ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1515–1521

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.5

О СВЯЗИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА И УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. М. И. Гомоюнов

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой, движение которой описывается дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто, на минимум терминального показателя качества. Изучается связь между необходимым условием оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина и уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана с так называемыми дробными коинвариантными производными. Доказывается, что сопряжённая переменная из принципа максимума Понтрягина совпадает с точностью до знака с дробным коинвариантным градиентом функционала оптимального результата, вычисленным вдоль оптимального движения.

DOI: 10.31857/S0374064123110067, EDN: PEGKMT

1. Постановка задачи. Пусть $\alpha \in (0,1)$, $T > 0$ и $n, m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим динамическую систему, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau)) \tag{1}$$

при начальном условии

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Здесь $\tau \in [0,T]$ – время, $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ и $u(\tau) \in U \subset \mathbb{R}^m$ – состояние системы и управляющее воздействие в момент времени τ соответственно, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – начальное состояние системы, $({}^C D^\alpha x)(\tau)$ – левосторонняя дробная производная Капуто порядка α от функции $x(\cdot)$ в точке τ, определяемая равенством (см., например, [1, раздел 2.4; 2, раздел 3])

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int\limits_0^\tau \frac{x(\xi) - x(0)}{(\tau - \xi)^\alpha}\, d\xi,$$

где Γ – гамма-функция. Целью управления является минимизация показателя качества

$$J = \sigma(x(T)), \tag{3}$$

где $x(T)$ – терминальное состояние системы.

Всюду в статье предполагаем выполненными следующие условия:

(a) множество U является компактным подмножеством пространства $\mathbb{R}^m$;

(b) функция $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по первым двум переменным $\partial_\tau f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $\partial_x f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n \times n}$;

(c) для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ существует число $\lambda \geqslant 0$ такое, что

$$\|f(\tau, x, u) - f(\tau, x', u')\| \leqslant \lambda(\|x - x'\| + \|u - u'\|), \quad \tau \in [0,T], \quad (x,u), (x',u') \in K;$$

(d) существует число $c \geqslant 0$ такое, что

$$\|f(\tau, x, u)\| \leqslant c(1 + \|x\|), \quad \tau \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U;$$

(e) функция $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема.

Отметим, что пространство $\mathbb{R}^n$ (и аналогично $\mathbb{R}^m$) рассматривается со стандартным скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ и евклидовой нормой $\|\cdot\|$, а пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$, состоящее из матриц размера $n\times n$, – с соответствующей подчинённой (операторной) нормой.

Через $AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$ обозначим множество функций $x\colon[0,T]\to\mathbb{R}^n$, каждая из которых для некоторой своей измеримой (относительно меры Лебега на $[0,T]$) и существенно ограниченной функции $g\colon[0,T]\to\mathbb{R}^n$ представима в виде (см., например, [3, определение 2.3])

$$x(\tau)=x(0)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\tau\frac{g(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi,\quad \tau\in[0,T].$$

Здесь второе слагаемое – левосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α от функции $g(\cdot)$ в точке τ (см., например, [3, определение 2.1]).

Допустимым управлением считаем любую измеримую функцию $u\colon[0,T]\to U$. Множество всех таких управлений $u(\cdot)$ обозначим через $\mathcal{U}(0,T)$. Движение системы (1), (2), отвечающее управлению $u(\cdot)\in\mathcal{U}(0,T)$, определим как функцию $x(\cdot)\in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет начальному условию (2) и дифференциальному уравнению (1) при почти всех (п.в.) $\tau\in[0,T]$. Согласно, например, [4, теорема 2] (см. также [5, утверждение 2]) такое движение $x(\cdot)=x(\cdot\,;u(\cdot))$ существует и единственно. Задача оптимального управления (1)–(3) состоит в том, чтобы найти управление $u^0(\cdot)\in\mathcal{U}(0,T)$, для которого имеет место равенство

$$\sigma(x(T;u^0(\cdot)))=\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(0,T)}\sigma(x(T;u(\cdot))).$$

Такое управление $u^0(\cdot)$ и отвечающее ему движение $x^0(\cdot)=x(\cdot\,;u^0(\cdot))$ назовём оптимальными.

2. Принцип максимума Понтрягина. Сформулируем необходимое условие оптимальности в задаче (1)–(3) в форме принципа максимума Понтрягина (подробнее см. в [6]).

Пусть $u^0(\cdot)\in\mathcal{U}(0,T)$ – оптимальное управление, а $x^0(\cdot)=x(\cdot\,;u^0(\cdot))$ – соответствующее оптимальное движение. Рассмотрим интегральное уравнение (сопряжённое уравнение)

$$p(\tau)=-\frac{\partial_x\sigma(x^0(T))}{\Gamma(\alpha)(T-\tau)^{1-\alpha}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_\tau^T\frac{\partial_x f(\xi,x^0(\xi),u^0(\xi))^{\mathrm{т}}p(\xi)}{(\xi-\tau)^{1-\alpha}}\,d\xi,\quad \tau\in[0,T),\tag{4}$$

где $\partial_x\sigma(x^0(T))$ – вектор частных производных функции σ, вычисленных в точке $x^0(T)$, верхний индекс $^{\mathrm{т}}$ обозначает транспонирование. Пусть $C^{1-\alpha}([0,T),\mathbb{R}^n)$ – множество непрерывных функций $p\colon[0,T)\to\mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует своё число $R\geqslant 0$ такое, что

$$(T-\tau)^{1-\alpha}\|p(\tau)\|\leqslant R,\quad \tau\in[0,T).$$

Решение интегрального уравнения (4) определим как удовлетворяющую этому уравнению функцию $p(\cdot)\in C^{1-\alpha}([0,T),\mathbb{R}^n)$. Согласно, например, [4, теорема 1] и [7, теорема 5.3] (см. также [8, утверждение 1]) такое решение $p(\cdot)$ существует и единственно. Отметим, что в работе [6] вместо интегрального уравнения (4) рассматривается эквивалентная ему задача Коши для дифференциального уравнения с правосторонней дробной производной Римана–Лиувилля порядка α при подходящем краевом условии, заданном в терминальный момент времени T.

Теорема 1. *Пусть $u^0(\cdot)$ – оптимальное управление в задаче (1)–(3), $x^0(\cdot)$ – отвечающее ему оптимальное движение системы (1), (2). Тогда выполнено условие максимума*

$$\langle p(\tau),f(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau))\rangle=\max_{u\in U}\langle p(\tau),f(\tau,x^0(\tau),u)\rangle\quad \textit{при п.в.}\quad \tau\in[0,T],$$

где $p(\cdot)$ – решение сопряжённого уравнения (4).

3. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана. Начнём с определения функционала оптимального результата в задаче оптимального управления (1)–(3) (подробнее см. в [9]). Рассмотрим метрическое пространство (G, ρ_G), где множество G состоит из пар $(t, w(\cdot))$ таких, что $t \in [0, T]$ и $w(\cdot) \in AC^\alpha([0, t], \mathbb{R}^n)$, а метрика ρ_G задаётся равенством

$$\rho_G((t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot))) = |t - t'| + \max_{\tau \in [0,T]} \|w(\min\{\tau, t\}) - w'(\min\{\tau, t'\})\|, \quad (t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot)) \in G.$$

Точки $(t, w(\cdot)) \in G$ считаем допустимыми позициями системы (1), при этом функцию $w(\cdot)$ трактуем как историю движения этой системы на промежутке $[0, t]$. Пусть зафиксирована позиция $(t, w(\cdot)) \in G$. Обозначим через $\mathcal{U}(t, T)$ множество допустимых управлений на промежутке $[t, T]$, состоящее из измеримых функций $u\colon [t, T] \to U$. Под движением системы (1), отвечающим позиции $(t, w(\cdot))$ и управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t, T)$, понимаем функцию $x(\cdot) \in AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую начальному условию

$$x(\tau) = w(\tau), \quad \tau \in [0, t], \tag{5}$$

и дифференциальному уравнению (1) при п.в. $\tau \in [t, T]$. Согласно, например, [5, утверждение 2] такое движение $x(\cdot) = x(\cdot\,; t, w(\cdot), u(\cdot))$ существует и единственно. Тогда функционал оптимального результата $\varphi^0\colon G \to \mathbb{R}$ определим равенством

$$\varphi^0(t, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(t,T)} \sigma(x(T; t, w(\cdot), u(\cdot))), \quad (t, w(\cdot)) \in G. \tag{6}$$

Соответственно, управление $u^0(\cdot)$, на котором достигается нижняя грань в данном выражении, назовём оптимальным для позиции $(t, w(\cdot))$. Отметим, что приведённые построения согласуются с исходной постановкой задачи (1)–(3), при этом начальному условию (2) отвечает позиция $(t, w(\cdot)) \in G$, где $t = 0$ и $w(0) = x_0$.

Далее положим $G_0 = \{(t, w(\cdot)) \in G\colon t < T\}$. Следуя [9], функционал $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ назовём коинвариантно (ci) дифференцируемым порядка α в точке $(t, w(\cdot)) \in G_0$, если существуют число $\boldsymbol{\partial}_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и вектор $\boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ такие, что какова бы ни была функция $x(\cdot) \in AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условию (5), справедливо соотношение

$$\lim_{\delta \to +0} \biggl(\frac{\varphi(t + \delta, x_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))}{\delta} - \boldsymbol{\partial}_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) - \biggl\langle \boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), \frac{1}{\delta} \int\limits_t^{t+\delta} ({}^C D^\alpha x)(\xi)\, d\xi \biggr\rangle \biggr) = 0,$$

где функция $x_{t+\delta}(\cdot) \in AC^\alpha([0, t + \delta], \mathbb{R}^n)$ – сужение функции $x(\cdot)$ на промежуток $[0, t + \delta]$. Величины $\boldsymbol{\partial}_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$ и $\boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$ назовём ci-производной порядка α по переменной t и ci-градиентом порядка α функционала φ в точке $(t, w(\cdot))$ соответственно.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\boldsymbol{\partial}_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + H(t, w(t), \boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi(t, w(\cdot))) = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G_0, \tag{7}$$

при краевом условии на правом конце

$$\varphi(T, w(\cdot)) = \sigma(w(T)), \quad w(\cdot) \in AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n). \tag{8}$$

Здесь искомым является функционал $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$, а гамильтониан H задаётся равенством

$$H(\tau, x, s) = \min_{u \in U} \langle s, f(\tau, x, u) \rangle, \quad \tau \in [0, T], \quad x, s \in \mathbb{R}^n.$$

Связь между задачей оптимального управления (1)–(3) и задачей Коши (7), (8) устанавливает, в частности, следующий критерий (см. [9, теоремы 10.1 и 11.1]).

Теорема 2. *Пусть функционал* $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ *непрерывен,* ci*-дифференцируем порядка* α *в каждой точке* $(t, w(\cdot)) \in G_0$, *и отображения* $\boldsymbol{\partial}_t^\alpha \varphi\colon G_0 \to \mathbb{R}$ *и* $\boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi\colon G_0 \to \mathbb{R}^n$ *непрерывны.*

Тогда для того чтобы функционал φ был функционалом оптимального результата в задаче (1)–(3), необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана (7) и краевому условию (8).

В общем (негладком) случае функционал оптимального результата $\varphi^0\colon G \to \mathbb{R}$ совпадает с единственным обобщённым решением задачи Коши (7), (8) (подробнее см. в статье [10]).

4. Основной результат. Напомним конструкцию обобщённых управлений в задаче (1)–(3) (см., например, [11, гл. IV; 12, раздел 6.1], а также [13]). Рассмотрим компактное метрическое пространство (M, ρ_M), где множество M состоит из (регулярных) вероятностных борелевских мер на U, а метрика ρ_M такова, что для любой последовательности мер $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$ и меры $\mu \in M$ сходимость $\rho_M(\mu_i, \mu) \to 0$ при $i \to \infty$ эквивалентна тому, что для любой непрерывной функции $a\colon U \to \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_U a(u)\mu_i(du) = \int\limits_U a(u)\mu(du).$$

Пусть зафиксирована позиция $(t, w(\cdot)) \in G$. Обобщённым управлением на промежутке $[t, T]$ назовём любую измеримую функцию $\mu\colon [t, T] \to M$. Пусть $\mathcal{M}(t, T)$ – множество всех таких обобщённых управлений $\mu(\cdot)$. Движение системы (1), отвечающее позиции $(t, w(\cdot))$ и обобщённому управлению $\mu(\cdot) \in \mathcal{M}(t, T)$, определим как функцию $x(\cdot) \in AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет начальному условию (5) и дифференциальному уравнению

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = \int\limits_U f(\tau, x(\tau), u)\mu(\tau)(du) \quad \text{при п.в.} \quad \tau \in [t, T]. \tag{9}$$

По аналогии со случаем управлений $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t, T)$ такое движение $x(\cdot) = x(\cdot\,; t, w(\cdot), \mu(\cdot))$ существует и единственно. Отметим (см., например, [13, формула (37)]), что существует обобщённое управление $\mu^0(\cdot) \in \mathcal{M}(t, T)$, для которого

$$\sigma(x(T; t, w(\cdot), \mu^0(\cdot))) = \inf_{\mu(\cdot)\in\mathcal{M}(t,T)} \sigma(x(T; t, w(\cdot), \mu(\cdot))) = \varphi^0(t, w(\cdot)),$$

где φ^0 – функционал оптимального результата (6). Такое обобщённое управление $\mu^0(\cdot)$ назовём оптимальным для позиции $(t, w(\cdot))$.

Сделаем теперь дополнительное предположение: для позиции $(t{=}0, w(0){=}x_0) \in G$, отвечающей начальному условию (2), оптимальное обобщённое управление $\mu^0(\cdot) \in \mathcal{M}(0, T)$ единственно (с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега).

Пусть $u^0(\cdot) \in \mathcal{U}(0, T)$ – оптимальное управление в задаче (1)–(3), $x^0(\cdot) = x(\cdot\,; u^0(\cdot))$ – оптимальное движение системы (1), (2). В силу сделанного предположения при п.в. $\tau \in [0, T]$ выполняется равенство

$$\mu^0(\tau) = \delta(u^0(\tau)),$$

где $\delta(u^0(\tau))$ – мера Дирака в точке $u^0(\tau)$. В частности (см. (9)), движение $x^0(\cdot)$ совпадает с движением $x(\cdot\,; 0, x_0, \mu^0(\cdot))$, отвечающим оптимальному обобщённому управлению $\mu^0(\cdot)$. Кроме того, из принципа динамического программирования в задаче (1)–(3) (см. [9, теорема 6.1]) и полугруппового свойства движений системы (1) (см. [5, раздел 3.2]) вытекает, что для каждого $t \in [0, T)$ сужение функции $\mu^0(\cdot)$ на промежуток $[t, T]$ будет единственным оптимальным обобщённым управлением для позиции $(t, x^0_t(\cdot)) \in G$, где $x^0_t(\cdot)$ – сужение функции $x^0(\cdot)$ на промежуток $[0, t]$.

Тогда, применяя [13, теорема 9.1], получаем, что для любых $t \in [0, T)$ и $\ell \in \mathbb{R}^n$ имеет место соотношение

$$\lim_{\delta\to+0} \frac{\varphi^0(t+\delta, y^{(\ell)}_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi^0(t, x^0_t(\cdot))}{\delta} = \langle \partial_x \sigma(x^0(T)), z(T)\rangle + \langle Z(T)^{\mathrm{т}} \partial_x \sigma(x^0(T)), \ell\rangle. \tag{10}$$

Здесь функция $y^{(\ell)}(\cdot) \in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$ задаётся равенствами $y^{(\ell)}(\tau) = x^0(\tau)$ при $\tau \in [0,t]$ и

$$y^{(\ell)}(\tau) = x^0(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{({}^C D^\alpha x^0)(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi + \frac{(\tau-t)^\alpha \ell}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \tau \in (t,T],$$

функция $y^{(\ell)}_{t+\delta}(\cdot)$ – сужение функции $y^{(\ell)}(\cdot)$ на промежуток $[0,t+\delta]$, функция $z(\cdot)$ является единственным в пространстве $C^{1-\alpha}((t,T],\mathbb{R}^n)$ решением интегрального уравнения

$$z(\tau) = -\frac{(1-\alpha)(T-\tau)}{\Gamma(\alpha)(T-t)} \int\limits_0^t \frac{({}^C D^\alpha x^0)(\xi)}{(\tau-\xi)^{2-\alpha}}\, d\xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^\tau \frac{\partial_x f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)) z(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)(T-t)} \int\limits_t^\tau \frac{(T-\xi)\partial_\tau f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)) - \alpha f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi))}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in (t,T],$$

функция $Z(\cdot)$ – единственное в $C^{1-\alpha}((t,T],\mathbb{R}^{n\times n})$ решение интегрального уравнения

$$Z(\tau) = \frac{I_n}{\Gamma(\alpha)(\tau-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^\tau \frac{\partial_x f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)) Z(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in (t,T], \tag{11}$$

где $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – единичная матрица. Через $C^{1-\alpha}((t,T],\mathbb{R}^n)$ обозначено множество непрерывных функций $z\colon (t,T] \to \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует число $R \geqslant 0$ такое, что

$$(\tau-t)^{1-\alpha}\|z(\tau)\| \leqslant R, \quad \tau \in (t,T].$$

Множество $C^{1-\alpha}((t,T],\mathbb{R}^{n\times n})$ определяется аналогично.

Поскольку соотношение (10) выполнено для любого $\ell \in \mathbb{R}^n$, а функционал оптимального результата φ^0 удовлетворяет специальному условию липшицевости [10, лемма 1], то, рассуждая по схеме доказательства [8, теорема 1] с опорой на [10, утверждение 3], можно показать, что функционал φ^0 является *ci*-дифференцируемым порядка α в точке $(t, x^0_t(\cdot))$ и

$$\boldsymbol{\partial}^\alpha_t \varphi^0(t, x^0_t(\cdot)) = \langle \partial_x \sigma(x^0(T)), z(T)\rangle, \quad \boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi^0(t, x^0_t(\cdot)) = Z(T)^{\mathrm{T}} \partial_x \sigma(x^0(T)). \tag{12}$$

Положим

$$\Delta = \{(\tau,\eta) \in [0,T]\times[0,T] \colon \tau \geqslant \eta\}$$

и, следуя [4] (см. также [14]), рассмотрим непрерывную функцию $F\colon \Delta \to \mathbb{R}^{n\times n}$, которая при каждом фиксированном $\eta \in [0,T]$ является единственным непрерывным решением интегрального уравнения

$$F(\tau,\eta) = \frac{I_n}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\tau-\eta)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_\eta^\tau \frac{\partial_x f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)) F(\xi,\eta)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}(\xi-\eta)^{1-\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in [\eta,T]. \tag{13}$$

Заметим, что в силу связи между уравнениями (11) и (13) для любого $\tau \in (t,T]$ справедливо равенство

$$Z(\tau) = \frac{F(\tau,t)}{(\tau-t)^{1-\alpha}}.$$

Таким образом, с учётом (12) имеем

$$\boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi^0(t, x^0_t(\cdot)) = \frac{F(T,t)^{\mathrm{T}} \partial_x \sigma(x^0(T))}{(T-t)^{1-\alpha}}. \tag{14}$$

Пусть $p_*(\tau) = -\boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi^0(\tau, x^0_\tau(\cdot))$ для любого $\tau \in [0,T)$. Так как согласно [4, теорема 7] (см. также [14, утверждение 4.3]) для функции F выполняется соотношение

$$F(T,\tau) = \frac{I_n}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(T-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_\tau^T \frac{F(T,\xi)\partial_x f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi))}{(T-\xi)^{1-\alpha}(\xi-\tau)^{1-\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in [0,T],$$

то непосредственной подстановкой с использованием формулы (14) проверяется, что функция $p_*(\cdot)$ удовлетворяет сопряжённому уравнению (4). Тогда, принимая во внимание включение $p_*(\cdot) \in C^{1-\alpha}([0,T), \mathbb{R}^n)$, приходим к выводу, что функция $p_*(\cdot)$ является единственным решением уравнения (4). Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть $u^0(\cdot)$ – оптимальное управление в задаче (1)–(3), $x^0(\cdot)$ – отвечающее ему оптимальное движение системы (1), (2), а функция $p(\cdot)$ – решение соответствующего сопряжённого уравнения (4). Тогда при дополнительном предположении о том, что оптимальное обобщённое управление в задаче (1)–(3) единственно, имеет место равенство*

$$p(\tau) = -\boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi^0(\tau, x^0_\tau(\cdot)), \quad \tau \in [0,T), \tag{15}$$

где $x^0_\tau(\cdot)$ – сужение функции $x^0(\cdot)$ на промежуток $[0,\tau]$, $\boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi^0(\tau, x^0_\tau(\cdot))$ – ci-градиент порядка α функционала оптимального результата φ^0 в точке $(\tau, x^0_\tau(\cdot))$.

Данная теорема выявляет связь между принципом максимума Понтрягина и уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана в задаче (1)–(3). При этом равенство (15) выступает аналогом соответствующего факта, известного в теории оптимального управления обыкновенными дифференциальными системами (см., например, [15, § 9], а также [16, теорема 8.1]). Отметим, что в наиболее простом случае доказательство этого факта проводится при дополнительном предположении о том, что функция оптимального результата является дважды непрерывно дифференцируемой, и опирается, в частности, на необходимое условие экстремума для функций, определённых на пространстве состояний системы $\mathbb{R}^n$, и теорему о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования. Однако следование этой стандартной схеме рассуждений для обоснования равенства (15) в рассматриваемой задаче (1)–(3) осложняется бесконечномерным характером системы (1) и спецификой ci-производных порядка α, входящих в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (7). Поэтому была выбрана другая схема рассуждений, близкая, например, к доказательству леммы II.7 в [17]. Наконец, подчеркнём, что в дополнение к результатам работ [8–10, 13] теорема 3 служит ещё одним подтверждением того, что аппарат ci-производных порядка α является адекватным инструментом для исследования задач управления системами дробного порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00105).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, 2006.
2. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations: an Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin, 2010.
3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
4. *Bourdin L.* Cauchy–Lipschitz theory for fractional multi-order dynamics: state-transition matrices, Duhamel formulas and duality theorems // Differ. Integr. Equat. 2018. V. 31. № 7/8. P. 559–594.
5. *Gomoyunov M.I.* Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations // Dyn. Games Appl. 2020. V. 10. № 2. P. 417–443.
6. *Bergounioux M., Bourdin L.* Pontryagin maximum principle for general Caputo fractional optimal control problems with Bolza cost and terminal constraints // ESAIM Contr. Optim. Ca. 2020. V. 26. Art. 35.
7. *Bourdin L.* Weighted Hölder continuity of Riemann–Liouville fractional integrals – application to regularity of solutions to fractional Cauchy problems with Carathéodory dynamics // Fract. Cal. Appl. Anal. 2019. V. 22. № 3. P. 722–749.

8. *Gomoyunov M.I.* On differentiability of solutions of fractional differential equations with respect to initial data // Fract. Calc. Appl. Anal. 2022. V. 25. № 4. P. 1484–1506.
9. *Gomoyunov M.I.* Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim. 2020. V. 58. № 6. P. 3185–3211.
10. *Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.* Дифференциальные игры в системах дробного порядка: неравенства для производных функционала цены по направлениям // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2021. Т. 315. С. 74–94.
11. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
12. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. New York, 1988.
13. *Gomoyunov M.I.* Sensitivity analysis of value functional of fractional optimal control problem with application to feedback construction of near optimal controls // Appl. Math. Optim. 2023. V. 88. № 2. Art. 41.
14. *Gomoyunov M.I.* On representation formulas for solutions of linear differential equations with Caputo fractional derivatives // Fract. Calc. Appl. Anal. 2020. V. 23. № 4. P. 1141–1160.
15. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
16. *Fleming W.H., Rischel R.W.* Deterministic and Stochastic Optimal Control. New York, 1975.
17. *Субботина Н.Н.* Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Совр. математика и её приложения. 2004. Т. 20. С. 1–129.

Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 26.05.2023 г.
После доработки 26.05.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.