omega_\varkappa*\tilde\rho_\varkappa)(x,t)$, и в силу (30) получим выражение

$$\varphi_\varkappa(x,t)=\int\limits_Q G(x,y)(\omega_\varkappa*\tilde\rho_\varkappa)(y,t)\,dy,$$

где $(\omega_\varkappa*\tilde\rho_\varkappa)(y,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\omega_\varkappa(y-\xi)\tilde\rho_\varkappa(\xi,t)d\xi$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathring{f}^\beta\in\mathring{C}^0(Q\times\mathbb{R}^3)$, $\mathring{f}^\beta\geqslant 0$. *Тогда для любого* $\varkappa>0$ *существует сильное решение* $\{f_\varkappa^\beta\}$, $\beta=\pm1$, *уравнений (26), (30)–(32) с условиями (33), (34).*

Доказательство. 1. Зафиксируем $\varkappa>0$ и построим последовательность сильных решений уравнений Власова $f_{\varkappa,n}^\beta$ для заданных полей $E_{\varkappa,n-1}$.

Положим

$$f_{\varkappa,0}^\beta(x,v):=\mathring{f}^\beta(x,v), \quad \rho_{\varkappa,0}(x):=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(f_{\varkappa,0}^{+1}-f_{\varkappa,0}^{-1})\,dv.$$

Тогда $\sigma_{\varkappa,0}:=\omega_\varkappa*\tilde\rho_{\varkappa,0}\in\mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ и задача

$$-\Delta\varphi_{\varkappa,0}(x)=4\pi e\sigma_{\varkappa,0}(x), \quad \varphi_{\varkappa,0}|_{\partial Q}=0$$

имеет единственное классическое решение $\varphi_{\varkappa,0}$. Поскольку $\partial Q\setminus K\in C^\infty$, функция $\varphi_{\varkappa,0}(x)$ непрерывна по x, непрерывно дифференцируема по x в $\bar Q$ и дважды непрерывно дифференцируема по x в $\bar Q\setminus K$, при этом $\varphi_{\varkappa,0}\in C^\infty(\bar Q\setminus K)$. Таким образом, функции $E_{\varkappa,0}(x):=-\nabla_x\varphi_{\varkappa,0}(x)$ и $B(x)$ в уравнении (26) удовлетворяют условию 1. Следовательно, для $p=(x,v,t)\in(\Lambda_1)_{\varkappa,0}\subset\Omega$ существуют порождающие характеристики, которые обозначим через $\hat S_{\varphi_{\varkappa,0}}^\beta(\tau,p)$. Множество $(\Lambda_1)_{\varkappa,0}\subset\Omega$ является открытым и $\mu_7(\Omega\setminus(\Lambda_1)_{\varkappa,0})=0$ (см. теорему 1).

Далее в качестве $f_{\varkappa,1}^\beta$ возьмём функцию

$$f_{\varkappa,1}^\beta(x,v,t):=\mathring{f}^\beta(\hat S_{\varphi_{\varkappa,0}}^\beta(0,x,v,t)),$$

которая для $p(x,v,t)\in(\Lambda_1)_{\varkappa,0}$ является сильным решением уравнений Власова для заданного поля $E_{\varkappa,0}(x)=-\nabla_x\varphi_{\varkappa,0}(x)$. Обозначим теперь

$$\rho_{\varkappa,1}(x,t):=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(f_{\varkappa,1}^{+1}-f_{\varkappa,1}^{-1})\,dv,$$

$$\sigma_{\varkappa,1}(x,t)=\tilde\rho_{\varkappa,1}*\omega_\varkappa=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(\tilde f_{\varkappa,1}^{+1}(\xi,v,t)-\tilde f_{\varkappa,1}^{-1}(\xi,v,t))\,dv\right)\omega_\varkappa(x-\xi)d\xi. \tag{37}$$

Из свойств ядра усреднения $\omega_\varkappa(x)$, равенств (37) и леммы 1 получим следующие соотношения:

$$\|\sigma_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,t)\|_1=\|\tilde\rho_{\varkappa,1}*\omega_\varkappa\|_1\leqslant\|\mathring{f}^{+1}\|_1+\|\mathring{f}^{-1}\|_1, \quad \|\sigma_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,t)\|\leqslant C_\varkappa(\|\mathring{f}^{+1}\|_1+\|\mathring{f}^{-1}\|_1).$$

Рассмотрим отображение

$$t\mapsto\sigma_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,t)\in L_1(Q)\bigcap L_\infty(Q). \tag{38}$$

Из условия компактности носителей начальных функций $\mathring{f}^{\beta}$ и непрерывности отображения $(t,y,w)\mapsto \hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\varkappa,0}}(t,y,w,0)$ (см. лемму 2.1 из [25]) следует ограниченность множества

$$\bigcup_t \operatorname{supp}_{x,v} f^{\beta}_{\varkappa,1}(x,v,t)=\bigcup_t \operatorname{supp}_{x,v}\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\varkappa,0}}(0,x,v,t))\subset\mathbb{R}^6$$

для $|t-t_0|<\varepsilon$, $(x,v,t)\in(\Lambda_1)_{\varkappa,0}$.

Отсюда, а также из непрерывности отображения $(x,v,t)\mapsto \hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\varkappa,0}}(0,x,v,t)$ и очевидной оценки $|\sigma_{\varkappa,1}(x,t)-\sigma_{\varkappa,1}(x,t_0)|\leqslant C_{\varkappa,1}\sum_{\beta=\pm1}\|f^{\beta}_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,\cdot\,,t)-f^{\beta}_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,\cdot\,,t_0)\|_1$ вытекает непрерывность отображения (38).

По построению $\sigma_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,t)\in\mathring{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ для всех $t\in[0,T)$ и непрерывна по (x,t) в $\bar{Q}\times[0,T)$.

Обозначим через $\varphi_{\varkappa,1}(x,t)$ классическое решение задачи

$$-\Delta\varphi_{\varkappa,1}(x,t)=4\pi e\sigma_{\varkappa,1}(x,t),\quad \varphi_{\varkappa,1}|_{\partial Q}=0,$$

существование которого гарантировано в силу принадлежности $\sigma_{\varkappa,1}(x,t)$ классу $\mathring{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ для всех $t\in[0,T)$.

Поскольку $\partial Q\setminus K\in C^{\infty}$, функция $\varphi_{\varkappa,1}(x,t)$ непрерывна по (x,t), непрерывно дифференцируема по x в $\bar{Q}\times[0,T)$ и дважды непрерывно дифференцируема по x в $(\bar{Q}\setminus K)\times[0,T)$, при этом $\varphi_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,t)\in C^{\infty}(\bar{Q}\setminus K)$ для $t\in[0,T)$, а $\nabla\varphi_{\varkappa,1}$ ограничена в $\bar{Q}\times[0,T)$. Следовательно, функции $E_{\varkappa,1}(x,t):=-\nabla_x\varphi_{\varkappa,1}(x,t)$ и $B(x)$ в уравнении (26) удовлетворяют условию 1. Таким образом, для $p\in(\Lambda_1)_{\varkappa,1}\subset\Omega$ существуют порождающие характеристики, которые мы обозначим через $\hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\varkappa,1}}(\tau,p)$. Множество $(\Lambda_1)_{\varkappa,1}\subset\Omega$ является открытым и $\mu_7(\Omega\setminus(\Lambda_1)_{\varkappa,1})=0$.

Продолжив построения аналогичным образом, получим последовательность сильных решений уравнений Власова $f^{\beta}_{\varkappa,n}$ для заданных полей $E_{\varkappa,n-1}$:

$$f^{\beta}_{\varkappa,n}(x,v,t):=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\varkappa,n-1}}(0,x,v,t)),\quad n\geqslant1.$$

2. Обозначим $I:=[0,T)$. Докажем, что существует подпоследовательность $f^{\beta}_{\varkappa,n_k}\subset f^{\beta}_{\varkappa,n}$ и функция

$$f^{\beta}_{\varkappa}:I\to L_1(Q\times\mathbb{R}^3)$$

такая, что

(a) для всех $g\in L_{\infty}(\mathbb{R}^6)$

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in I}\left|\int(\tilde{f}^{\beta}_{\varkappa,n_k}(y,v,t)-\tilde{f}^{\beta}_{\varkappa}(y,v,t))g(y,v)\,dy\,dv\right|=0, \tag{39}$$

(b) отображение $\tilde{f}^{\beta}_{\varkappa}:I\to L_1(\mathbb{R}^6)$ непрерывно в слабой топологии на $L_1(\mathbb{R}^6)$.

В силу леммы 4.5 из работы [16] достаточно показать, что:

1) семейство функций $f^{\beta}_{\varkappa,n}$ является слабо компактным в $L_1(Q\times\mathbb{R}^3)$ для всех $t\in I$;

2) для любых $g(y,v)\in L_{\infty}(Q\times\mathbb{R}^3)$ семейство функций $\int_{Q\times\mathbb{R}^3}f^{\beta}_{\varkappa,n}(y,v,t)g(y,v)\,dy\,dv$ равностепенно непрерывно по t.

Первое утверждение следует из теоремы 4.2 в [16] (теорема Данфорда–Петтиса). Доказательство второго утверждения аналогично предложению 5 в [24]. Переобозначим подпоследовательность $f^{\beta}_{\varkappa,n_k}$ снова как $f^{\beta}_{\varkappa,n}$.

3. Пусть $\tilde{\rho}_{\varkappa}(y,t):=\int_{\mathbb{R}^3}(\tilde{f}^{+1}_{\varkappa}(y,v,t)-\tilde{f}^{-1}_{\varkappa}(y,v,t))\,dv$ и $\sigma_{\varkappa}(x,t):=\int_{\mathbb{R}^3}\tilde{\rho}_{\varkappa}(y,t)\omega_{\varkappa}(x-y)\,dy$. Докажем справедливость равенства

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\|\sigma_{\varkappa,n}(\,\cdot\,,t)-\sigma_{\varkappa}(\,\cdot\,,t)\|_1=0. \tag{40}$$

Для каждого фиксированного $x \in Q$ имеем

$$\sigma_{\varkappa,n}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^6} (\tilde{f}^{+1}_{\varkappa,n}(y,v,t) - \tilde{f}^{-1}_{\varkappa,n}(y,v,t))\omega_\varkappa(x-y)\,dy\,dv,$$

$$\sigma_{\varkappa}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^6} (\tilde{f}^{+1}_{\varkappa}(y,v,t) - \tilde{f}^{-1}_{\varkappa}(y,v,t))\omega_\varkappa(x-y)\,dy\,dv,$$

где $\omega_\varkappa(x-y) \in L_\infty(\mathbb{R}^6)$.

Из последних двух соотношений и (39) получим равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} |\sigma_{\varkappa,n}(x,t) - \sigma_\varkappa(x,t)| = 0 \tag{41}$$

для любого $x \in Q$.

Используя лемму 1 об инвариантности меры относительно отображения $\hat{S}^\beta_{\varphi_{\varkappa,n-1}}(s,\cdot,\cdot,t) : \Gamma_t \to \Gamma_s$ и групповое свойство порождающих характеристик, будем иметь

$$\|f^\beta_{\varkappa,n}\|_1 = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa,n}(x,v,t)\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_{\varphi_{\varkappa,n-1}}(0,x,v,t))\,dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_{\varphi_{\varkappa,n-1}}(0,\hat{S}^\beta_{\varphi_{\varkappa,n-1}}(t,y,w,0),t))\,dy\,dw = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \mathring{f}^\beta(y,w)\,dy\,dw = \|\mathring{f}^\beta\|_1.$$

Из непрерывности отображения $\tilde{f}^\beta_\varkappa(\,\cdot\,,\cdot\,,t) : I \to L_1(\mathbb{R}^6)$ в слабой топологии и теоремы Банаха–Штейнгауза вытекает неравенство

$$\sup_{t\in I} \|f^\beta_\varkappa(\,\cdot\,,\cdot\,,t)\|_1 \leqslant c_{\varkappa,1},$$

где $c_{\varkappa,1} > 0$ – некоторая константа, не зависящая от t.

Отсюда и из (41) получим

$$|\sigma_{\varkappa,n}(x,t) - \sigma_\varkappa(x,t)| \leqslant |\sigma_{\varkappa,n}(x,t)| + |\sigma_\varkappa(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{\varkappa,2} \sum_\beta (\|\mathring{f}^\beta\|_1 + \|f^\beta_\varkappa(\,\cdot\,,\cdot\,,t)\|_1) \leqslant c_{\varkappa,2} \sum_\beta (\|\mathring{f}^\beta\|_1 + c_{\varkappa,1}), \tag{42}$$

где $c_{\varkappa,2} > 0$ не зависит от x, n и t.

Из (41), (42) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что

$$\sup_{t\in I} \int\limits_Q |\sigma_{\varkappa,n}(x,t) - \sigma_\varkappa(x,t)|\,dx \leqslant \int\limits_Q \sup_{t\in I} |\sigma_{\varkappa,n}(x,t) - \sigma_\varkappa(x,t)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

4. Покажем теперь, что для фиксированного $\varkappa > 0$ предел последовательности сильных решений уравнений Власова $f^\beta_{\varkappa,n}$, определённый в п. 2 доказательства, является сильным решением сглаженной системы Власова–Пуассона (26), (30)–(32) с начальными условиями (33) и краевыми условиями (34).

В п. 2 доказательства мы определили функции $f^\beta_\varkappa$, а в п. 3 – функции $\rho_\varkappa$ и $\sigma_\varkappa$. Обозначим

$$\varphi_\varkappa(x,t) := \int\limits_Q G(x,\xi)\sigma_\varkappa(\xi,t)\,d\xi, \quad x \in \bar{Q}, \quad t \in I, \tag{43}$$

$$E_\varkappa(x,t) := -\nabla_x \varphi_\varkappa(x,t), \quad x \in \bar{Q}, \quad t \in I. \tag{44}$$

Из известных свойств функции Грина [33]

$$G(x,y) \leqslant \frac{c_1}{|x-y|}, \quad |\nabla_x G(x,y)| \leqslant \frac{c_1}{|x-y|^2}, \quad x,y \in Q, \quad x \neq y, \tag{45}$$

а также соотношений (42)–(45) и неравенства Гёльдера следует оценка

$$\|E_{\varkappa,n}(\,\cdot\,,t) - E_\varkappa(\,\cdot\,,t)\| \leqslant c_2 \|\sigma_{\varkappa,n}(\,\cdot\,,t) - \sigma_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|_1^{1/4}, \quad t \in I,$$

где $E_{\varkappa,n}(x,t) = -\nabla \varphi_{\varkappa,n}(x,t)$, $\varphi_{\varkappa,n}(x,t) = \int_Q G(x,y)\sigma_{\varkappa,n}(y,t)\,dy$, $x \in \bar{Q}$, $t \in I$.

Отсюда и из (40) получим

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t \in I} \|E_{\varkappa,n}(\,\cdot\,,t) - E_\varkappa(\,\cdot\,,t)\| = 0. \tag{46}$$

Таким образом, отображение

$$I \ni t \to E_\varkappa(\,\cdot\,,t) \in C(\bar{Q})$$

непрерывно, т.е. функция $E_\varkappa(x,t)$ непрерывна по x и t на множестве $\bar{Q} \times I$.

По построению функция $\varphi_\varkappa$ является решением задачи

$$-\Delta \varphi_\varkappa(x,t) = 4\pi e \sigma_\varkappa(x,t), \quad x \in Q, \quad t \in I, \tag{47}$$

$$\varphi_\varkappa(x,t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad t \in I, \tag{48}$$

где по определению $\sigma_\varkappa(\,\cdot\,,t) \in C^\infty(\bar{Q})$, $t \in I$. Поэтому по теореме 6.18 из [34] о регулярности решений эллиптических задач вблизи гладкой границы $\varphi_\varkappa(x,t)$ непрерывна по x и t, непрерывно дифференцируема по x в $\bar{Q} \times [0,T)$ и дважды непрерывно дифференцируема по x в $(\bar{Q} \setminus K) \times [0,T)$. Таким образом, выполнено условие 1, которое обеспечивает существование порождающих характеристик для сглаженного уравнения Власова (26) на открытом множестве $(\Lambda_1)_\varkappa \subset \Omega$, при этом $\mu_7(\Omega \setminus (\Lambda_1)_\varkappa) = 0$. Из равенства (46) следует, что вектор-функции $E_{\varkappa,n}$ и $E_\varkappa$ удовлетворяют условиям леммы 2.1 в [25]. Отсюда вытекает существование числа $N \in \mathbb{N}$ такого, что для любых $(x,v,t) \in (\Lambda_1)_\varkappa$, $s \neq t_k(x,v,t)$ $(k \in \mathbb{Z})$ и $n \geqslant N$ мы имеем $(x,v,t) \in (\Lambda_1)_{\varkappa,n}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \hat{S}^\beta_{\varkappa,n}(s,x,v,t) = \hat{S}^\beta_\varkappa(s,x,v,t),$$

где $(\Lambda_1)_{\varkappa,n} \subset \Omega$ – открытое множество, $\mu_7(\Omega \setminus (\Lambda_1)_{\varkappa,n}) = 0$.

Следовательно, для всех $(x,v,t) \in (\Lambda_1)_\varkappa$

$$\lim_{n\to\infty} f^\beta_{\varkappa,n}(x,v,t) = \lim_{n\to\infty} \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_{\varkappa,n}(0,x,v,t)) = \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_\varkappa(0,x,v,t)) =: g^\beta_\varkappa(x,v,t). \tag{49}$$

Из (49) получим

$$\sup_{x,v,t} |f^\beta_{\varkappa,n}(x,v,t)|, \sup_{x,v,t} |g^\beta_\varkappa(x,v,t)| \leqslant \|\mathring{f}^\beta\|.$$

Из соотношений (49), последнего неравенства и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f^\beta_{\varkappa,n}(\,\cdot\,,\cdot\,,t) - g^\beta_\varkappa(\,\cdot\,,\cdot\,,t)\|_1 = 0, \quad t \in I,$$

поэтому

$$f^\beta_\varkappa(x,v,t) = g^\beta_\varkappa(x,v,t) = \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_\varkappa(0,x,v,t)) \quad \text{для п.в.} \quad (x,v,t) \in \Omega. \tag{50}$$

Отсюда имеем

$$\sigma_\varkappa(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^6} (\tilde f^{+1}_\varkappa(y,v,t) - \tilde f^{-1}_\varkappa(y,v,t))\omega_\varkappa(x-y)\,dy\,dv = \int\limits_{\mathbb{R}^6} (\tilde g^{+1}_\varkappa(y,v,t) - \tilde g^{-1}_\varkappa(y,v,t))\,dy\,dv. \quad (51)$$

Таким образом, функции $g^\beta_\varkappa$ удовлетворяют сглаженной системе уравнений Власова–Пуассона (26), (30)–(32). Легко видеть, что начальные условия (33) и краевые условия (34) также выполняются.

Мы доказали, что функция $g^\beta_\varkappa(x,v,t) = \mathring{f}^\beta(\hat S^\beta_\varkappa(0,x,v,t))$ является сильным решением задачи (26), (30)–(34). Теорема доказана.

5. Слабые решения смешанной задачи для системы Власова–Пуассона. Докажем теорему существования слабых решений системы Власова–Пуассона (1), (2) с начальным условием (3) и краевыми условиями (4), (5).

Пусть $f^\beta \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, $\Omega := Q \times \mathbb{R}^3 \times (0,T)$, а функция $E = E(x,t)$ такова, что $f^\beta E$ локально интегрируема на Ω.

Определение 2. Функции f^β назовём *слабо дифференцируемыми* по направлению

$$l^\beta := \left(v, \frac{\beta e}{m_\beta}E + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], 1\right),$$

если существуют функции $h^\beta \in L_p(\Omega)$ такие, что для всех $g^\beta \in \mathring{C}^1(\Omega)$

$$\langle h^\beta, g^\beta\rangle = -\langle f^\beta, L^\beta g^\beta\rangle := -\int\limits_\Omega f^\beta L^\beta g^\beta\,dx\,dvdt,$$

где

$$L^\beta g^\beta := \langle v, \nabla_x g^\beta\rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta}E + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], \nabla_v g^\beta\right\rangle + \frac{\partial g^\beta}{\partial t}.$$

Функции $h^\beta \in L_p(\Omega)$ определены единственным образом и обозначаются через $L^\beta f^\beta$.

Определение 3. Пусть функции $f^\beta \in L_p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ слабо дифференцируемы по направлению l^β. Функции $f^\beta_\pm \in L_{p,loc}(A_\pm)$ будем называть *следами* f^β на $A_\pm$, если

$$\langle L^\beta f^\beta, \psi^\beta\rangle + \langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta\rangle = \int\limits_{A_+} f^\beta_+\psi^\beta d\nu_+ - \int\limits_{A_-} f^\beta_-\psi^\beta d\nu_-$$

для любых $\psi^\beta \in \mathring{C}^1(\bar\Omega \times \mathbb{R}^3 \times (0,T))$.

В силу определения 1 и лемм 3, 4 любое сильное решение $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, задачи (1)–(5) с начальными функциями $\mathring{f}^\beta \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ слабо дифференцируемо по направлению l^β, при этом $L^\beta f^\beta = 0$, следы f^β на $A_\pm$ существуют и задаются формулами (13), (14).

Запишем задачу (1)–(5) следующим образом:

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^\beta\rangle + \frac{\beta e}{m_\beta}\left\langle E + \frac{1}{c}[v,B], \nabla_v f^\beta\right\rangle = 0, \quad x \in Q, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0,T), \quad \beta = \pm 1, \quad (52)$$

$$E(x,t) = -\int\limits_Q \nabla_x G(x,\xi)\rho(\xi,t)d\xi, \quad \rho(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_\beta \beta f^\beta(x,v,t)\,dv, \quad x \in \bar Q, \quad t \in [0,T), \quad (53)$$

$$f^\beta(x,v,0) = \mathring{f}^\beta(x,v), \quad x \in \bar Q, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad (54)$$

$$f^\beta_-(x,v,t) = \mathcal{K} f^\beta_+(x,v,t), \quad (x,v,t) \in A_-, \quad \beta = \pm 1. \quad (55)$$

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $1 \leqslant p' \leqslant \infty$ такие, что $1/p + 1/p' = 1$, и пусть X – измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$. Для $1 \leqslant p < \infty$ обозначим через $\sigma(p, p')$ слабую топологию в $L_p(X)$, а через $\sigma(\infty, 1)$ – слабую-* топологию в пространстве $L_\infty(X)$.

Определение 4. Функции $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, будем называть *слабым решением системы уравнений* (52)–(55), если выполняются следующие условия:

1) отображения $f^\beta : I \to (L_1(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(1, \infty)) \bigcap (L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(\infty, 1))$ непрерывны, $\beta = \pm 1$;

2) $f^\beta(x, v, 0) = \mathring{f}^\beta(x, v)$ для почти всех $x \in \bar{Q}$, $v \in \mathbb{R}^3$ и $\beta = \pm 1$;

3) для почти всех $(x, t) \in Q \times [0, T)$ и $\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_\beta \beta f^\beta(x, v, t)\, dv$ положим $E(x, t) = -\int_Q \nabla_x G(x, \xi)\rho(\xi, t)\, d\xi$, тогда функции $f^\beta E$ локально интегрируемы на $\Omega \times \mathbb{R}^3$;

4) для всех $\psi \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ имеем

$$\left(t \to \int\limits_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t)\, dx\, dv\right) \in C^1(I),$$

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t)\, dx\, dv = \int\limits_{Q \times \mathbb{R}^3} (X^\beta \psi)(x, v, t) f^\beta(x, v, t)\, dx\, dv,$$

где

$$(X^\beta \psi)(x, v, t) := \langle v, \nabla_x \psi(x, v)\rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v)\right\rangle;$$

5) следы f^β на $A_\pm$ существуют и $f^\beta_- = \mathcal{K} f^\beta_+$ на A_-, $\beta = \pm 1$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathring{f}^\beta \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$, $\mathring{f}^\beta \geqslant 0$. *Тогда существует слабое решение* $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, *задачи (52)–(55).*

Доказательство теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 5. *Пусть* $1 \leqslant r < 3$, $r \leqslant q < 3r/(3 - r)$, *и пусть* $K \subset \mathbb{R}^3$ *область такая, что* $\bar{K} \subset Q$. *Тогда оператор* $A_G : L_r(Q) \to L^3_q(Q)$, *определённый по формуле*

$$(A_G \sigma)(x) = \chi_K(x) \int\limits_Q \nabla_x G(x, y)\sigma(y)\, dy,$$

является компактным, где $\chi_K(x)$ *– характеристическая функция множества* K.

Доказательство см. в [24, лемма 4.3].

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и пусть* $\{f^\beta_\varkappa\}$, $\varkappa > 0$, *– сильное решение задачи (26), (29)–(34). Тогда для любой последовательности* $\{\varkappa_n\}$, $\varkappa_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\varkappa_n > 0$, *существуют подпоследовательность* $\{\varkappa_{n_k}\}$ *и функции* $f^\beta \in C(I, (L_p(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(p, p')))$ *такие, что для любых* $p, p' \in [1, \infty]$, $1/p + 1/p' = 1$, *справедливы утверждения:*

a) $f^\beta_{\varkappa_{n_k}} \rightharpoonup f^\beta$ *в* $(L_p(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(p, p'))$ *равномерно по* $t \in I$ *при* $k \to \infty$;

b) $f^\beta_{\varkappa_{n_k}} \rightharpoonup f^\beta$ *в* $(L_p(\Omega), \sigma(p, p'))$ *при* $k \to \infty$;

c) существуют $g^\beta_\pm \in L_\infty(A_\pm, d\nu_\pm)$ *такие, что* $f^\beta_{\varkappa_{n_k}, \pm} \rightharpoonup^* g^\beta_\pm$ *в* $L_\infty(A_\pm, d\nu_\pm)$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство аналогично [24, лемма 4.5].

В дальнейшем для упрощения будем обозначать подпоследовательность $\{\varkappa_{n_k}\}$ через $\varkappa_n$.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы 3.*

a) Пусть, кроме того, $1 \leqslant p \leqslant 5/3$, *а функции* $\rho^\beta_{\varkappa_n} : I \to L_p(Q)$ *определены по формуле*

$$\rho^\beta_{\varkappa_n}(x, t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x, v, t)\, dv.$$

Тогда $\rho^\beta_{\varkappa_n}(x, t) \rightharpoonup \rho^\beta(x, t)$ *при* $n \to \infty$ *в* $(L_p(Q), \sigma(p, p'))$ *равномерно по* $t \in I$.

b) Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\psi \in \mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(\,\cdot\,,v) f^\beta_{\varkappa_n}(\,\cdot\,,v,t)\,dv \rightharpoonup \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(\,\cdot\,,v) f^\beta(\,\cdot\,,v,t)\,dv$$

в $(L_p(Q),\sigma(p,p'))$ *при* $n\to\infty$ *равномерно по* $t\in I$.

Доказательство см. в [24, лемма 4.7].

Доказательство теоремы 3. 1. Рассмотрим функции f^β, $g^\beta_\pm$, $\beta=\pm1$, из леммы 6. Покажем, что $\{f^\beta\}$, $\beta=\pm1$, – слабое решение задачи (52)–(55). Выполнение условий 1)–3) для функций $\{f^\beta\}$ в определении слабого решения следует из леммы 6, равенства (33), а также соотношений (53) и (46).

2. Докажем выполнение условия 4). Вначале покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}(J^\beta_{1,n}(t)+J^\beta_{2,n}(t))=0, \tag{56}$$

где

$$J^\beta_{1,n}(t)=\Bigg|\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\bigg(\langle v,\nabla_x\psi(x,v)\rangle+\bigg\langle\frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)],\nabla_v\psi(x,v)\bigg\rangle\bigg)(f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)-f^\beta(x,v,t))\,dx\,dv\Bigg|,$$

$$J^\beta_{2,n}(t)=\Bigg|\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\frac{\beta e}{m_\beta}\langle\nabla_v\psi(x,v),E^\beta_{\varkappa_n}(x,t)f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)-E^\beta(x,t)f^\beta(x,v,t)\rangle\,dx\,dv\Bigg|, \tag{57}$$

$\psi\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$, $E^\beta_{\varkappa_n}(x,t)=\int_Q e_n(x,y)\rho^\beta_{\varkappa_n}(y,t)\,dy$, $\rho^\beta_{\varkappa_n}(y,t):=\int_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(y,v,t)\,dv$.

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}J^\beta_{1,n}=0. \tag{58}$$

Поскольку $\psi\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$, имеем

$$\langle v,\nabla_x\psi(x,v)\rangle+\bigg\langle\frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)],\nabla_v\psi(x,v)\bigg\rangle\in L_\infty(Q\times\mathbb{R}^3)\bigcap L_1(Q\times\mathbb{R}^3).$$

Отсюда и из утверждения а) леммы 6 следует равенство (58).

Докажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}J^\beta_{2,n}=0. \tag{59}$$

Для любых $t\in I$ и п.в. $x\in Q$ имеем $\rho^\beta(x,t):=\int_{\mathbb{R}^3} f^\beta(x,v,t)\,dv$. В силу леммы 6 $\rho^\beta(\,\cdot\,,t)\in$ $\in L_1(Q)$. Из доказательства леммы 4.1 в [34] и неравенств (45) следует, что потенциал

$$\varphi^\beta(x,t):=\int\limits_Q G(x,y)\rho^\beta(y,t)\,dy$$

непрерывно дифференцируем по x для $x\in Q$ и $t\in I$ и

$$E^\beta(x,t)=-\nabla_x\varphi^\beta(x,t)=-\int\limits_Q\nabla_x G(x,y)\rho^\beta(y,t)\,dy.$$

Обозначим

$$e(x,y):=-\nabla_x G(x,y),\quad e_n(x,y):=-\int\limits_Q\nabla_x G(x,\xi)\omega_{\varkappa_n}(y-\xi)d\xi. \tag{60}$$

Тогда

$$E^\beta(x,t) = \int\limits_Q e(x,y)\rho^\beta(y,t)\,dy.$$

Положим

$$E(x,t) = \sum_\beta \beta E^\beta(x,t), \quad E_{\varkappa_n}(x,t) = \sum_\beta \beta E^\beta_{\varkappa_n}(x,t).$$

Используя (60), мы можем записать (57) в виде

$$J^\beta_{2,n}(t) = \frac{\beta e}{m_\beta} \int\limits_{Q\times Q\times\mathbb{R}^6} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t) f^\beta_{\varkappa_n}(y,w,t)\langle e_n(x,y) - e(x,y), \nabla_v\psi(x,v)\rangle\,dx\,dv\,dy\,dw +$$

$$+ \frac{\beta e}{m_\beta} \int\limits_{Q\times Q\times\mathbb{R}^6} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)(f^\beta_{\varkappa_n}(y,w,t) - f^\beta(y,w,t))\langle e(x,y), \nabla_v\psi(x,v)\rangle\,dx\,dv\,dy\,dw +$$

$$+ \frac{\beta e}{m_\beta} \int\limits_{Q\times Q\times\mathbb{R}^6} f^\beta(y,w,t)(f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t) - f^\beta(x,v,t))\langle e(x,y), \nabla_v\psi(x,v)\rangle\,dx\,dv\,dy\,dw. \tag{61}$$

Доказательство равенства (59) проводится аналогично доказательству леммы 4.8 из [24]. Для этого достаточно показать, что каждое из трёх слагаемых в формуле (61) стремится к нулю при $n\to\infty$ равномерно по $t\in I$. Докажем, например, справедливость этого утверждения для второго слагаемого. Для этого воспользуемся леммой 5 при $r = 5/3$ и $r \leqslant q < 15/4$. Выберем q' из условия $1/q + 1/q' = 1$. Поскольку $\mathrm{supp}_x\psi \subset Q$, в силу утверждения b) леммы 7 имеем

$$\frac{e}{m_\beta}\Bigg|\int\limits_{Q\times Q\times\mathbb{R}^6} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)(f^\beta_{\varkappa_n}(y,w,t) - f^\beta(y,w,t))\langle e(x,y), \nabla_v\psi(x,v)\rangle\,dx\,dv\,dy\,dw\Bigg| =$$

$$= \frac{e}{m_\beta}\Bigg|\int\limits_{Q\times Q\times\mathbb{R}^6} \chi_{\mathrm{supp}_x\psi}(x) f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)(f^\beta_{\varkappa_n}(y,w,t) - f^\beta(y,w,t))\langle e(x,y), \nabla_v\psi(x,v)\rangle\,dx\,dv\,dy\,dw\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e}{m_\beta}\int\limits_Q \chi_{\mathrm{supp}_x\psi}(x)\Bigg|\int\limits_Q e(x,y)(\rho^\beta_{\varkappa_n}(y,t) - \rho^\beta(y,t))\,dy\Bigg|\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\nabla_v\psi(x,v)\,dv\Bigg|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e}{m_\beta}\Bigg\|\chi_{\mathrm{supp}_x\psi}(x)\int\limits_Q e(x,y)(\rho^\beta_{\varkappa_n}(y,t) - \rho^\beta(y,t))\,dy\Bigg\|_q\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\nabla_v\psi(x,v)\,dv\Bigg\|_{q'}. \tag{62}$$

В силу утверждения b) леммы 7

$$\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\nabla_v\psi(x,v)\,dv\Bigg\|_{q'} \leqslant C, \tag{63}$$

где $C > 0$ не зависит от $t\in I$.

С другой стороны, из леммы 5 следует, что оператор $A_G : L_r(Q)\to L^3_q(Q)$ компактный, поэтому он переводит слабо сходящуюся последовательность $\{\rho^\beta_{\varkappa_n}\}$ в $L_r(Q)$ (см. утверждение a) леммы 7) в сильно сходящуюся в $L^3_q(Q)$. Следовательно,

$$\Bigg\|\chi_{\mathrm{supp}_x\psi}(x)\int\limits_Q e(x,y)(\rho^\beta_{\varkappa_n}(y,t) - \rho^\beta(y,t))\,dy\Bigg\|_q \to 0$$

равномерно по $t \in I.$ Отсюда и из (62), (63) следует (59). Таким образом, справедливость (56) доказана. Это означает, что

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} (X^\beta\psi)(x,v,t) f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv \to \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} (X^\beta\psi)(x,v,t) f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv \tag{64}$$

при $n\to\infty$ равномерно по $t\in I.$

С другой стороны, в силу утверждения a) леммы 6 имеем

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v) f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv \to \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v) f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv \tag{65}$$

при $n\to\infty$ равномерно по $t\in I,$ при этом из леммы 3 следует, что

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v) f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv \in C^1(I), \tag{66}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v) f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} (X^\beta\varphi)(x,v,t) f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv. \tag{67}$$

Из (64)–(67) и единственности предела заключаем, что последовательность

$$\left\{\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v) f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv\right\}$$

при $n\to\infty$ сходится к

$$\frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v) f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv\biggr) \in C^1(I)$$

равномерно по $t\in I,$ при этом выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v) f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv\biggr) = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} (X^\beta\varphi)(x,v,t) f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv$$

для $t\in I.$

Выполнение условия 5 следует из доказательства предложения 6 в [24, с. 102–106].

Итак, мы доказали существование глобального слабого решения $\{f^\beta\},$ $\beta=\pm1,$ первой смешанной задачи для системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем, описывающей кинетику двухкомпонентной высокотемпературной плазмы в области с гладкой границей. Лемма доказана.

6. Система уравнений Власова–Пуассона в цилиндре. Далее предположим, что $Q = G\times(-d,d),$ где $G\subset\mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial G\in C^\infty,$ $d>0.$

Вначале мы докажем вспомогательный результат о существовании и единственности сильного решения уравнения Пуассона с условиями Дирихле в цилиндре Q в пространстве Соболева $W^2_p(Q),$ $p\geqslant 2,$ который является обобщением соответствующего результата для ограниченной области с гладкой границей (см. теорему 9.15 из [34, гл. 9, § 9.6]).

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u(x) = F(x), \quad x\in Q, \tag{68}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial Q, \tag{69}$$

где $F \in L_p(Q)$, $2 \leqslant p < \infty$.

Определение 5. Функцию $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$ назовём *слабым (обобщённым) решением задачи* (68), (69), если для любой функции $v \in \mathring{C}^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int\limits_Q F(x) v(x)\, dx.$$

Определение 6. Функцию $u \in \mathring{W}_p^1(Q) \bigcap W_{p,loc}^2(Q)$ назовём *сильным решением задачи* (68), (69), если она удовлетворяет п.в. в Q уравнению (68).

Очевидно, что сильное решение задачи (68), (69) является и слабым тем более.

Лемма 8. *Для любой функции $F \in L_p(Q)$ существует единственное сильное решение $u \in W_p^2(Q) \bigcap \mathring{W}_p^1(Q)$ задачи (68), (69), при этом*

$$\|u\|_{W_p^2(Q)} \leqslant c_1 \|F\|_{L_p(Q)}, \tag{70}$$

где $2 \leqslant p < \infty$, $c_1 = c_1(Q) > 0$ не зависит от F.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в теореме 9.15 из [34, гл. 9, § 9.6], в которой рассматривалась область с гладкой границей. Принципиальное отличие заключается в том, что в рассматриваемом случае граница ∂Q не является гладкой, так как она содержит два ребра $\partial G \times \{-d\}$ и $\partial G \times \{d\}$.

Все этапы доказательства указанной леммы состоят из вспомогательных утверждений, касающихся гладкости и априорных оценок слабых решений задачи (68), (69) во внутренних подобластях Q' $(\bar{Q}' \subset Q)$ или в подобластях Q' вблизи гладкой границы $Q' \subset Q$, $\partial Q' \bigcap \partial Q \neq \neq \varnothing$. В рассматриваемом нами случае ключевым результатом является

Лемма 9. *Пусть $B_R^+ := \{x \in B_R : x_3 > 0\}$ и $B_R^{++} := \{x \in B_R : x_2 > 0,\ x_3 > 0\}$. Пусть функция $u \in \mathring{W}_p^1(B_R^{++})$, $2 \leqslant p < \infty$, является слабым решением задачи (68), (69) в B_R^{++} и равна нулю вблизи $\partial B_R^{++} \bigcap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 > 0,\ x_3 > 0\}$, где $F \in L_p(B_R^{++})$.*

Тогда $u \in W_p^2(B_R^{++})$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_p^2(B_R^{++})} \leqslant c_2 \|F\|_{L_p(B_R^{++})},$$

где $c_2 > 0$ и не зависит от F.

Доказательство. Продолжим функции $u(x)$ и $F(x)$ нечётным образом в $B_R^+ \setminus B_R^{++}$, полагая

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3) = -u(x_1, -x_2, x_3), \quad x \in B_R^+, \quad x_2 < 0,$$

$$\tilde{F}(x_1, x_2, x_3) = -F(x_1, -x_2, x_3), \quad x \in B_R^+, \quad x_2 < 0.$$

По построению функция $\tilde{u}$, которая является нечётным продолжением функции u, обладает следующими свойствами: $\tilde{u} \in \mathring{W}_p^1(B_R^+)$ и $\tilde{u}(x) = 0$ вблизи $\partial B_R^+ \bigcap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$.

Покажем, что функция $\tilde{u}$ является слабым решением задачи (68), (69) в B_R^+. Возьмём произвольную пробную функцию $v \in \mathring{C}^1(B_R^+)$. Введём чётную функцию $\xi_\varepsilon(x_2) \in C^1(\mathbb{R})$ так, что $\xi_\varepsilon(x_2) = 0$ при $|x_2| \leqslant \varepsilon$, $\xi_\varepsilon(x_2) = 1$ при $|x_2| \geqslant 2\varepsilon$ и $|\xi'_\varepsilon(x_2)| \leqslant 2/\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Тогда, используя определения функций $\tilde{F}$ и $\tilde{u}$ и формулу Лейбница, получаем

$$\int\limits_{B_R^+} \tilde{F}(x) \xi_\varepsilon(x_2) v(x)\, dx = \int\limits_{B_R^+} \nabla \tilde{u}(x) \nabla(\xi_\varepsilon v)(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{B_R^+} \xi_\varepsilon(x_2) \nabla \tilde{u}(x) \nabla v(x)\, dx + \int\limits_{B_R^+} v(x) \xi'_\varepsilon(x_2) D_{x_2} \tilde{u}(x)\, dx. \tag{71}$$

С учётом чётности функции $\xi_\varepsilon(x_2)$ и нечётности по x_2 функции $\tilde u(x)$, оценки $|\xi'_\varepsilon(x_2)|\leqslant \leqslant 2/\varepsilon$ и формулы Лагранжа в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега получим

$$\left|\int\limits_{B_R^+} v(x)\xi'_\varepsilon(x_2)D_{x_2}\tilde u(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{B_R^{++}\bigcap\{x_2<2\varepsilon\}} (v(x_1,x_2,x_3)-v(x_1,-x_2,x_3))\xi'_\varepsilon(x_2)D_{x_2}u(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon\frac{2}{\varepsilon}\max_{x\in\bar B_R^+}|D_{x_2}v(x)|\int\limits_{B_R^{++}\bigcap\{x_2<2\varepsilon\}}|D_{x_2}u(x)|\,dx\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0. \tag{72}$$

Устремив в тождестве (71) ε к нулю, в силу (72) будем иметь

$$\int\limits_{B_R^+}\tilde F(x)v(x)\,dx = \int\limits_{B_R^+}\nabla\tilde u(x)\nabla v(x)\,dx.$$

Таким образом, $\tilde u\in \mathring W_p^1(B_R^+)$ является слабым решением задачи (68), (69) в B_R^+ и $u(x)=0$ вблизи $\partial B_R^+\bigcap\{x_3>0\}$.

Следовательно, в силу леммы 9.12 из [34, гл. 9, § 9.5] $\tilde u\in W_p^2(B_R^+)$ и

$$\|\tilde u\|_{W_p^2(B_R^+)}\leqslant k_1\|\tilde F\|_{L_p(B_R^+)},$$

где $k_1>0$ не зависит от $\tilde F$. Отсюда вытекает утверждение леммы 9.

Комбинируя известные утверждения о гладкости и априорных оценках слабых решений внутри области, вблизи гладких частей границы, а также доказанную выше лемму 9 о гладкости и априорных оценках слабых решений задачи (68), (69) вблизи ребра, мы убеждаемся в справедливости леммы 8. Лемма доказана.

Замечание 3. Лемма 8 справедлива также в случае сильно эллиптического в $\bar Q$ дифференциального уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами и однородными условиями Дирихле на границе ∂Q. Однако нам понадобится лишь рассмотренная выше задача (68), (69).

В дальнейшем нам потребуется оценка нормы напряжённости самосогласованного электрического поля $E_\varkappa(x,t)$ для сглаженной системы Власова–Пуассона через нормы начальных функций распределения заряженных частиц $\mathring f^\beta(x,v)$.

Обозначим

$$Q_{2\delta}:=\{x\in Q:\operatorname{dist}(x,\partial G\times(-d,d))>2\delta\},\quad G_{2\delta}:=\{x\in G:\operatorname{dist}(x',\partial G)>2\delta\},$$

где число $\delta>0$ таково, что $Q_{2\delta}\neq\varnothing$, $x=(x',x_3)$.

Предположим, что выполнено следующее

Условие 2. Пусть $\mathring f^\beta\in\mathring C^1(\mathbb R^6)$ и $\operatorname{supp}\mathring f^\beta\subset D_0:=(Q_{2\delta}\bigcap B_\lambda)\times B_\rho$, где $\delta,\rho>0$, $0\in Q_{2\delta}$, $2\delta<\lambda<d/2$.

Из (47), (48), (50) и (51) получим задачу

$$-\Delta\varphi_\varkappa(x,t)=4\pi e\sigma_\varkappa(x,t),\quad x\in Q,\quad t\in[0,T), \tag{73}$$

$$\varphi_\varkappa(x,t)=0,\quad x\in\partial Q,\quad t\in[0,T), \tag{74}$$

где

$$\sigma_\varkappa(x,t)=\int\limits_{\mathbb R^6}\sum_{\beta=\pm1}\omega_\varkappa(x-y)\beta\tilde f_\varkappa^\beta(y,v,t)\,dy\,dv,\quad x\in Q,\quad t\in[0,T), \tag{75}$$

$\tilde f_\varkappa^\beta(y,v,t)$ $((y,v)\in\mathbb R^6,\ t\in[0,T))$ – продолжение по y нулём в $\mathbb R^3\setminus Q$ функции $f_\varkappa^\beta(y,v,t)= = \mathring f^\beta(\hat S_\varkappa^\beta(0,y,v,t))$ $(y\in Q,\ v\in\mathbb R^3,\ t\in[0,T))$, $\varkappa>0$ (см. доказательство теоремы 2).

Из условия 2 и теоремы 1 следует, что $\sigma_\varkappa(\,\cdot\,,t)\in C^\infty(\bar Q)$ для любого $t\in[0,T)$.
Обозначим

$$R(T):=\{1+\max_\beta\sup_{\varkappa>0}\sup_{v\in\mathbb{R}^3}|v|: \text{существуют } x\in Q \text{ и } t\in[0,T) \text{ такие, что } f_\varkappa^\beta(y,v,t)\neq 0\}.$$

Условие 3. $R(T)<\infty$.

Выполнение аналогичного условия в случае задачи Коши для системы Власова–Пуассона доказано в работах [22, 23]. Заметим, что константа $R(T)$ зависит также от начальных функций $\mathring{f}^\beta$ (см. [22, с. 1316]).

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 2. Тогда справедлива оценка*

$$|||\nabla\varphi_\varkappa|||_{0,T}\leqslant\frac{c_3}{\varkappa^3}\max_\beta\|\mathring{f}^\beta\|,\quad \beta=\pm1, \tag{76}$$

где $c_3=c_3(Q,\rho)>0$ – *константа, не зависящая от* T, $\mathring{f}^\beta$ *и* $\varkappa$.

Если к тому же выполняется условие 3, то имеет место неравенство

$$|||\nabla\varphi_\varkappa|||_{0,T}\leqslant c_4\max_\beta\|\mathring{f}^\beta\|,\quad \beta=\pm1, \tag{77}$$

где $c_4=c_4(Q,\rho,T,\mathring{f}^\beta)>0$ – *константа, не зависящая от* $\varkappa$.

Доказательство. 1. В силу леммы 8 для $t\in[0,T)$ существует единственное сильное решение $\varphi_\varkappa(\,\cdot\,,t)\in W_p^2(Q)\bigcap\mathring{W}_p^1(Q)$ задачи (73), (74), при этом

$$\|\varphi_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|_{W_p^2(Q)}\leqslant c_1 4\pi e\|\sigma_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|_{L_p(Q)}, \tag{78}$$

где $c_1=c_1(Q)>0$ не зависит от $\sigma_\varkappa$ и от t, $p\geqslant 2$.

Из теоремы Соболева о непрерывности вложения пространства $W_p^2(Q)$ в $C^1(\bar Q)$ при $p\geqslant 4$ и соотношений (70) и (75) следует, что

$$|||\nabla\varphi_\varkappa(\,\cdot\,,t)|||_{C^0(\bar Q)}\leqslant k_1\|\varphi_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|_{W_4^2(Q)}\leqslant c_1k_1 4\pi e\|\sigma_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|_{L_4(D)}\leqslant c_1k_1 4\pi e\sum_{\beta=\pm1}I^\beta, \tag{79}$$

где

$$I^\beta=\bigg\{\int\limits_Q\bigg|\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\omega_\varkappa(x-y)f_\varkappa^\beta(y,v,t)\,dy\,dv\bigg|^4dx\bigg\}^{1/4}=$$

$$=\bigg\{\int\limits_Q\bigg|\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\omega_\varkappa(x-y)\mathring{f}^\beta(\hat S_\varkappa^\beta(0,y,v,t))\,dy\,dv\bigg|^4dx\bigg\}^{1/4},$$

$k_1=k_1(Q)>0$.

В силу леммы 1 отображение $\hat S_\varphi^\beta(t,\cdot,\cdot,0):\Gamma_0\to\Gamma_t$ биективно и отображает измеримое множество $U_0=(D_0\times\{0\})\bigcap\Lambda\subset\Gamma_0$ на множество $U_t\subset\Gamma_t$, при этом $\mu_6(U_t)=\mu_6(U_0)<\infty$, где $\Gamma_t=\{(x,v,\tau)\in\Lambda_1:\tau=t\}$, множества Λ и Λ_1 определены перед теоремой 1.

Отсюда имеем

$$I^\beta=\bigg\{\int\limits_Q\bigg|\int\limits_{U_t}\omega_\varkappa(x-y)\mathring{f}^\beta(\hat S_\varkappa^\beta(0,y,v,t))\,dy\,dv\bigg|^4dx\bigg\}^{1/4}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{(y,v)\in U_t}\mathring{f}^\beta(\hat S_\varkappa^\beta(0,y,v,t))\bigg\{\int\limits_Q\bigg(\int\limits_{U_t}\omega_\varkappa(x-y)\,dy\,dv\bigg)^4dx\bigg\}^{1/4}. \tag{80}$$

2. Докажем справедливость оценки (76). Из (27), (28) для любых $x, y \in \mathbb{R}^3$ получим

$$\omega_\varkappa(x-y) \leqslant \frac{k_2}{\varkappa^3}, \tag{81}$$

где $k_2 > 0$ не зависит от $x, y \in \mathbb{R}^3$ и $\varkappa > 0$. Из (80) и (81) вытекают неравенства

$$I^\beta \leqslant \max_{(z,w)\in\bar{D}_0} \mathring{f}^\beta(z,w)\frac{k_2}{\varkappa^3}\bigg\{\int\limits_Q \mu_6^4(U_t)\,dx\bigg\}^{1/4} \leqslant \frac{k_2}{\varkappa^3}\mu_3^{1/4+1}(Q)\mu_3(B_\rho)\|\mathring{f}^\beta\|. \tag{82}$$

Из (79), (82) следует оценка (76).

3. Остаётся доказать неравенство (77). Пусть выполнено условие 3. Тогда из (80) и условия 3 получим

$$I^\beta \leqslant \max_{(z,w)\in\bar{D}_0} \mathring{f}^\beta(z,w)\bigg\{\int\limits_Q\bigg(\int\limits_{|v|<R(T)} dv \int\limits_{|x-y|<\varkappa} \omega_\varkappa(x-y)\,dy\bigg)^4 dx\bigg\}^{1/4} \leqslant \mu_3^{1/4}(Q)\mu_3(B_{R(T)})\|\mathring{f}^\beta\|. \tag{83}$$

Из (80), (83) вытекает (77). Теорема доказана.

Рассмотрим порождающие характеристики $\hat{S}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0) := (\hat{X}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0), \hat{V}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0))$, $(x,v,0)\in\Lambda_3$, сглаженной системы уравнений (35), (36). Положим $(x^\beta_k, v^\beta_k) := \hat{S}^\beta_\varkappa(t^\beta_k - 0, x, v, 0)$, $k\in\mathbb{N}$.

Лемма 10. *Пусть выполнено условие 2. Тогда для всех $(x,v,0)\in\Lambda_3$, $(x,v)\in D_0$, справедлива оценка*

$$|\hat{V}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)| \leqslant \rho + \frac{eT^\beta k_1}{m_\beta}\|\mathring{f}^\beta\|, \quad 0\leqslant\tau<t^\beta_1, \tag{84}$$

$$|x^\beta_1 - x| \leqslant \bigg(\rho + \frac{eT^\beta}{m_\beta}k_1\|\mathring{f}^\beta\|\bigg)T^\beta, \tag{85}$$

где $k_1 = c_3/\varkappa^3$ $(c_3>0)$ – константа из неравенства (76); $T^\beta := t^\beta_1 < T$, если существует момент отражения $t^\beta_1 < T$, $T^\beta = T$, если $\hat{X}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)\bigcap\partial Q = \varnothing$ для всех $0\leqslant\tau<T$; $x^\beta_1 := \hat{X}^\beta_\varkappa(T^\beta-0,x,v,0)$.

Если к тому же выполняется условие 3, то для всех $(x,v,0)\in\Lambda_3$, $(x,v)\in D_0$, выполняются неравенства (84), (85) с константой $k_1 = c_4$, где $c_4>0$ – постоянная из неравенства (77).

Доказательство. Умножим (36) скалярно на $\hat{V}^\beta_\varkappa$. Тогда для всех $\hat{V}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)\neq0$ будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}|\hat{V}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)|^2 = -\frac{\beta e}{m_\beta}\langle\nabla_x\varphi_\varkappa(\hat{X}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)), \hat{V}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)\rangle, \quad 0\leqslant\tau<T^\beta.$$

Отсюда и из неравенства Коши–Буняковского получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}|\hat{V}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)|^2 \leqslant \frac{e}{m_\beta}|\nabla_x\varphi_\varkappa(\hat{X}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0))||\hat{V}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)|, \quad 0\leqslant\tau<T^\beta.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau}|\hat{V}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)| \leqslant \frac{e}{m_\beta}|\nabla_x\varphi_\varkappa(\hat{X}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0))|, \quad 0\leqslant\tau<T^\beta. \tag{86}$$

Проинтегрировав (86) по τ от 0 до t, в силу теоремы 4 и условия 2 имеем

$$|\hat{V}^\beta_\varkappa(t,x,v,0)| \leqslant |v| + \frac{e}{m_\beta}\int\limits_0^t |\nabla_x\varphi_\varkappa(\hat{X}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0))|\,d\tau \leqslant \rho + \frac{eT^\beta}{m_\beta}k_1\|\mathring{f}^\beta\|.$$

Неравенство (84) доказано. Проинтегрировав (84) от 0 до T^β по t, получим (85). Лемма доказана.

Замечание 4. Положив в (85) $x_1^\beta \in (G\times\{-d\})\bigcup(G\times\{d\})$, будем иметь

$$\frac{d}{2} < |x_1^\beta - x| \leqslant \left(\rho + \frac{eT}{m_{-1}}k_1\max_\beta\|\mathring{f}^\beta\|\right)T.$$

Условие 4. Имеет место неравенство

$$\frac{d}{2} > \left(\rho + \frac{eT}{m_{-1}}k_1\max_\beta\|\mathring{f}^\beta\|\right)T.$$

Если выполняется условие 4, то траектория частицы сглаженной системы Власова–Пуассона, находящейся в момент времени $\tau = 0$ в точке (x, v), не может достичь оснований цилиндра в момент времени $\tau = t \leqslant T$. Другими словами,

$$\hat{S}^\beta_\varkappa(t,x,v,0)\bigcap((G\times\{-d\}\times\mathbb{R}^3)\bigcup(G\times\{d\}\times\mathbb{R}^3)) = \varnothing.$$

Таким образом, если выполняется условие 4, то порождающие характеристики сглаженной системы уравнений Власова–Пуассона не пересекаются с основаниями цилиндра $Q = G\times$ $\times(-d, d)$.

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется следующее

Условие 5. Пусть $B \in \hat{C}^1(\bar{Q})$ и пусть $B(x) = (0,0,b)$ для $x\in\bar{Q}_{\delta/2}$, где

$$\frac{4c}{e\delta}(\rho m_{+1} + eTk_1\max_\beta\|\mathring{f}^\beta\|) < b, \tag{87}$$

$k_1 > 0$ – константа из неравенства (84).

Введём матрицу

$$R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Умножение на матрицу $R(\theta)$ соответствует вращению на угол θ на плоскости. Следующее утверждение позволяет применить свойства этого оператора к исследованию траекторий заряженных частиц при наличии ненулевого магнитного поля в (36). В работе [29] доказаны следующие свойства матрицы $R(\theta)$.

Лемма 11.

a) $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1+\theta_2)$, $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$;

b) $R(\theta)^m = R(m\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{Z}$;

c) $\dfrac{d}{d\theta}R(\theta) = R(\pi/2)R(\theta) = R(\theta+\pi/2)$, $\theta\in\mathbb{R}$;

d) $|R(\theta)x| = |x|$, $\theta\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^2$;

e) $\exp(tR(\theta)) = \exp(t\cos\theta)R(t\sin\theta)$.

Обозначим $x' = (x_1, x_2)$ и $X^{\beta\prime}_\varkappa(x,v,\tau) = (X^\beta_{\varkappa,1}(x,v,\tau), X^\beta_{\varkappa,2}(x,v,\tau))$.

Следующий результат является обобщением леммы 3.3 из [29] (см. также [30]).

Лемма 12. *Пусть выполняются условие 2 и условия 4, 5 с константой* $k_1 = c_3/\varkappa^3$, *где* $c_3 > 0$ *– постоянная из неравенства (76).*

Тогда порождающие характеристики $\hat{S}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)$, $(x,v,0)\in\Lambda_3$, $0\leqslant\tau<T$, *сглаженной системы (35), (36) для каждого* $0<\varkappa<1$ *обладают следующими свойствами: если* $x'\in$ $\in G_{\delta'}$, $\delta'\geqslant\delta$, $v\in B_\rho$, *то* $T^\beta = T$ *и* $|\hat{X}^{\beta\prime}_\varkappa(\tau,x,v,0) - x'| < \delta/2$, $\hat{V}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)\in B_{\rho_1}$ *для всех* $0\leqslant\tau<T$, *где*

$$\rho_1 = \rho + \frac{eT}{m_{-1}}k_1\max_\beta\|\mathring{f}^\beta\|.$$

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$, *где* $c_4 > 0$ – *постоянная из неравенства (77), не зависящая от* $\varkappa$, *то порождающие характеристики* $\hat{S}^{\beta}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0)$, $(x, v, 0) \in \Lambda_3$, $0 \leqslant \tau < T$, *системы (35), (36) удовлетворяют тем же свойствам равномерно по всем* $0 < \varkappa < 1$.

Доказательство. 1. Докажем, что

$$T^{\beta} = T, \tag{88}$$

$$|\hat{X}^{\beta\prime}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0) - x'| < \delta/2 \quad \text{для всех } \tau \in [0, T). \tag{89}$$

При этом если выполняются условия 2, 4, 5 с константой $k_1 = c_3/\varkappa^3$, то соотношения (88), (89) справедливы для каждого $0 < \varkappa < 1$, удовлетворяющего условиям 4 и 5.

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$ ($c_4 > 0$ не зависит от $\varkappa$), то соотношения (88), (89) справедливы для всех $0 < \varkappa < 1$.

Предположим противное: либо $T^{\beta} = t^{\beta}_1 < T$, либо $|\hat{X}^{\beta\prime}_{\varkappa}(\tau_0, x, v, 0) - x'| \geqslant \delta/2$ для некоторого $\tau_0 \in [0, T)$.

Заметим, что неравенство $t^{\beta}_1 := T^{\beta} < T$ влечёт за собой выполнение соотношения

$$\lim_{\tau \to T^{\beta} - 0} \operatorname{dist}(X^{\beta\prime}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0), \partial G) = 0.$$

Следовательно, $|X^{\beta\prime}_{\varkappa}(\tau_0, x, v, 0) - x'| \geqslant \delta/2$ для некоторого $\tau_0 \in [0, T^{\beta})$.

Поскольку $\hat{X}^{\beta\prime}_{\varkappa}(0, x, v, 0) = x'$, то для некоторого τ_1, $0 < \tau_1 \leqslant \tau_0 < T^{\beta}$, имеем

$$|\hat{X}^{\beta\prime}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0) - x'| = \delta/2, \tag{90}$$

$$|\hat{X}^{\beta\prime}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0) - x'| < \delta/2, \quad \tau \in [0, \tau_1). \tag{91}$$

Из (90), (91) и условия 4 следует, что порождающие характеристики $\hat{S}^{\beta}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0)$ не пересекаются с границей $\partial Q \times \mathbb{R}^3$ при $\tau \in [0, \tau_1]$, т.е. $\hat{S}^{\beta}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0) = S^{\beta}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0)$, $\tau \in [0, \tau_1]$. Поэтому в силу условия 5 мы можем записать уравнение характеристик (36) в виде

$$\frac{dV^{\beta}_{\varkappa}(\tau)}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_{\beta}} \nabla_x \varphi_{\varkappa}(X^{\beta}_{\varkappa}, \tau) + \frac{\beta e}{m_{\beta} c} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^{\beta}_{\varkappa}(\tau), \quad \tau \in (0, \tau_1).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} V^{\beta}_{\varkappa,1}(\tau) \\ V^{\beta}_{\varkappa,2}(\tau) \end{pmatrix} + \frac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} V^{\beta}_{\varkappa,1}(\tau) \\ V^{\beta}_{\varkappa,2}(\tau) \end{pmatrix} = -\frac{\beta e}{m_{\beta}} \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_{\varkappa}(X^{\beta}_{\varkappa}, \tau), \quad \tau \in (0, \tau_1).$$

Умножив последнее уравнение на $\exp\left(\tau \dfrac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, получим равенство

$$\frac{d}{d\tau}\left[\exp\left(\tau \frac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} V^{\beta}_{\varkappa,1}(\tau) \\ V^{\beta}_{\varkappa,2}(\tau) \end{pmatrix}\right] =$$

$$= -\frac{\beta e}{m_{\beta}} \exp\left(\tau \frac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_{\varkappa}(X^{\beta}_{\varkappa}, \tau), \quad \tau \in (0, \tau_1). \tag{92}$$

Проинтегрировав (92) от 0 до t, $t \in (0, \tau_1)$, будем иметь

$$\exp\left(t \frac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} V^{\beta}_{\varkappa,1}(t) \\ V^{\beta}_{\varkappa,2}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\frac{\beta e}{m_{\beta}} \int_0^t \exp\left(\tau \frac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_{\varkappa}(X^{\beta}_{\varkappa}, \tau)\, d\tau.$$

Из леммы 11 (см. п. e)) следует, что

$$\exp\left(\tau\frac{\beta eb}{m_\beta c}R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(\tau\frac{\beta eb}{m_\beta c}\cos\frac{\pi}{2}\right)R\left(\tau\frac{\beta eb}{m_\beta c}\sin\frac{\pi}{2}\right) = R\left(\tau\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right).$$

Умножив предыдущее уравнение на $R(-t\beta eb/(m_\beta c))$, получим

$$\begin{pmatrix} V^\beta_{\varkappa,1}(t) \\ V^\beta_{\varkappa,2}(t) \end{pmatrix} = R\left(-t\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_0^t R\left((\tau-t)\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X^\beta_\varkappa,\tau)\,d\tau.$$

Поэтому из (35) имеем

$$\begin{pmatrix} X^\beta_{\varkappa,1}(\tau_1) \\ X^\beta_{\varkappa,2}(\tau_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + I_1 + I_2, \tag{93}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^{\tau_1} R\left(-t\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}dt, \quad I_2 = -\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^t R\left((\tau-t)\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X^\beta_\varkappa,\tau)\,d\tau dt.$$

Вычислим I_1 и I_2. В силу леммы 11 (см. п. c)) мы имеем

$$R\left(-t\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) = -\frac{m_\beta c}{\beta eb}\frac{d}{dt}\left(R\left(-t\frac{\beta eb}{m_\beta c} - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{m_\beta c}{\beta eb}\left[-R\left(-t\frac{\beta eb}{m_\beta c} - \frac{\pi}{2}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{t=\tau_1}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{m_\beta c}{\beta eb}\left\{-R\left(-\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c} - \frac{\pi}{2}\right) + R\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{m_\beta c}{\beta eb}\left\{-R\left(-\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) + R(0)\right\}R\left(-\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{m_\beta c}{\beta eb}\begin{pmatrix} 1-\cos\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) & -\sin\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) \\ \sin\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) & 1-\cos\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{m_\beta c}{\beta eb}\begin{pmatrix} \sin\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) & 1-\cos\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) \\ -\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\right) & \sin\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{m_\beta c}{\beta eb}\begin{pmatrix} \beta\sin\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)v_1 + \left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)v_2 \\ -\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)v_1 + \beta\sin\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)v_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$|I_1| = \frac{m_\beta c}{eb}\left(\left(\beta\sin\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)v_1 + \left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)v_2\right)^2 +\right.$$

$$+\left(-\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)v_1+\beta\sin\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)v_2\right)^2\Bigg)^{1/2}=$$

$$=\frac{m_\beta c}{eb}\left((v_1^2+v_2^2)\left(\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)^2+\sin^2\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{m_\beta c}{eb}|v|\sqrt{2}\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)^{1/2}\leqslant\frac{2c}{eb}m_{+1}|v|. \tag{94}$$

С другой стороны, используя лемму 11 (см. п. с)), видим, что

$$I_2=-\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_0^{\tau_1}\left\{\int\limits_\tau^{\tau_1}R\left((\tau-t)\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)dt\right\}\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\left\{R\left((\tau-\tau_1)\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)-R(0)\right\}R\left(-\frac{\pi}{2}\right)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\begin{pmatrix}\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)-1 & -\beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\\ \beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right) & \cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_2}\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\begin{pmatrix}\beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right) & \cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)-1\\ 1-\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right) & \beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_2}\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\begin{pmatrix}\beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_1}+\left(\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)-1\right)\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_2}\\ \left(1-\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_1}+\beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_2}\end{pmatrix}d\tau.$$

Тогда аналогично (94) имеем

$$|I_2|=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\left(\left(\left(1-\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)^2+\sin^2\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(\frac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_2}\right)^2\right)\right)^{1/2}d\tau=$$

$$=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\left(\left(1-\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)^2+\sin^2\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)^{1/2}|\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}|\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)|\,d\tau\leqslant\frac{2c}{b}T|||\nabla\varphi_\varkappa|||_{0,T}. \tag{95}$$

Из (90), (93)–(95) и теоремы 4 следует, что

$$\frac{\delta}{2}=|X_\varkappa^{\beta'}(\tau_1,x,v,0)-x'|\leqslant|I_1|+|I_2|\leqslant\frac{2c}{eb}(\rho m_{+1}+eT|||\nabla\varphi_\varkappa|||_{0,T})\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c}{eb}(\rho m_{+1} + ek_1 T \max_\beta \|\mathring{f}^\beta\|). \tag{96}$$

С другой стороны, (84) влечёт за собой неравенство

$$\frac{2c}{eb}(\rho m_{+1} + ek_1 T \max_\beta \|\mathring{f}^\beta\|) < \frac{\delta}{2}.$$

Это противоречит (96). Таким образом, доказано, что $T^\beta(x,v) = T$ и $|X_\varkappa^{'\beta}(\tau,x,v,0) - x'| < \delta/2$ для всех $\tau \in [0,T)$.

2. В силу леммы 10 $|V_\varphi^\beta(x,v,t)| < \rho_1$ для всех $x' \in G_{\delta'}$, $v \in B_\rho$ и $t \in [0,T)$. Лемма доказана.

Аналогично лемме 12 можно доказать следующее утверждение.

Лемма 13. *Пусть выполняются условие 2 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_3/\varkappa^3$, где $c_3 > 0$ – постоянная из неравенства (76).*

Тогда порождающие характеристики $\hat{S}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t)$, $(x,v,t) \in \Lambda_1$, $0 \leqslant \tau < t < T$, сглаженной системы (35), (36) для каждого $0 < \varkappa < 1$ обладают следующими свойствами: если $x' \in G_{\delta'}$, $\delta' \geqslant \delta$, $v \in B_{\rho_1}$, то на полуинтервале $[0,t)$ не существует моментов отражения t_{-1}^β и $|\hat{X}_\varkappa^{\beta'}(\tau,x,v,t) - x'| < \delta/2$, $\hat{V}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t) \in B_{\rho_2}$ для всех $0 \leqslant \tau < T$, где

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{ek_1 T}{m_{-1}} \max_\beta \|\mathring{f}^\beta\|.$$

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$, где $c_4 > 0$ – постоянная из неравенства (77), не зависящая от $\varkappa$, то порождающие характеристики $\hat{S}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t)$, $(x,v,t) \in \Lambda_1$, $0 \leqslant \tau < t < T$, системы (35), (36) удовлетворяют тем же свойствам равномерно по всем $0 < \varkappa < 1$.

Обозначим $D_0^1 = D_0^1(\varkappa) := (Q_{3\delta/2} \bigcup B_{\lambda_1}) \times B_{\rho_1}$, где $\lambda_1 = \lambda + T\rho_1$.

Лемма 14. *Пусть выполняются условия 2 и 4, 5 с константой $k_1 = c_3/\varkappa^3$, где $c_3 > 0$ – постоянная из неравенства (76).*

Тогда для каждого $0 < \varkappa < 1$ имеем

$$\operatorname{supp} \mathring{f}^\beta(\hat{S}_\varkappa^\beta(0,x,v,t)) \subset D_0^1(\varkappa), \quad 0 < t < T.$$

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$, где $c_4 > 0$ – постоянная из неравенства (77), не зависящая от $\varkappa$, то для всех $0 < \varkappa < 1$

$$\operatorname{supp} \mathring{f}^\beta(\hat{S}_\varkappa^\beta(0,x,v,t)) \subset D_0^1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где D_0^1 не зависит от $\varkappa$.

Доказательство. В силу леммы 12 и замечания 4 достаточно показать, что $S_\varkappa^\beta(t,x,v,0) = \hat{S}_\varkappa^\beta(t,x,v,0) \in D_0^1$ для всех $(x,v) \in \operatorname{supp} \mathring{f}^\beta$, $(x,v,0) \in \Lambda_3$. Согласно условию 2 $\operatorname{supp} \mathring{f}^\beta \subset D_0$. Тогда из леммы 12 следует, что $S_\varkappa^\beta(t,x,v,0) \in Q_{3\delta/2} \times B_{\rho_1}$. По условию $x \in B_\lambda$, поэтому, так как $|V_\varkappa^\beta(t,x,v,0)| < \rho_1$, $0 < t < T$, из равенства $\lambda_1 = \lambda + T\rho_1$ получим соотношения

$$|X_\varkappa^\beta(t,x,v,0)| \leqslant |x| + \int_0^t |V_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0)|\,d\tau < \lambda_1.$$

Лемма доказана.

Определим функцию $f_\varkappa^\beta(x,v,t)$ по формуле

$$f_\varkappa^\beta(x,v,t) = \begin{cases} \mathring{f}^\beta(S_\varkappa^\beta(0,x,v,t)), & (x,v) \in D_0^1, \quad 0 \leqslant t < T, \\ 0, & (x,v) \in (Q \times \mathbb{R}^3) \setminus D_0^1, \quad 0 \leqslant t < T. \end{cases} \tag{97}$$

В силу леммы 13 $\operatorname{supp} \mathring{f}^\beta(S^\beta_\varkappa(0,x,v,t)) \subset D^1_0$. Следовательно, используя метод характеристик, непрерывную дифференцируемость отображения $S^\beta_\varkappa(0,x,v,t)$ по x, v, t и условие 2, мы видим, что существует единственное классическое решение задачи (26), (30)–(32) с условиями (33), (34) в $C^1(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T))$ с носителем по x, v в D^1_0. Это решение определяется формулой (97).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия 2–5. Тогда существует слабое решение* $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, *системы (52)–(55), при этом* $\operatorname{supp}_{x,v} f^\beta(x,v,t) \subset \bar{D}^1_0$ *для всех* $t \in [0,T)$.

Доказательство. В силу теоремы 3 существует слабое решение $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, задачи (52)–(55). По лемме 6 найдётся подпоследовательность $f^\beta_{\varkappa_n} \rightharpoonup f^\beta$ в $(L_p(Q\times\mathbb{R}^3), \sigma(p,p'))$, где $p, p' \in [1,\infty]$, $1/p + 1/p' = 1$, равномерно по $t \in I$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что для любой функции $\psi \in \mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\varphi(x,v)\,dx\,dv \to \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} f^\beta(x,v,t)\varphi(x,v)\,dx\,dv$$

при $\varkappa_n \to 0$ равномерно по $t \in I$.

Пусть теперь $\varphi \in \mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$ – произвольная функция такая, что $\varphi(x,v) = 0$ при $(x,v) \in D^1_0$. По доказанному $\operatorname{supp}_{x,v} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t) \subset \bar{D}^1_0$, $t \in I$. Следовательно,

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\varphi(x,v)\,dx\,dv = 0$$

для всех указанных φ. Таким образом,

$$\operatorname{supp}_{x,v} f^\beta(x,v,t) \subset \bar{D}^1_0, \quad t \in I.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00392).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // Журн. эксп. и теор. физики. 1938. Т. 8. № 3. С. 291–318.
2. *Власов А.А.* Теория многих частиц. М., 1950.
3. *Ландау Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы // Журн. эксп. и теор. физики. 1946. Т. 16. С. 574–586.
4. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева. Вып. 11. М., 1982.
5. Курс теоретической физики / Под ред. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица. Т. 10. Физическая кинетика. М., 1979.
6. *Миямото К.* Основы физики плазмы и управляемого синтеза. М., 2007.
7. *Alexandre R.* Weak solutions of the Vlasov–Poisson initial boundary value problem // Math. Meth. Appl. Sci. 1993. V. 16. № 8. P. 587–607.
8. *Арсеньев А.А.* Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 136–147.
9. *Арсеньев А.А.* О существовании обобщённых и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1253–1266.
10. *Bardos C., Degond P.* Global existence for the Vlasov–Poisson equation in 3 space variables with small initial data // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéare. 1985. V. 2. № 2. P. 101–118.
11. *Batt J.* Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics // J. Differ. Equat. 1977. V. 25. № 3. P. 342–364.
12. *Ben Abdallah N.* Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov–Poisson system // Math. Meth. Appl. Sci. 1994. V. 17. № 6. P. 451–476.

13. *Di Perna R.J., Lions P.L.* Solutions globales d'équations du type Vlasov–Poisson // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1988. V. 307. № 12. P. 655–658.
14. *Добрушин Р.Л.* Уравнения Власова // Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 2. С. 48–58.
15. *Guo Y.* Regularity for the Vlasov equations in a half space // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. № 1. P. 255–320.
16. *Horst E., Hunze R.* Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation // Math. Meth. Appl. Sci. 1984. V. 6. № 1. P. 262–279.
17. *Hwang H.J., Velázquez J.J.L.* On global existence for the Vlasov–Poisson system in a half space // J. Differ. Equat. 2009. V. 247. № 6. P. 1915–1948.
18. *Козлов В.В.* Обобщённое кинетическое уравнение Власова // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63. № 4. С. 93–130.
19. *Lions P.L., Perthame B.* Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov–Poisson system // Invent. Math. 1991. V. 105. № 1. P. 415–430.
20. *Маслов В.П.* Уравнения самосогласованного поля // Соврем. проблемы математики. М., 1978. Т. 11. С. 153–234.
21. *Mouhot C., Villani C.* On Landau damping // Acta Math. 2011. V. 207. № 1. P. 29–201.
22. *Pfaffelmoser K.* Global classical solutions of the Vlasov–Poisson system in three dimensions for general initial data // J. of Differ. Equat. 1992. V. 95. № 2. P. 281–303.
23. *Schäffer J.* Global existence of smooth solutions to the Vlasov–Poisson system in three dimensions // Comm. Part. Differ. Equat. 1991. V. 16. № 8–9. P. 1313–1335.
24. *Weckler J.* Zum Anfangs-Randwertproblem des Vlasov–Poisson-Systems. Dissertation, Universität München, 1994.
25. *Weckler J.* On the initial-boundary-value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability // Ach. Rational Mech. Anal. 1995. V. 130. № 2. P. 145–161.
26. *Скубачевский А.Л.* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона в полупространстве // Докл. АН СССР. 2012. Т. 443. № 4. С. 431–434.
27. *Скубачевский А.Л.* Смешанные задачи для уравнений Власова–Пуассона в полупространстве // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 204–232.
28. *Skubachevskii A.L.* Nonlocal elliptic problems in infinite cylinder and applications // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. S. 2016. V. 9. № 3. P. 847–868.
29. *Скубачевский А.Л., Tsuzuki Y.* Классические решения уравнений Власова–Пуассона с внешним магнитным полем в полупространстве // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 3. С. 536–552.
30. *Беляева Ю.О., Скубачевский А.Л.* Об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2018. Т. 477. С. 12–34.
31. *Belyaeva Yu.O., Gebhard B., Skubachevskii A.L.* A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations // Kinetic and Related Models. 2021. V. 14. № 2. P. 257–282.
32. *Скубачевский А.Л.* Априорная оценка решений смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона с однородным внешним магнитным полем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1683–1687.
33. *Grüter M., Widmann K.-O.* The Green function for uniformly elliptic equations // Manuscripta Mathematica. 1982. V. 37. P. 303–342.
34. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.

Российский университет дружбы народов
имени Патриса Лумумбы, г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 20.08.2023 г.
После доработки 29.08.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.