ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1533–1540

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬЮ

© 2023 г. А. А. Мельникова, П. А. Точилин

Рассматривается линейно-выпуклая управляемая система, задаваемая совокупностью дифференциальных уравнений, с непрерывными матричными коэффициентами. В системе могут быть управляющие параметры, а также неопределённости (помехи), на возможные значения которых наложены жёсткие поточечные ограничения. Для данной системы на конечном отрезке времени с учётом ограничений исследуется задача гарантированного попадания на целевое множество из заданной начальной позиции, несмотря на действие помехи. Основным этапом решения задачи является построение альтернированного интеграла и множества разрешимости. Для построения последнего наибольшую вычислительную сложность представляет вычисление геометрической разности целевого множества и множества, определяемого помехой. Рассматривается двумерный пример указанной задачи, для которого предлагается способ нахождения множества разрешимости без необходимости овыпукления разности опорных функций множеств.

DOI: 10.31857/S0374064123110080, EDN: PEOZOC

Введение. В настоящей работе обсуждается задача гарантированного попадания на целевое множество в момент времени t_1, несмотря на действие помехи, для линейной управляемой системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

с непрерывными матричными коэффициентами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$; управление $u(t) \in \mathsf{P}(t)$, помеха $v(t) \in \mathsf{Q}(t)$, где $\mathsf{P}(t)$, $\mathsf{Q}(t)$ – непрерывные многозначные отображения, принимающие значения во множестве выпуклых компактов (непрерывность понимается в смысле метрики Хаусдорфа). Задачи такого типа исследовались в работах [1, 2] и остаются актуальными [3, 4]. Часто используемый метод решения задачи целевого управления состоит в построении вспомогательных множеств разрешимости и далее в синтезе управлений за счёт "прицеливания" на такие множества [5]. Для нахождения множества разрешимости могут быть использованы разные подходы, одним из которых является альтернированный интеграл Понтрягина [6]. В этом случае задача сводится к интегрированию многозначных отображений. Альтернативным подходом является применение методов динамического программирования с помощью функции цены. Множество разрешимости является нулевым множеством уровня функции цены, а эта функция может быть найдена как решение (вообще говоря, обобщённое) уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса [7, с. 42]. Известно, что в случае без неопределённости значение функции цены в любой точке совпадает с расстоянием от точки до множества разрешимости [8, с. 20–34], однако в случае с помехой этот вопрос изучен недостаточно.

В данной работе для заданных на $\mathbb{R}^2$ целевого множества M и множества допустимых значений помехи Q, где M, Q – непустые выпуклые компактные множества, рассмотрен пример решения задачи в случае, когда на положение системы может влиять только помеха. Предложена гипотеза, позволяющая выполнить замену наиболее вычислительно трудной части многозначного интеграла выражением без овыпукления геометрической разности, а также представлено выражение для получающейся в результате функции цены. Вычисления выполнены с привлечением аппарата многозначного анализа [2, 9, 10].

1. Постановка задачи. Сведём систему (1) к линейно-выпуклой управляемой системе

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{2}$$

с жёсткими ограничениями (новыми) на помеху и управление

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t). \tag{3}$$

Вектор $x(t) \in \mathbb{R}^2$ задаёт положение системы, $u(t)$, $v(t)$ – управление и помеха соответственно, $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$ – непрерывные многозначные отображения, принимающие значения во множестве выпуклых компактов $\mathbb{R}^2$ (далее обозначено $\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$). Непрерывность понимается в смысле метрики Помпейю–Хаусдорфа [10] (расстояния Хаусдорфа) $h(A,B)$ между замкнутыми ограниченными множествами A, B пространства $\mathbb{R}^2$:

$$h(A,B) = \inf_{r>0}\{A \subseteq B + \mathcal{B}_r(0,0), B \subseteq A + \mathcal{B}_r(0,0)\},$$

где $\mathcal{B}_r(0,0)$ – шар радиуса r с центром в начале координат.

Для системы (2) с учётом ограничений (3) рассмотрим задачу гарантированного попадания на целевое множество $M \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^2$ в момент времени t_1, несмотря на действие помехи.

Определение 1. *Множество разрешимости в момент времени* τ $\mathbf{W}[\tau] = \mathbf{W}(\tau, t_1, M)$ системы (2) с ограничением (3) содержит все точки (τ, x_τ) такие, что решения системы $\dot{x}(t) \in \in \mathcal{P}(t) + v(t)$, выпущенные из точки (τ, x_τ), $t_0 \leqslant \tau < t_1$, достигают множества M в момент времени t_1, а именно, найдётся допустимая многозначная стратегия $u(t,x) \subset \mathcal{P}(t)$ такая, что для любого возмущения $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ будет выполнено $x(t_1) \in M$.

Под *допустимым управлением* понимается такое многозначное отображение $u(t,x)$, что после его подстановки в систему дифференциальных уравнений будет получено многозначное включение, имеющее решения при любом начальном условии.

На промежутке $t \leqslant \tau \leqslant t_1$ рассмотрим совокупность длин отрезков разбиения

$$\Sigma_k = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}, \quad t = \vartheta_k, \ldots, \vartheta_1, \quad \vartheta_0 = t_1, \quad \sigma_i > 0, \tag{4}$$

$$\vartheta_j = t_1 - \sum_{i=1}^{j} \sigma_i. \tag{5}$$

Для k-го шага множество разрешимости может быть найдено по формуле

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) = \left(W[\vartheta_{k-1}] + \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} -\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left(\left(\left(\left(\left(\left(M + \int_{\vartheta_1}^{t_1} -\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau\right) + \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} -\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau\right) + \ldots\right) +\right.\right.$$

$$\left.+ \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} -\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau = \mathcal{I}(t, t_1, M, \Sigma_k),$$

где знак “ $\dot{-}$ ” означает геометрическую разность множеств (см. определение 3). Предполагается, что множества разрешимости $W(\cdot)$ не пусты на каждом шаге. Предел множеств $W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}])$ при стремлении диаметра разбиения отрезка $[t, t_1]$ к нулю совпадает с множеством $\mathbf{W}[t]$.

Определение 2. *Альтернированный интеграл Понтрягина* $\mathcal{I}(t, t_1, M)$ есть интеграл $\mathcal{I}(t, t_1, M, \Sigma_k)$ при $\max\limits_{i=\overline{1,k}}\{\sigma_i\} \to 0$, $k \to \infty$.

Тогда $\mathbf{W}[t] = \mathbf{W}(t, t_1, M) = \mathcal{I}(t, t_1, M)$.

В статье будет рассмотрен пример задачи построения множества разрешимости в пространстве $\mathbb{R}^2$, когда M – единичный шар, $\mathcal{P}(t) = 0$, помеха $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}$ – вертикальный единичный отрезок, не зависящий от времени. Также получено уравнение, которому удовлетворяет расстояние до множества разрешимости. Для упрощения промежуточных соотношений выберем $t_1 = 0$.

Рассматриваемая система принимает вид

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{6}$$

$$v(t) \in \mathcal{Q} = 0 \times [-1, 1], \tag{7}$$

целевое множество $M = \mathcal{B}_1(0, 0)$.

Дадим далее необходимые определения.

Определение 3. *Геометрическая разность* множеств A, B пространства $\mathbb{R}^2$ есть множество

$$A \dot{-} B = \{c : c + B \subseteq A\}.$$

Определение 4. *Опорная функция* $\rho(l|X)$ множества X из пространства $\mathbb{R}^2$ определяется по формуле

$$\rho(l|X) = \sup_{x \in X} \langle l, x \rangle.$$

Опорные функции единичного шара и вертикального единичного отрезка соответственно равны $\rho(l|M) = \|l\|$ и $\rho(l|Q) = |l_2|$. При $t_1 = 0$ множество разрешимости в момент времени $t \leqslant 0$ имеет вид

$$W[t] = M \dot{-} (-t)\mathcal{Q} = \\ = \mathcal{B}_1(0, -t) \bigcap \mathcal{B}_1(0, t). \tag{8}$$

При $t < 0$ оно представляет собой горизонтальную лунку (рис. 1).

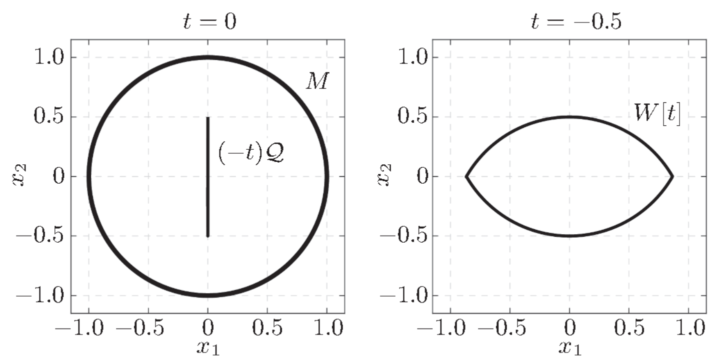

Рис. 1. Целевое множество и помеха. Множество разрешимости в момент времени t.

Лунка и прямые

$$x_2 = \pm t \pm \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} x_1$$

делят плоскость на области G_0, $G_1^{\pm}$, $G_2^{\pm}$ (рис. 2).

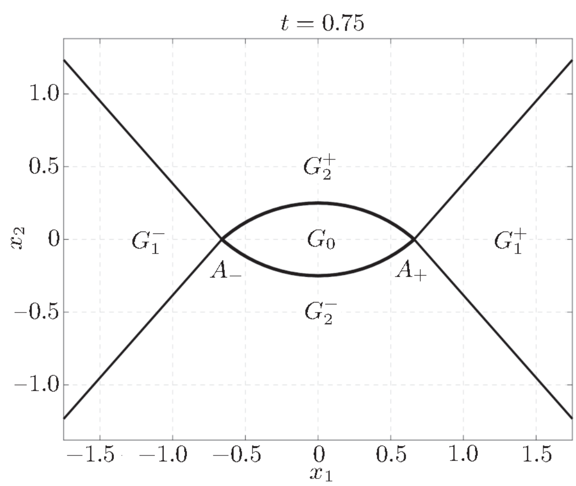

Рис. 2. Множество разрешимости и границы областей.

2. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для функции расстояния до множества разрешимости. Рассмотрим функцию цены

$$\mathcal{V}(t,x)=\max_{x(\cdot)}\{d(x(t_1),M):x(\cdot)\in\mathcal{X}(\cdot)\},$$

где $\mathcal{X}(\cdot)$ – множество всех траекторий – решений задачи $\dot{x}\in\mathcal{Q}(\tau),\ \ x(t_0)=x.$ Известно, что в точках дифференцируемости функция цены $\mathcal{V}(t,x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t}+\max_{v\in Q}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x},v\right)=0, \tag{9}$$

где

$$\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x},v\right)=\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_1}v_1+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_2}v_2.$$

Выберем функцию $V(t,x)=d(x,W[t]),$ равную расстоянию до множества разрешимости, и подставим её в уравнение (9).

В области G_0

$$V(t,x)=0,\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{\partial V}{\partial x_2}=0,$$

функция цены удовлетворяет уравнению (9).

В области G_1^+ $V(t,x)=\|x-A_+(t)\|,$ $A_+=(\sqrt{1-t^2},0).$ Обозначив $\vartheta(t)=\sqrt{1-t^2},$ получим соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{(x_1-\vartheta)t}{V\vartheta},\quad \frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{x_1-\vartheta}{V},\quad \frac{\partial V}{\partial x_2}=\frac{x_2}{V},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\left|\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|=\frac{t(x_1-\vartheta)}{\vartheta V}+\frac{|x_2|}{V}=\frac{x_1t+\vartheta(|x_2|-t)}{\vartheta V}\neq 0.$$

Видно, что равенство (9) не верно.

В области G_2^+ $V(t,x)=0\vee\|x-B_+(t)\|+1,$ $B_+(t)=(0,t),$ $V(t,x)=\sqrt{x_1^2+(x_2-t)^2}+1$ и

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{t-x_2}{\sqrt{x_1^2+(x_2-t)^2}},\quad \frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{x_1}{V},\quad \frac{\partial V}{\partial x_2}=\frac{x_2-t}{V}.$$

Подставив частные производные в уравнение (9), будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\left|\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|=\frac{t-x_2}{\sqrt{x_1^2+(x_2-t)^2}}+\frac{|x_2-t|}{V}=0.$$

Для области G_1^- при помощи аналогичных рассуждений можно показать, что уравнение (9) не выполнено. В области G_2^- равенство будет верно.

Замечание 1. Проверка выполнения уравнения (9) имеет смысл лишь для точек, в которых функция $V(t,x)$ дифференцируема. Функция $V(t,x)$ не является дифференцируемой на границе между областями G_0 и $G_2^+,$ включая точки $A_\pm$ (аналогично между областями G_0 и G_2^-), а также на границе между областями $G_1^\pm,$ $G_2^\pm.$

3. Переход к модифицированной задаче.

Определение 5. Пусть $M\subseteq\mathbb{R}^2$ – выпуклое замкнутое множество, $\mathcal{Q}$ – такое множество, что $M\dot{-}\mathcal{Q}\neq\varnothing.$ Множество $\operatorname{str}\operatorname{co}_M\mathcal{Q}=M\dot{-}(M\dot{-}\mathcal{Q})$ называется *M-сильно выпуклой оболочкой множества $\mathcal{Q}$.*

Обобщим понятие сильно выпуклой оболочки. В предположении существования числа $\sigma_0>0$ такого, что $M\dot{-}\sigma_0\mathcal{Q}\neq\varnothing,$ дадим следующее

Определение 6. Пусть $M \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^2$, $\mathcal{Q}$ – произвольное множество. Выпуклый компакт $\hat{\mathcal{Q}}$ называется *предельной M-сильно выпуклой оболочкой множества* $\mathcal{Q}$, если

$$\lim_{\sigma\to 0+} h(\hat{\mathcal{Q}}, \sigma^{-1}\operatorname{str}\operatorname{co}_M \sigma\mathcal{Q}) = 0.$$

Предельная M-сильно выпуклая оболочка множества $\mathcal{Q}$ далее обозначается $\lim \operatorname{str}\operatorname{co}_M \mathcal{Q}$.

3.1. Множество разрешимости. На интервале $t \leqslant \tau \leqslant t_1$ снова рассмотрим совокупность длин отрезков разбиения $\Sigma_k = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ (см. (4), (5)). Множество разрешимости для k-го шага определяется по формуле

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) =$$

$$= \left(\left(\left(M \dot{-} \int\limits_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int\limits_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \ldots\right) \dot{-} \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau,$$

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) = (((M \dot{-} \sigma_1\mathcal{Q}) \dot{-} \sigma_2\mathcal{Q}) \dot{-} \ldots) \dot{-} \sigma_k\mathcal{Q}(\tau)\,d\tau = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \sigma_k\mathcal{Q}. \quad (10)$$

При вычислении множества разрешимости с $\mathcal{P} = \{0\}$ и постоянной помехой на каждом шаге возникают выражения вида $M \dot{-} \sigma\mathcal{Q}$, где σ – длина временно́го отрезка. Пользуясь свойствами геометрической разности (см., например, [9, с. 22–23]), можно показать, что $\sigma\mathcal{Q} \subseteq$ $\subseteq M \dot{-} (M \dot{-} \sigma\mathcal{Q})$. С применением этого свойства получим

$$M \dot{-} (M \dot{-} (M \dot{-} \sigma\mathcal{Q})) = M \dot{-} \sigma\mathcal{Q}.$$

С учётом этого запишем выражение для множества разрешимости (10):

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \sigma_k\mathcal{Q} = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \operatorname{str}\operatorname{co}_{W[\vartheta_{k-1}]}\sigma_k\mathcal{Q}. \quad (11)$$

Множества $\operatorname{str}\operatorname{co}_{W[\vartheta_j]}\sigma\mathcal{Q}$, $j = \overline{0, k}$, представляют собой вертикальные лунки.

Множество $\operatorname{str}\operatorname{co}_M \sigma_1\mathcal{Q} = M \dot{-} (M \dot{-} \int_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}\,d\tau) = M \dot{-} (M \dot{-} \sigma_1\mathcal{Q})$ – вертикальная лунка, составленная из двух частей круга M; по оси x_1 ограничено значениями $\pm(1 - \sqrt{1 - \sigma_1^2})$, по x_2 – значениями $\pm\sigma_1$. По построению $M \dot{-} \sigma_1\mathcal{Q}$ полностью выметает множество M, т.е. $(M \dot{-} (M \dot{-} \sigma_1\mathcal{Q})) + (M \dot{-} \sigma_1\mathcal{Q}) = M$.

Для k-го шага множество

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_{W[\vartheta_{k-1}]}\sigma_k\mathcal{Q} = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \left(W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}\,d\tau\right) = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} (W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \sigma_k\mathcal{Q})$$

является вертикальной лункой, ограниченной по оси x_1 значениями

$$\pm\phi_k = \pm\left(\sqrt{1 - \left(\sum_{i=1}^{k-1}\sigma_i\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\right)^2}\right),$$

по оси x_2 – значениями $\pm\sigma_k$ (рис. 3). Множество разрешимости на k-м шаге $W[\vartheta_k]$ – это горизонтальная лунка, ограниченная по оси x_1 значениями $\pm\sqrt{1 - (\sum_{i=1}^{k}\sigma_i)^2}$, а по оси x_2 – значениями $\pm(1 - \sum_{i=1}^{k}\sigma_i)$.

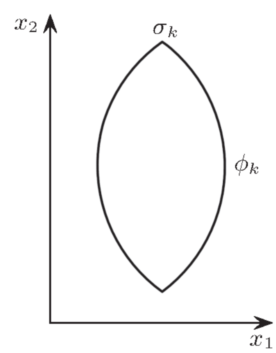

Рис. 3. Множество $\operatorname{str}\operatorname{co}_{W[\vartheta_{k-1}]}\sigma_k\mathcal{Q}$.

Рассмотрим произвольное разбиение Σ_k, $\max\limits_{i=\overline{1,k}}\{\sigma_i\} \to 0$, $k \to \infty$.

Множество разрешимости при $t_1 = 0$ есть

$$W[t] = M \dot{-} \int\limits_{t}^{0} \mathcal{Q}\,d\tau = M \dot{-} \operatorname{str}\operatorname{co}_M(-t)\mathcal{Q},$$

последнее равенство получено с применением формулы (11). Это вертикальная лунка, ограниченная по оси x_1 значениями $1 \pm \sqrt{1-t^2}$, по оси x_2 – значениями $\pm t$.

Покажем, что интеграл по тому же временно́му отрезку множества $\hat{\mathcal{Q}} = \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_M \mathcal{Q}$ при подстановке вместо $\mathcal{Q}$ даёт для рассматриваемой задачи то же множество разрешимости.

Лемма 1. *Множество $\hat{\mathcal{Q}} = \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_M \mathcal{Q}$ для задачи (6) с ограничением (7) имеет форму ромба с диагоналями, параллельными осям координат.*

Доказательство. По определению предельной сильно выпуклой оболочки

$$\hat{\mathcal{Q}} = \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \tau\mathcal{Q}} \mathcal{Q} = \lim_{\sigma \to 0+} \frac{1}{\sigma}[(M \dot{-} \tau\mathcal{Q}) \dot{-} ((M \dot{-} \tau\mathcal{Q}) \dot{-} \sigma\mathcal{Q})],$$

где τ – длина временно́го отрезка. Предполагаем, что τ такое, что $\lim \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \tau\mathcal{Q}} \mathcal{Q} \neq \varnothing$. Множество $(M \dot{-} \tau\mathcal{Q}) \dot{-} ((M \dot{-} \tau\mathcal{Q}) \dot{-} \sigma\mathcal{Q})$ – вертикальная лунка, полученная сдвигом единичного круга вдоль оси x_1, ограниченная по оси x_1 значениями $\pm(\sqrt{1-\tau^2} - \sqrt{1-(\tau+\sigma)^2})$, по x_2 – значениями $\pm\sigma$. Для предельного множества по оси x_1

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma}(\sqrt{1-\tau^2} - \sqrt{1-(\tau+\sigma)^2}) = \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

По оси x_2

$$\lim_{\sigma \to 0+} \frac{1}{\sigma}\sigma = 1.$$

Эти точки соединены прямой. Получаем, что $\hat{\mathcal{Q}}$ – ромб, задаваемый прямыми

$$x_2 = \pm\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x_1 \pm 1,$$

с опорной функцией

$$\rho(l|\hat{\mathcal{Q}}) = \max\left\{\left|\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}l_1\right|, |l_2|\right\}. \tag{12}$$

Лемма доказана.

Найдём значение интеграла по временно́му отрезку от множества $\hat{\mathcal{Q}}$.

Лемма 2. *Интеграл*

$$\int_t^0 \max\left\{|l_1|\frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}, |l_2|\right\} d\tau \tag{13}$$

совпадает с вертикальной лункой, опорная функция в направлении (l_1, l_2) $l_1^2 + l_2^2 = 1$, которой равна

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{1-t^2}\, l_1, & l_1 \geqslant 0, \\ 1 + \sqrt{1-t^2}\, l_1, & l_1 < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимо рассмотреть выражение под интегралом в зависимости от знаков величин l_1, l_2. Прямым подсчётом получаем при $l_1 \geqslant 0$ и $l_2 \geqslant 0$

$$\int_t^0 \max\left\{l_1\frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}, l_2\right\} d\tau = \int_t^{l_2+t} l_2\, d\tau + \int_{l_2+t}^0 l_1\frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}\, d\tau =$$

$$= l_2^2 + l_1(-\sqrt{1-(\tau-t)^2}|_{l_2+t)}^0) = l_2^2 + l_1^2 - \sqrt{1-t^2}\, l_1 = 1 - \sqrt{1-t^2}\, l_1.$$

Аналогичный результат имеет место и для $l_1 \geqslant 0$, $l_2 < 0$.

При $l_1 < 0,\ \ l_2 > 0$

$$\int\limits_t^0 \max\left\{-l_1\frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}, l_2\right\}d\tau = \int\limits_0^{l_2} l_2\,d\tau + \int\limits_{l_2}^{t} -l_1\frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}\,d\tau = 1+\sqrt{1-t^2}\,l_1.$$

Для $l_1 < 0$ и $l_2 < 0$ интеграл (13) также равен $1+\sqrt{1-t^2}\,l_1$.

Значение интеграла от опорной функции ромба (12) совпадает со значением опорной функции к вертикальной лунке, полученной пересечением множеств (единичных кругов) – сдвигов единичного круга вдоль оси x_1 на $\sqrt{1-t^2}$ и $-\sqrt{1-t^2}$.

Таким образом, значение интеграла (13) совпадает с $\operatorname{str}\operatorname{co}_M(-t)\mathcal{Q}$. Лемма доказана.

С учётом доказанной леммы можно перейти к задаче с заменой множества $\mathcal{Q}$ на $\hat{\mathcal{Q}} = \lim\operatorname{str}\operatorname{co}_M\mathcal{Q}$.

Теорема 1. *Множество разрешимости $W[t]$ (8) задачи (6) с ограничением (7) совпадает со множеством разрешимости, полученным из $M\dot{-}\int_t^0\rho(l|\hat{\mathcal{Q}})$, где опорная функция $\rho(l|\hat{\mathcal{Q}})$ может быть найдена из (12).*

3.2. Уравнение для функции цены.

Теорема 2. *Функция $V(t,x) = d(x, W[t])$ удовлетворяет уравнению (9), в котором помеха берётся из $\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_M\mathcal{Q}$.*

Доказательство. Проверим это для каждой из областей G_0, G_1^+, G_2^+. В области G_0 уравнение выполняется в силу равенства частных производных нулю. В области G_1^+ для опорной функции множества $\hat{\mathcal{Q}}$ справедливо выражение

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\left|\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V(t,x)}\right|, \left|\frac{x_2}{V(t,x)}\right|\right\}.$$

При $x_2 \geqslant 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V(t,x)}, \frac{x_2}{V(t,x)}\right\} = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V(t,x)}.$$

Для $x_2 < 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V(t,x)}, \frac{-x_2}{V(t,x)}\right\} = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V(t,x)}.$$

Значит,

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \left|\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right| = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V},$$

и, подставив в уравнение, получим

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \frac{(x_1-\vartheta)t}{\vartheta V} + \frac{x_1-\vartheta}{V}\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = 0.$$

В области G_2^+ для опорной функции множества $\hat{\mathcal{Q}}$ справедливо выражение

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\left|\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1}{V(t,x)}\right|, \left|\frac{x_2-t}{V(t,x)}\right|\right\}.$$

Для $x_1 \geqslant 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1}{V(t,x)}, \frac{x_2-t}{V(t,x)}\right\} = \frac{x_2-t}{V(t,x)}.$$

Для $x_1 < 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1}{V(t,x)}, \frac{x_2-t}{V(t,x)}\right\} = \frac{x_2-t}{V(t,x)}.$$

Таким образом,

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|\hat{\mathcal{Q}}\right)=\left|\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|=\frac{|x_2-t|}{\partial V}=\frac{x_2-t}{\partial V},\quad \frac{\partial V}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|\hat{\mathcal{Q}}\right)=\frac{t-x_2}{\partial V}+\frac{x_2-t}{\partial V}=0.$$

Для областей G_1^- и G_2^- рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Замечание 2. Функция $V(t,x)$ не является дифференцируемой на границе между областями G_0 и G_2^+, G_0 и G_2^-, включая точки $A_\pm$, а также на границе между областями $G_1^\pm$, $G_2^\pm$ (см. замечание 1).

Заключение. В работе для конкретного примера получено представление множества $\hat{\mathcal{Q}}$ для помехи, дающее множество разрешимости, совпадающее с $W[t]$, построенное при условии принадлежности помехи множеству $\mathcal{Q}$. В модифицированной задаче не требуется овыпукления геометрической разности опорных функций множеств, возникающей в альтернированном интеграле. Получено уравнение, которому удовлетворяет функция расстояния до множества разрешимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 910–912.
2. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
3. *Ухоботов В.И.* Об одной задаче управления при наличии помехи и возможной поломке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 265–278.
4. *Каплунова Е.П., Точилин П.А.* Задача целевого управления квадрокоптером при движении в горизонтальной плоскости с огибанием препятствий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2021. № 4. С. 21–36.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
6. *Куржанский А.Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 234–248.
7. *Fleming W.H., Soner H.M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. New York, 1993.
8. *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston, 1997.
9. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., 2007.
10. *Половинкин Е.С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М., 2014.

ООО “Яндекс.Технологии”, г. Москва,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне,
Китай

Поступила в редакцию 26.04.2023 г.
После доработки 26.04.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.