

УДК 517.968.48

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ НА ВСЕЙ ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

© 2023 г. А. А. Давыдов, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Для специальной системы интегральных уравнений свёрточного типа с монотонной и выпуклой нелинейностью, естественно возникающей при поиске стационарных или предельных состояний в различных динамических моделях прикладного характера, например в моделях распространения эпидемий, доказаны теоремы существования либо отсутствия нетривиального ограниченного решения с пределами на $\pm\infty$ в зависимости от этих значений и структуры матричного ядра исследуемой системы. Также изучен вопрос единственности такого решения при его наличии. Приведены конкретные примеры систем, параметры которых удовлетворяют ограничениям сформулированных теорем.

DOI: 10.31857/S0374064123110055, EDN: PDZECG

Введение. В настоящей работе изучается существование нетривиального решения системы нелинейных интегральных уравнений типа свёртки

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j(f_j(t)) dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

относительно искомой ограниченной на числовой прямой вектор-функции $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, имеющего конечные пределы на $\pm\infty$, где T – знак транспонирования. При этом предполагается, что матричное ядро $K := K(x) = (K_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ (здесь и далее, если не оговорено противное, индексы i и j изменяются от 1 до n) обладает следующими свойствами:

а) симметрично $K = K^T$ и чётно $K(-x) = K(x)$;

б) элементы ядра положительны, непрерывны, ограничены и интегрируемы на всей прямой, при этом спектральный радиус матрицы $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x) dx$, равен единице;

с) элементы ядра монотонно убывают при удалении от нуля, а $\int_{-\infty}^{\infty} |x| K_{ij}(x) dx < +\infty$.

В силу свойств а), б) и теоремы Перрона (см. [1, с. 260]) у матрицы A существует положительный собственный вектор с собственным числом единица – спектральным радиусом этой матрицы. Зафиксируем такой вектор и обозначим его через η .

Понятно, что разрешимость системы (1) может зависеть и от функций G_j и λ_j на прямой. Относительно первых будем предполагать, что каждая из них:

А) непрерывная и монотонно возрастающая на всей прямой;

В) строго выпуклая вверх на положительной полуоси, $G_i(\eta_i) = \eta_i$;

С) нечётная.

И пусть каждая из функций λ_i :

Г) непрерывна, положительна, не превосходит единицы и отделена от нуля;

Д) имеет единичные пределы на $\pm\infty$ и интегрируема на прямой разностью $1 - \lambda_i$.

Положим $\epsilon_i = \inf_{x \in \mathbb{R}} \lambda_i(x)$. В силу Г) имеем $\epsilon_i > 0$.

При различных значениях параметров K , G_j и λ_j система (1) естественно возникает в различных разделах математической физики, в эконометрике, в математической биологии. Например, скалярные и векторные интегральные уравнения такого типа встречаются в кинетической теории газов (при изучении нелинейного интегро-дифференциального уравнения

Больцмана в рамках модифицированной модели Бхатнагара–Гросса–Крука), в теории нелинейного переноса излучения (в неоднородных средах и в спектральных линиях), в динамической теории p -адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн (для скалярного поля тахионов), в математической теории распределения дохода (в рамках модифицированной нелинейной модели Саргана) и в математической теории распространения эпидемических заболеваний (в рамках модели Дикмана–Капера) (см. [2–12]). При единичных λ_i существование и единственность ограниченного монотонно возрастающего нечётного непрерывного решения системы (1) с граничными условиями $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_i(x) = \pm\eta_i$ обсуждались в работах [13] и [14], а при $\lambda_i(x) \geq 1$ аналогичные вопросы изучались в [15]. Отметим также, что скалярные аналоги системы (1) достаточно подробно исследованы в статьях [16–20] при различных ограничениях на параметры системы.

Как отмечено выше, мы ищем решение системы (1) с конечными пределами на бесконечности. Обозначим

$$\gamma_i := \lim_{x \rightarrow -\infty} f_i(x), \quad \beta_i := \lim_{x \rightarrow +\infty} f_i(x).$$

Сначала вопрос существования или отсутствия нетривиального решения этой системы будет исследован при единичных значениях λ_j в следующих случаях:

- $p_1)$ $\gamma_i \geq 0, \beta_i \geq 0;$
- $p_2)$ $\gamma_i \leq 0, \beta_i \leq 0;$
- $p_3)$ $\gamma_i < 0, \beta_i > 0;$
- $p_4)$ $\gamma_i > 0, \beta_i < 0.$

Покажем, что у системы (1) нет нетривиальных ограниченных решений в первых двух случаях (и при единичных λ_i), есть монотонное решение в последних двух (где применим результаты из [13] и [14]). Затем, при $\lambda_i(x) \neq 1$, докажем существование и единственность непрерывного положительного решения системы (1) с предельными условиями

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_i(x) = \eta_i$$

и интегрируемыми разностями $\eta_i - f_i$.

Далее будут приведены параметры системы (1), имеющие прикладной характер и удовлетворяющие всем условиям доказанных теорем.

1. Обозначения и вспомогательные факты.

1.1. Существование решения при $\lambda_j \equiv 1$. Наряду с системой (1), при единичных λ_j рассмотрим следующую систему интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром на полупрямой $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$:

$$Q_i(\varphi_i(x)) = \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t))\varphi_j(t) dt, \quad (2)$$

относительно неотрицательной ограниченной вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$, где Q_i – обратная функция к G_i на \mathbb{R}^+ . Согласно [13] система (2) имеет нетривиальное непрерывное неубывающее решение с нулевым значением в нуле, положительным вне нуля и предельным значением η на бесконечности и, кроме того, с интегрируемой разностью $\eta - \varphi$.

Прямые вычисления показывают, что функции

$$f_i(x) = \begin{cases} Q_i(\varphi_i(x)), & \text{если } x \geq 0, \\ -Q_i(\varphi_i(-x)), & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

являются решением исходной системы (1) при единичных λ_i . Это решение непрерывное, нечётное, неубывающее с предельными значениями $\pm\eta$ и интегрируемыми разностями $\pm\eta - f$ на $\pm\infty$ соответственно.

В силу нечётности функций G_j решением системы (1) является и вектор-функция $-f$, а также сдвиги $f^c(x) = f(x + c)$, $c \in \mathbb{R}$, найденного решения, в чем легко убедиться прямой проверкой (напомним, что рассматривается случай единичных параметров λ_j).

1.2. Априорная оценка ограниченного решения системы (1). Пусть f^* – ограниченное решение системы (1) на всей прямой. Положим

$$\alpha_i := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_i^*(x)|.$$

Имеет место

Лемма 1. При условиях $a), b), A)–C)$ и $I)$ имеет место следующая оценка сверху:

$$\alpha_i \leq \eta_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Доказательство. В силу $K_{ij} > 0$, нечётности и монотонности функций G_j из (1) имеем

$$\begin{aligned} |f_i^*(x)| &\leq \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) |G_j(f_j^*(t))| dt = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j(|f_j^*(t)|) dt \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n G_j(\alpha_j) \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(y) dy = \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j \frac{G_j(\alpha_j)}{\eta_j} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{G_j(\alpha_j)}{\eta_j} \right) \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j, \end{aligned}$$

откуда в силу определения супремума и равенства $A\eta = \eta$ получим

$$\alpha_i \leq M \eta_i \quad \text{с} \quad M = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{G_j(\alpha_j)}{\eta_j} \right). \tag{3}$$

Взяв в (3) вместо индекса i индекс j_0 , при котором достигается максимум M , имеем

$$\alpha_{j_0} \leq G_{j_0}(\alpha_{j_0}).$$

Так как $\alpha_{j_0} \geq 0$, то в силу непрерывности и строгой выпуклости функции G_{j_0} вверх на \mathbb{R}^+ из соотношения $G_{j_0}(\eta_{j_0}) = \eta_{j_0}$ получаем, что последнее неравенство возможно только при $\alpha_{j_0} \leq \eta_{j_0}$. Отсюда, с учётом монотонности функции G_{j_0} и (3), находим

$$\alpha_i \leq \eta_i \frac{G_{j_0}(\eta_{j_0})}{\eta_{j_0}} = \eta_i.$$

Лемма доказана.

1.3. Разрешимость вспомогательной системы уравнений. Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j G_j(\xi_j) \tag{4}$$

относительно неизвестного вектора ξ с неотрицательными компонентами, где

$$\varepsilon_j := \inf_{x \in \mathbb{R}} \lambda_j(x) \in (0, 1), \tag{5}$$

а матрица $A = (a_{ij})$ описана выше. Имеет место

Лемма 2. Пусть матрица A симметрична, имеет положительные компоненты и единичный спектральный радиус. Тогда система уравнений (4) имеет не более одного неотрицательного ненулевого решения, если выполнены условия $A), B)$ и (5).

Доказательство. Допустим противное, т.е. что система (4) имеет два различных таких решения ξ и $\tilde{\xi}$, и пусть $\xi_{i^*} \neq \tilde{\xi}_{i^*}$. Отметим, что все компоненты этих решений положительны, поскольку все слагаемые в правой части системы неотрицательны в силу наложенных условий, при этом слагаемое для положительной компоненты решения положительно. В силу положительности чисел ε_j и a_{ij} из (4) имеем

$$|\xi_i - \tilde{\xi}_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)|. \tag{6}$$

Используя симметричность матрицы A , из (6) найдём

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G_i(\tilde{\xi}_i) |\xi_i - \tilde{\xi}_i| &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G_i(\tilde{\xi}_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)| = \\ &= \sum_{j=1}^n \varepsilon_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)| \sum_{i=1}^n a_{ji} \varepsilon_i G_i(\tilde{\xi}_i) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \tilde{\xi}_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)| \end{aligned}$$

или

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (G_i(\tilde{\xi}_i) |\xi_i - \tilde{\xi}_i| - \tilde{\xi}_i |G_i(\xi_i) - G_i(\tilde{\xi}_i)|) \leq 0.$$

Обозначим $\Pi := \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : \xi_i \neq \tilde{\xi}_i\}$. Очевидно, что $\Pi \neq \emptyset$, так как $i^* \in \Pi$. Для индексов, не лежащих в Π , слагаемые в последней сумме равны нулю, а для оставшихся слагаемых эту сумму можно записать в виде

$$\sum_{i \in \Pi} \varepsilon_i \tilde{\xi}_i |\xi_i - \tilde{\xi}_i| \left(\frac{G_i(\tilde{\xi}_i)}{\tilde{\xi}_i} - \frac{|G_i(\xi_i) - G_i(\tilde{\xi}_i)|}{|\xi_i - \tilde{\xi}_i|} \right) \leq 0.$$

Но последнее неравенство невозможно, поскольку в силу строгой выпуклости функций G_i на положительной полуоси и равенстве нулю в нуле для всех $i \in \Pi$ имеем строгое неравенство (рис. 1 и 2)

$$\frac{G_i(\tilde{\xi}_i)}{\tilde{\xi}_i} > \frac{|G_i(\xi_i) - G_i(\tilde{\xi}_i)|}{|\xi_i - \tilde{\xi}_i|}.$$

Следовательно, $\Pi = \emptyset$ и $\xi = \tilde{\xi}$. Лемма доказана.

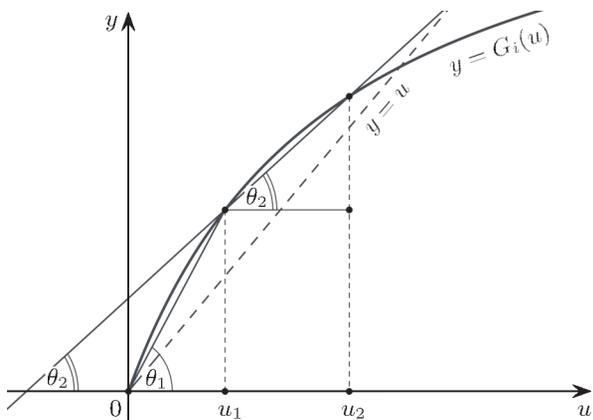


Рис. 1. Пересечение графика функции $y = G_i(u)$ с прямой, проходящей через точки $(0, 0)$ и $(u_1, G_i(u_1))$.

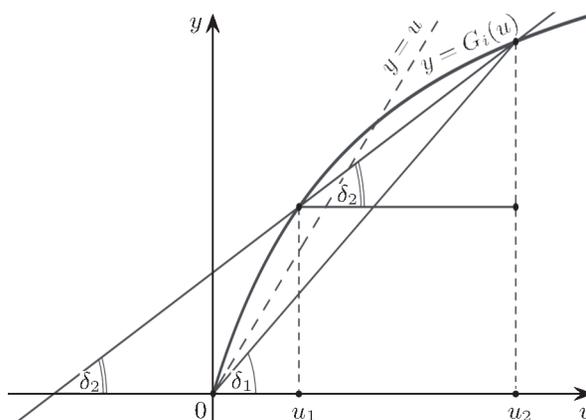


Рис. 2. Пересечение графика функции $y = G_i(u)$ с прямой, проходящей через точки $(0, 0)$ и $(u_2, G_i(u_2))$.

Теперь исследуем вопрос существования положительного решения системы (4). Справедлива

Лемма 3. *В условиях леммы 2 система уравнений (4) имеет положительное решение ξ , компоненты которого отделены от нуля и меньше соответствующих компонент η , если либо для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$*

$$\frac{G_k(u)}{u} \rightarrow +\infty \quad \text{при } u \rightarrow +0, \tag{7}$$

либо для всех этих индексов последний предел конечен (и равен $G'_k(0)$), а

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_j a_{kj} \eta_j G'_j(0) > \eta_k, \tag{8}$$

Замечание 1. В частности, компоненты искомого решения удовлетворяют двойному неравенству

$$c^* \eta_i \leq \xi_i < \eta_i \tag{9}$$

с некоторой положительной константой c^* .

Доказательство. В качестве нулевого приближения к такому решению возьмём $\xi^{(0)} = \eta$, а за последующие приближения возьмём итерации по системе (4):

$$\xi_i^{(p+1)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j G_j(\xi_j^{(p)}), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{10}$$

Эти последовательные приближения монотонно убывают, что легко проверить индукцией по p , поэтому для доказательства существования предела этих приближений (и тем самым нужного решения) достаточно показать, что они ограничены снизу положительной константой.

С этой целью рассмотрим следующие функции χ_i на промежутке $(0, 1]$:

$$\chi_i(v) := \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j a_{ij} \eta_j \frac{G_j(v\eta_j)}{v\eta_j} - 1, \quad v \in (0, 1].$$

Они непрерывны на $(0, 1]$ в силу непрерывности функций G_i ; монотонно убывают на $(0, 1]$, поскольку из-за строгой выпуклости вверх функций G_i на положительной полуоси отношение $G_j(u)/u$ монотонно убывает на луче $(0, +\infty)$; имеют отрицательные значения в единице:

$$\chi_i(1) = \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j a_{ij} \eta_j - 1 < \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j - 1 = 0,$$

поскольку $G_j(\eta_j) = \eta_j$, $\varepsilon_j \in (0, 1)$, а $A\eta = \eta$.

Далее, предел $\lim_{v \rightarrow 0+} \chi_i(v)$ существует. Он равен $+\infty$ при выполнении условия (7) и положителен при выполнении условия (8). В обоих случаях в силу монотонного убывания функции χ_i на $(0, 1]$ и отрицательности её значений в единице существует единственное значение $c_i \in (0, 1)$ такое, что $\chi_i(c_i) = 0$. Положим

$$c^* := \min_{1 \leq i \leq n} c_i$$

и покажем, что итерации $\xi_i^{(p)}$ из (10) удовлетворяют двойному неравенству (9). Для этого воспользуемся индукцией по номеру итерации. При $p = 0$ это верно в силу выбора первого приближения $\xi^{(0)} = \eta$. Пусть эта оценка верна для некоторого номера итерации p .

Отсюда, учитывая монотонность функций G_i и χ_i , имеем соотношения

$$\xi_i^{(p+1)} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\varepsilon_j G_j(\xi_j^{(p)}) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij}\varepsilon_j G_j(c^*\eta_j) = (\chi_i(c^*) + 1)c^*\eta_i \geq (\chi_i(c_i) + 1)c^*\eta_i = c^*\eta_i.$$

Следовательно, оценка (9) справедлива для итераций (10). Учитывая монотонное убывание этих итераций, получаем, что они имеют предел при $p \rightarrow \infty$ и предельный вектор является положительным решением системы (4). Лемма доказана.

1.4. Возможные значения $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ в случаях $p_1)$ – $p_4)$. Покажем, что в случаях $p_1)$ – $p_4)$ величины γ_i и β_i могут принимать только значения 0 и $\pm\eta_i$. Точнее, справедлива следующая

Лемма 4. *При выполнении условий а), б), А)–С) и II) величины γ_i и β_i могут принимать только значения:*

- 1) или нулевые, или η_i в любом сочетании в случае $p_1)$;
- 2) или нулевые, или $-\eta_i$ в любом сочетании в случае $p_2)$;
- 3) $\gamma_i = -\eta_i, \beta_i = \eta_i$ в случае $p_3)$;
- 4) $\gamma_i = \eta_i, \beta_i = -\eta_i$ в случае $p_4)$.

Всюду $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство. Если функция $F \in L_\infty(\mathbb{R})$ и существуют конечные пределы на $\pm\infty$, то для функции $T \in L_1(\mathbb{R})$ верно равенство

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x-t)F(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} T(y) dy \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x)$$

(см. [21]). Отсюда, а также в силу условий $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \lambda_j(x) = 1$ и А), получаем, что величины $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}G_j(\tau_j), \tag{11}$$

которая имеет единственное решение $\tau_i = \eta_i$ в классе неотрицательных ненулевых решений (см. лемму 2.1 в [14]).

Следовательно, справедливо утверждение 1) леммы 4. В силу нечётности функций G_i система (11) имеет и решение противоположного знака $\tau^* = -\eta$, и, аналогично, оно единственно в классе неположительных ненулевых решений. Отсюда получаем справедливость оставшихся утверждений леммы 4. Лемма доказана.

2. О знакопостоянных ограниченных решениях (1). Изучим существование нетривиальных ограниченных решений системы (1) при единичных λ_i . Возможные значения $\{\gamma_i\}$ и $\{\beta_i\}$, при которых могут существовать такие решения, указаны в лемме 4.

2.1. Отсутствие нетривиальных знакопостоянных решений. Имеет место

Теорема 1. *При единичных λ_i , выполнении условий а)–с), А)–С) и $G'_j(+0) < +\infty$ система (1) в классе знакопостоянных ограниченных функций имеет только нулевое решение, если $\gamma_i = \beta_i = 0, i = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Докажем для случая неотрицательных решений (для неположительных рассуждения аналогичны). Рассмотрим произвольное ограниченное неотрицательное непрерывное решение f системы (1) с нулевыми пределами на бесконечности. В силу его непрерывности и этих пределов существует число $\delta > 0$ такое, что при $|x| \geq \delta$ справедливы неравенства

$$0 \leq f_i(x) \leq \eta_i/2.$$

Покажем, что компоненты решения f интегрируемы. Это достаточно сделать на любом полуинтервале, примыкающем к бесконечности, возьмём $[\delta, +\infty)$ и произвольное $R, R > \delta$. В силу условий А)–С) для функции G_i справедливы оценки

$$G_i(u) \geq \frac{G_i(\eta_i/2)}{\eta_i/2} u \quad \text{при } u \in [0, \eta_i/2], \quad d_i := \frac{G_i(\eta_i/2)}{\eta_i/2} > 1. \tag{12}$$

Используя их, оценку из леммы 1, условия а)–с), А)–С) и теорему Фубини (см. [22, с. 317]), из (1) будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{\delta}^R (\eta_i - f_i(x)) dx = \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{\delta}^R \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j - G_j(f_j(t))) dt dx \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{\delta}^R \int_{-\infty}^0 K_{ij}(x-t) dt dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{\delta}^R \int_0^{\delta} K_{ij}(x-t) dt dx + \\ & + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{\delta}^R \int_R^{\infty} K_{ij}(x-t) dt dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{\delta}^R \int_{\delta}^R K_{ij}(x-t)(\eta_j - G_j(f_j(t))) dt dx \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^R \int_x^{\infty} K_{ij}(y) dy dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{\delta}^R \int_0^{\delta} K_{ij}(x-t) dt dx + \\ & + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^R \int_R^{\infty} K_{ij}(t-x) dt dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \eta_i a_{ij} \int_{\delta}^R (\eta_j - G_j(f_j(t))) dt dx \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{\infty} y K_{ij}(y) dy + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{\delta}^R \int_{x-\delta}^x K_{ij}(y) dy dx + \\ & + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^R \int_{R-x}^{\infty} K_{ij}(y) dy dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \int_{\delta}^R (\eta_j - G_j(f_j(t))) dt \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{\infty} y K_{ij}(y) dy + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{\delta}^R \int_{x-\delta}^{\infty} K_{ij}(y) dy dx + \\ & + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^R \int_t^{\infty} K_{ij}(y) dy dt + \sum_{j=1}^n \eta_j \int_{\delta}^R (\eta_j - d_j f_j(t)) dt \leq \\ & \leq 3 \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{\infty} y K_{ij}(y) dy + \sum_{j=1}^n \eta_j \int_{\delta}^R (\eta_j - d_j f_j(x)) dx, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^n \eta_i (d_i - 1) \int_{\delta}^R f_i(x) dx \leq 3 \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{\infty} y K_{ij}(y) dy.$$

(Аналогично можно доказать, что $f_i \in L_1(-\infty, 0)$.)

Отсюда при $R \rightarrow +\infty$ получаем интегрируемость компонент решения на луче $(\delta, +\infty)$, что и требовалось, а также неравенство

$$\sum_{i=1}^n \eta_i (d_i - 1) \int_{\delta}^{\infty} f_i(x) dx \leq 3 \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{\infty} y K_{ij}(y) dy.$$

Тогда в силу непрерывности и интегрируемости ядер K_{ij} и ограниченности и интегрируемости f_i из (1) в силу условия A), а также непрерывности свёртки суммируемых и ограниченных функций (см. [23]) заключаем, что компоненты f_i непрерывны.

Далее в силу $G'_j(+0) < +\infty$, $A\eta = \eta$, условия a) и теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) dx &= \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j(f_j(t)) dt dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} G_j(f_j(t)) dt = \sum_{j=1}^n \eta_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(f_j(t)) dt. \end{aligned}$$

Приравнявая крайние выражения в этой цепочке равенств, находим

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} (G_i(f_i(x)) - f_i(x)) dx = 0.$$

Подынтегральные выражения в последнем равенстве неотрицательны (поскольку $G_i(u) \geq u$ при $u \in [0, \eta_i]$ и $0 \leq f_i \leq \eta_i$) и непрерывны. Следовательно, это равенство возможно лишь при выполнении тождества

$$G_i(f_i(x)) \equiv f_i(x)$$

на всей прямой. Отсюда, учитывая $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_i(x) = 0$ и выполнение равенства $G_i(u) = u$ лишь при $u = 0, \pm\eta_i$, находим $f_i \equiv 0$. Теорема доказана.

Справедлива также

Теорема 2. При единичных λ_i и выполнении условий $a)-c$), $A)-C$) система (1) в классе знакопостоянных ограниченных функций имеет только постоянное решение $f = \pm\eta$, если соответственно $\gamma_i = \beta_i = \pm\eta_i$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Для определённости рассмотрим случай неотрицательных решений. Пусть f – любое решение системы (1) с предельным значением η на $\pm\infty$. Существует число $\Delta > 0$ такое, что при $|x| \geq \Delta$ справедливы неравенства $f_i(x) \geq \eta_i/2$. Отсюда и из леммы 1 при $|x| \geq \Delta$ имеем соотношения

$$\eta_i/2 \leq f_i(x) \leq \eta_i.$$

Далее в силу выпуклости вверх функций G_i на \mathbb{R}^+ , их нечётности и условия A) при $|x| \geq \Delta$ справедливы следующие неравенства (рис. 3):

$$\eta_i - G_i(f_i(x)) \leq q_i(\eta_i - f_i(x)), \quad q_i := \frac{\eta_i - G_i(\eta_i/2)}{\eta_i/2} \in (0, 1), \tag{13}$$

что легко проверить. Используя эти неравенства и рассуждая по аналогии с доказательством предыдущей теоремы, будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \eta_i (1 - q_i) \int_{\Delta}^{\infty} (\eta_i - f_i(x)) dx \leq 3 \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{\infty} y K_{ij}(y) dy.$$

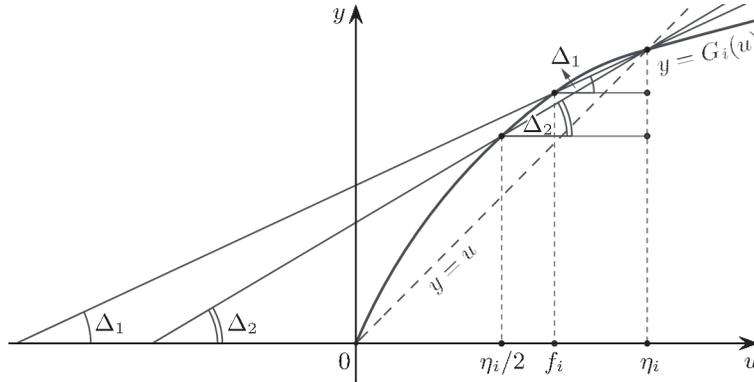


Рис. 3. Пересечение графика функции $y = G_i(u)$ с прямой, проходящей через точки $(\eta_i/2, G_i(\eta_i/2))$ и (η_i, η_i) .

Аналогично верно

$$\sum_{i=1}^n \eta_i (1 - q_i) \int_{-\infty}^{-\Delta} (\eta_i - f_i(x)) dx \leq 3 \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^0 K_{ij}(y)(-y) dy.$$

Отсюда вытекает, что функции $\eta_i - f_i$ интегрируемы на прямой.

Далее в силу системы (1) и условия $A\eta = \eta$ имеем равенство

$$\eta_i - f_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x - t)(\eta_j - G_j(f_j(t))) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Умножим обе его части на η_i , проинтегрируем результат по прямой и просуммируем по i . В результате, учитывая определение матрицы A , условие $A\eta = \eta$ и применяя теорему Фубини, получаем

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_i - f_i(x)) dx = \sum_{j=1}^n \eta_j \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_j - G_j(f_j(t))) dt$$

или

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} (G_i(f_i(x)) - f_i(x)) dx = 0.$$

Заключительные рассуждения те же, что и в доказательстве предыдущей теоремы, только теперь будем иметь $f_i(x) \equiv \eta_i$. Теорема доказана.

2.2. Об отсутствии знакопостоянных решений системы. Справедлива

Теорема 3. При единичных λ_j и выполнении условий а)–с) и А)–С) система (1) не имеет знакопостоянных ограниченных решений, если $\gamma_i = 0, \beta_i = \eta_i$ (либо $\gamma_i = 0, \beta_i = -\eta_i$, либо $\gamma_i = \eta_i, \beta_i = 0$, либо $\gamma_i = -\eta_i, \beta_i = 0$), $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Доказательство проведём лишь для первого случая, поскольку для остальных рассуждения аналогичны. Допустим противное, что при $\gamma_i = 0, \beta_i = \eta_i$ в условиях последней теоремы существует знакопостоянное ограниченное решение f системы (1), тогда оно неотрицательно и по условию

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_i(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_i(x) = \eta_i.$$

Отсюда получаем, что существует положительное число r такое, что

$$0 \leq f_i(x) \leq \frac{\eta_i}{2} \quad \text{при } x < -r, \quad \frac{\eta_i}{2} \leq f_i(x) \leq \eta_i \quad \text{при } x > r. \tag{14}$$

Теперь проведём рассуждения аналогично как в доказательстве теоремы 2 и получим, что

$$\eta_i - f_i \in L_1(0, +\infty). \tag{15}$$

Докажем, что $f_i \in L_1(-\infty, 0)$. Возьмём отрицательное число R . Учитывая $A\eta = \eta$, (12), (14), условия a)-c) и A)-C), из системы (1) будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r} (\eta_i - f_i(x)) dx \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r} \int_{-\infty}^R K_{ij}(x-t) dt dx + \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r} \int_R^{-r} K_{ij}(x-t)(\eta_j - G_j(f_j(t))) dt dx + \\ & + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r} \int_{-r}^0 K_{ij}(x-t) dt dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r} \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t) dt dx \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r} \int_{-\infty}^R K_{ij}(t-x) dt dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \eta_i a_{ij} \int_R^{-r} (\eta_j - G_j(f_j(t))) dt + \\ & + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{-r} \int_x^{x+r} K_{ij}(y) dy dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^x K_{ij}(y) dy dx \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r} \int_{-\infty}^0 K_{ij}(y) dy dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \eta_i a_{ji} \int_R^{-r} (\eta_j - G_j(f_j(t))) dt + \\ & + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{-r_1} \int_{-\infty}^{x+r} K_{ij}(y) dy dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^0 K_{ij}(y)(-y) dy \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r} \int_{-\infty}^z K_{ij}(y) dy dz + \sum_{j=1}^n \eta_j \int_R^{-r} (\eta_j - d_j f_j(t)) dt + 2 \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^0 K_{ij}(y)(-y) dy \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \int_R^{-r} (\eta_j - d_j f_j(t)) dt + 3 \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^0 K_{ij}(y)(-y) dy, \end{aligned}$$

откуда получим

$$\sum_{i=1}^n \eta_i (d_i - 1) \int_R^{-r} f_i(x) dx \leq 3 \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^0 K_{ij}(y)(-y) dy = 3 \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{\infty} K_{ij}(y)y dy. \tag{16}$$

Устремив в (16) число $R \rightarrow -\infty$, придём к включению $f_i \in L_1(-\infty, -r)$. Следовательно, в силу непрерывности f_i получаем нужное включение $f_i \in L_1(-\infty, 0)$. Отсюда и из (15) следует, что

$$f_j(x)(\eta_j - f_j(x)) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Из последнего включения, учитывая, что $f_j(x) \leq \eta_j$ на прямой и, следовательно, $f_j(x) \leq G_j(f_j(x))$ на прямой, получаем, что

$$f_j(x)(\eta_j - G_j(f_j(x))) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Умножим теперь обе части (1) на $(\eta_i - G_i(f_i(x)))$, проинтегрируем по прямой и просуммируем по всем i . Применяя к результату теорему Фубини с учётом условий $A\eta = \eta$ и а)–с), А)–С), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1-\infty}^n \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_i - G_i(f_i(x))) f_i(x) dx &= \sum_{i=1-\infty}^n \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_i - G_i(f_i(x))) \sum_{j=1-\infty}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j(f_j(t)) dt dx = \\ &= \sum_{j=1-\infty}^n \int_{-\infty}^{\infty} G_j(f_j(t)) \sum_{i=1-\infty}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) (\eta_i - G_i(f_i(x))) dx dt = \\ &= \sum_{j=1-\infty}^n \int_{-\infty}^{\infty} G_j(f_j(t)) \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i - \sum_{i=1-\infty}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ji}(t-x) G_i(f_i(x)) dx \right) dt = \sum_{j=1-\infty}^n \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_j - f_j(t)) G_j(f_j(t)) dt. \end{aligned}$$

Оставив крайние выражения в последней цепочке равенств, найдём

$$\sum_{i=1-\infty}^n \int_{-\infty}^{\infty} [(\eta_i - G_i(f_i(x))) f_i(x) - (\eta_i - f_i(x)) G_i(f_i(x))] dx = 0. \tag{17}$$

В силу непрерывности компоненты f_i и её пределов (0 и η_i на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно), существуют $x_i \in \mathbb{R}$ и $\delta_i > 0$ такие, что $0 < f_i(x_i) < \eta_i$ при $x \in I_i := (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$. Определим множества

$$W_i := \{x \in \mathbb{R} : f_i(x) \neq 0, f_i(x) \neq \eta_i\}.$$

Эти множества непусты, так как $I_i \subset W_i$, и имеют положительную меру (возможно, бесконечную). В силу леммы 1 имеем $0 \leq f_i \leq \eta_i$, поэтому на этом множестве

$$0 < f_i(x) < \eta_i.$$

Нетрудно видеть, что (17) равносильно равенству

$$\sum_{i=1}^n \int_{W_i} f_i(x)(\eta_i - f_i(x)) \left(\frac{\eta_i - G_i(f_i(x))}{\eta_i - f_i(x)} - \frac{G_i(f_i(x))}{f_i(x)} \right) dx = 0. \tag{18}$$

Из строгой выпуклости вверх функции G_i на \mathbb{R}^+ имеем

$$\frac{G_i(f_i(x))}{f_i(x)} > \frac{\eta_i - G_i(f_i(x))}{\eta_i - f_i(x)}, \quad x \in W_i.$$

Отсюда получаем, что неотрицательное подынтегральное выражение в равенстве (18) положительно на I_i , поэтому левая часть этого равенства положительна. Получили противоречие. Следовательно, наше допущение неверно и теорема доказана.

Замечание 2. Как известно, в одномерном случае система (1) при положительном первом моменте ядра и достаточно сильных ограничениях на нелинейность и ядро может иметь монотонно возрастающее положительное непрерывное и ограниченное на \mathbb{R} решение f с $f(-\infty) = 0$ и $f(+\infty) = \eta > 0$ (см., например, [11, 12]). Отсутствие такого решения для системы (1) обусловлено свойством чётности ядра K , при которой этот момент равен нулю.

Замечание 3. Вопрос существования или отсутствия знакопеременных и ограниченных на \mathbb{R} решений для случаев: 1) $\gamma_i = 0, \beta_i = \eta_i$; 2) $\gamma_i = \eta_i, \beta_i = 0$; 3) $\gamma_i = 0, \beta_i = -\eta_i$; 4) $\gamma_i = -\eta_i, \beta_i = 0$ остаётся открытым.

Замечание 4. Как было отмечено выше, в случаях p_3 и p_4) система (1) при единичных λ_i имеет знакопеременное нечётное и ограниченное решение.

3. Разрешимость системы при $\lambda_j \neq 1$.

3.1. Построение знакопостоянного ограниченного решения.

Теорема 4. При выполнении условий а)–с), А)–С), I), II) и $\lambda_j(x) \neq 1$ система (1) имеет положительное непрерывное и ограниченное на \mathbb{R} решение f с предельным значением η на $\pm\infty$ и интегрируемыми на прямой разностями $\eta_i - f_i, i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Для поиска решения рассмотрим последовательность итераций по системе (1):

$$f_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j(f_j^{(p)}(t)) dt, \quad f_i^{(0)}(x) \equiv \eta_i, \quad (19)$$

где $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Индукцией по p легко показать, что это убывающая последовательность, в частности, на прямой $f_i^{(p)}(x) \neq \eta_i$ при $p \geq 1$. Покажем, что эта последовательность ограничена снизу, а именно всюду

$$f_i^{(p)}(x) \geq \xi_i \quad (20)$$

при всех p , где ξ – единственное неотрицательное ненулевое решение системы уравнений (4) (см. леммы 2 и 3). Для этого воспользуемся индукцией по номеру итерации.

При $p = 0$ неравенство (20) справедливо в силу (9). Предположим, что оно имеет место при некотором возможном p . Отсюда и из (19) в силу условий I), А), В), а), б) с учётом (4) имеем

$$f_i^{(p+1)}(x) \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) G_j(\xi_j) \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) dt \geq \sum_{j=1}^n \varepsilon_j a_{ij} G_j(\xi_j) = \xi_i, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, наша последовательность итераций ограничена снизу и, таким образом, имеет предел f_i при $p \rightarrow +\infty$. Этот предел положителен, поскольку ограничения ξ_i снизу положительны, и ввиду предельной теоремы Б. Леви [22, с. 303] удовлетворяет системе (1). И итерации, и этот предел являются непрерывными функциями на прямой, так как таковыми являются функции λ_i, K_{ij} и G_i , есть условие I) и непрерывность свёртки суммируемых и ограниченных на прямой функций.

Покажем интегрируемость разности $\eta_i - f_i$. Имеем оценку

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta_i - f_i^{(p+1)}(x) &= \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) (\eta_j - \lambda_j(x) G_j(f_j^{(p)}(t))) dt \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j (1 - \lambda_j(x)) + \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) (\eta_j - G_j(f_j^{(p)}(t))) dt, \end{aligned}$$

из которой и из условий а)–с), А)–С), I) и II) индукцией по p получаем

$$\eta_i - f_i^{(p)} \in L_1(\mathbb{R}), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Из (4) в силу $\varepsilon_i \in (0, 1)$ имеем

$$0 < \xi_i < \sum_{j=1}^n a_{ij} G_j(\xi_j) \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} G_j(\eta_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j = \eta_i,$$

поэтому по аналогии с доказательствами теорем 1 и 3 находим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \eta_i(1 - l_i) \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_i - f_i^{(p+1)}(x)) dx \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \eta_j^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda_j(x)) dx + 6 \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{\infty} y K_{ij}(y) dy < +\infty, \end{aligned}$$

где $l_i := (\eta_i - G_i(\xi_i))/(\eta_i - \xi_i) \in (0, 1)$.

Теперь, устремив $p \rightarrow \infty$ в последних неравенствах (в их левой части), получаем их с f_i на месте $f_i^{(p+1)}$. Следовательно, интегрируемость $\eta_i - f_i$ на прямой имеет место.

Осталось показать, что η_i – предельное значение f_i на бесконечности. Для этого сначала систему (1) запишем в следующем виде:

$$\eta_i - f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j (1 - \lambda_j(x)) + \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x - t) (\eta_j - G_j(f_j(t))) dt. \tag{21}$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$, так как все λ_i имеют единственный предел на бесконечности в силу условия II). В интеграле оба множителя ограничены и интегрируемы на прямой: первый – по условию б), а второй – в силу неравенств

$$0 \leq \eta_j - G_j(f_j(x)) \leq \eta_j - f_j(x),$$

ограниченности и интегрируемости $\eta_j - f_j$. Следовательно, сам интеграл как свёртка этих функций стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$ (см. [24]). Отсюда, учитывая ограниченность λ_i , получаем, что правая часть в (21) стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$ и, следовательно, $f(x) \rightarrow \eta$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Теорема доказана.

Замечание 5. Единственность решения системы (1) в классе неотрицательных ограниченных функций с отделёнными от нуля значениями вблизи бесконечности доказывается методами работы [14].

Замечание 6. В силу нечётности функций G_i система (1) имеет также отрицательное решение f^* , $f^*(x) := -f(x)$.

4. Примеры. Приведём примеры функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$, $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ и $\{\lambda_j(x)\}_{j=1}^n$, удовлетворяющих соответствующим условиям доказанных теорем.

Примеры нелинейностей $G_j(u)$:

$g_1)$ $G_j(u) = \eta_j \sqrt[p_j]{u/\eta_j}$, $u \in \mathbb{R}$, где $p_j > 1$ – нечётные числа, $\eta_j > 0$, и удовлетворяют соотношениям $\sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j = \eta_i$;

$$g_2) G_j(u) = \begin{cases} \gamma_j(1 - e^{-u}), & \text{если } u \geq 0, \\ \gamma_j(e^u - 1), & \text{если } u < 0, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}, \text{ где } \gamma_j := \eta_j/(1 - e^{-\eta_j}) > 1;$$

$$g_3) G_j(u) = (u + \eta_j \sqrt[p_j]{u/\eta_j})/2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Подробно остановимся на примере $g_2)$. Сначала заметим, что

$$G_j(0) = 0, \quad G_j(\eta_j) = \eta_j. \tag{22}$$

Так как функция

$$G'_j(u) = \begin{cases} \gamma_j e^{-u}, & \text{если } u \geq 0, \\ \gamma_j e^u, & \text{если } u < 0, \end{cases}$$

непрерывна на всей числовой прямой и $G'_j(u) > 0$, $u \in \mathbb{R}$, то условие А) выполняется. Поскольку $G''_j(u) = -\gamma_j e^{-u} < 0$ при $u \in \mathbb{R}^+$, то в силу (22) заключаем, что условие В) также

справедливо. Выполнение условия $C)$ сразу следует из структуры примера $g_2)$. Заметим также, что $G'_j(+0) = G'_j(-0) = \gamma_j > 1$.

Примеры ядра $K(x) = \{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$:

$k_1)$ $K_{ij}(x) = a_{ij}e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$, $x \in \mathbb{R}$, где $a_{ij} = a_{ji} > 0$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и $r(A) = 1$;

$k_2)$ $K_{ij}(x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma_{ij}(s)$, $x \in \mathbb{R}$, где $\sigma_{ij}(s) = \sigma_{ji}(s)$ – монотонно возрастающие на $[a, b)$ функции, $0 < a < b \leq +\infty$, причём спектральный радиус матрицы

$$A = \left(2 \int_a^b \frac{1}{s} d\sigma_{ij}(s) \right)_{i,j=1}^n$$

равен единице.

Примеры функций $\lambda_j(x)$:

$\Lambda_1)$ $\lambda_j(x) = 1 - (1 - \varepsilon_j)e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_j \in (0, 1)$;

$\Lambda_2)$ $\lambda_j(x) = 1 - (1 - \varepsilon_j)e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_j \in (0, 1)$.

Отметим, что примеры $g_1)$ – $g_3)$, $k_1)$, $k_2)$, $\Lambda_1)$, $\Lambda_2)$ удовлетворяют условиям теорем 3, 4, а примеры $g_2)$, $k_1)$, $k_2)$, $\Lambda_1)$, $\Lambda_2)$ – теорем 1 и 2.

Следует также отметить, что примеры $g_1)$, $g_2)$, $k_1)$, $k_2)$ и $\Lambda_2)$ встречаются в теории p -адических струн, в эпидемиологии и в кинетической теории газов (см. [2, 3, 6, 7, 11, 12]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ланкастер П. Теория матриц. М., 1973.
2. Cercignani C. The Boltzmann equation and applications // Appl. Math. Sci. V. 67. New York, 1988.
3. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // Журн. теор. и мат. физики. 2016. Т. 189. № 2. С. 239–255.
4. Соболев В.В. Проблема Милна для неоднородной атмосферы // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 3. С. 558–561.
5. Енгибарян Н.Б. Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2. № 1. С. 31–36.
6. Владимиров В.С., Волович Я.И. О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // Журн. теор. и мат. физики. 2004. Т. 138. № 3. С. 355–368.
7. Arefeva I.Ya., Dragovic B.G., Volovich I. V. Open and closed p -adic strings and quadratic extensions of number fields // Phys. Lett. B. 1988. V. 212. № 3. P. 283–291.
8. Хачатрян Х.А. О разрешимости некоторых классов нелинейных сингулярных краевых задач, возникающих в теории p -адических открыто-замкнутых струн // Журн. теор. и мат. физики. 2019. Т. 200. № 1. С. 106–117.
9. Sargan J.D. The distribution of wealth // Econometrica. 1957. V. 25. № 4. P. 568–590.
10. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в задаче о распределении дохода // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 10. С. 1793–1802.
11. Diekmann O. Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection // J. of Math. Biology. 1978. V. 6. P. 109–130.
12. Diekmann O., Kapfer H.G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // Nonlin. Anal. Theory Math. Appl. 1978. V. 2. № 6. P. 721–737.
13. Хачатрян Х.А. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой // Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19. № 2. С. 164–181.
14. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. Об одной системе интегральных уравнений на всей прямой с выпуклой и монотонной нелинейностью // Изв. НАН Армении. Математика. 2022. Т. 57. № 5. С. 25–40.
15. Хачатрян Х.А., Петросян А.С. О разрешимости одной системы сингулярных интегральных уравнений с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой // Изв. вузов. Математика. 2021. Т. 1. С. 31–51.

16. *Арабаджян Л.Г.* Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // Изв. НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32. № 1. С. 21–28.
17. *Vanas J.* Integrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations // J. of Austral. Math. Soc. Ser. A. 1989. V. 46. № 1. P. 61–68.
18. *Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на всей прямой // Современ. математика. Фунд. направления. 2022. Т. 68. № 2. С. 376–391.
19. *Хачатрян Х.А.* Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свёртки с монотонной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 4. С. 198–207.
20. *Петросян А.С., Хачатрян Х.А.* О единственности решения одного класса интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром и с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой // Мат. заметки. 2023. Т. 113. № 4. С. 529–543.
21. *Енгибарян Н.Б.* Уравнения восстановления на полуоси // Изв. РАН. Сер. мат. 1999. Т. 63. № 1. С. 61–76.
22. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
23. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., 1975.
24. *Арабаджян Л.Г., Хачатрян А.С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свёртки // Мат. сб. 2007. Т. 198. № 7. С. 45–62.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Ереванский государственный университет,
Армения,
Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван

Поступила в редакцию 13.08.2023 г.
После доработки 13.08.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.