ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1541–1549

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

О ПОСТРОЕНИИ ГРАФА ДИСКРЕТНЫХ СОСТОЯНИЙ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ

© 2023 г. А. С. Фурсов, П. А. Крылов

Рассмотрена задача построения графа состояний переключаемой аффинной системы, замкнутой статической обратной связью по состоянию. Для решения этой задачи предложен конструктивный алгоритм, основанный на исследовании совместности систем линейных алгебраических неравенств.

DOI: 10.31857/S0374064123110092, EDN: PDPMJG

Введение. В работе [1] была исследована задача об устойчивости нулевого положения равновесия переключаемой аффинной системы

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma - b_\sigma \theta^{\mathrm{T}} x, \quad \sigma \in S(F), \tag{1}$$

замкнутой линейной статической обратной связью $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, и порождаемой множеством F всевозможных пар (N, D), задающих различные разбиения пространства состояний $\mathbb{R}^n$ на m выпуклых замкнутых многогранников $\overline{M}_i$. Здесь $N = [n_{ijk}]$ – трёхмерная матрица размерности $m \times m \times n$, для которой коэффициент n_{ijk} обозначает k-ю компоненту вектора нормали n_{ij} к плоскости $P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle n_{ij}, x\rangle = d_{ij}\}$, содержащей общую грань многогранников $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$, направленного в сторону многогранника $\overline{M}_j$, $d_{ij} \in \mathbb{R}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^m$ – матрица из $\mathbb{R}^{m\times m}$. При этом, очевидно, $n_{ji} = -n_{ij}$, $d_{ji} = -d_{ij}$, если $n_{ij} = 0$ (в случае когда многогранники $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$ не имеют общей грани). Считаем, что $d_{ij} = d_{ji} = 1$ и для удобства полагаем $n_{ii} = 0$, $d_{ii} = 1$. Далее $S(F)$ – множество переключающих сигналов σ, где $\sigma(x; N, D) : \mathbb{R}^n \to I = \{1, \ldots, m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал), задаваемая парой $(N, D) \in F$ и принимающая постоянное значение i на каждом открытом выпуклом многограннике M_i; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $A_\sigma = A \circ \sigma$ – композиция отображения $A : I \to \{A_1, \ldots, A_m\}$ и переключающего сигнала σ; $b_\sigma = b \circ \sigma$ и $v_\sigma = v \circ \sigma$ – аналогичные композиции для отображений $b : I \to \{b_1, \ldots, b_m\}$, $v : I \to \{v_1, \ldots, v_m\}$, причём считаем, что $v_1 = 0$. Через $\Gamma(N; D)$ будем обозначать множество граничных точек разбиения, задаваемого парой $(N, D) \in F$.

С учётом введённых обозначений очевидно, что для любого $i \in I = \{1, \ldots, m\}$

$$x \in \overline{M}_i \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n_{i1}, x\rangle \leqslant d_{i1}, \\ \ldots \\ \langle n_{im}, x\rangle \leqslant d_{im}, \end{cases} \qquad x \in M_i \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n_{i1}, x\rangle < d_{i1}, \\ \ldots \\ \langle n_{im}, x\rangle < d_{im}. \end{cases} \tag{2}$$

В соответствии с работой [1] для каждого набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$ такого, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\}$, $2 \leqslant p \leqslant m$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, введём множества граничных точек $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \bigcap_{i=1}^p \overline{M}_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{k \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_p} \overline{M}_k$. Тогда

$$\Gamma(N; D) = \bigcup_{\substack{(\alpha_1 \ldots \alpha_p) \\ \alpha_1 < \ldots < \alpha_p}} \Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}. \tag{3}$$

В работе [1] показано, что множества граничных точек $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ произвольного разбиения (N, D) могут быть описаны на языке линейных неравенств [2, с. 9] следующим образом:

$$x \in \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d_{\alpha_s h} & \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d_{\alpha_s g} & \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}. \end{cases} \tag{4}$$

Значение функции $\sigma(x; N, D)$ в каждой точке $x \notin \Gamma(N; D)$ определяет активный режим (подсистему) функционирования переключаемой системы (1), описываемый аффинной системой

$$\dot{x} = A_i x + v_i - b_i \theta^{\text{т}} x, \quad i \in I. \tag{5}$$

Доопределение значения переключающего сигнала на множестве $\Gamma(N; D)$ зависит от выбора обратной связи $u = -\theta^{\text{т}} x,$ которая в статье [1] определена как допустимая, если выполнено следующее

Условие А. Для любой пары $(N, D) \in F$ и любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ $(\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \neq \varnothing)$ верно, что для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ такой, что для любого номера $\alpha_k \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$ для которого $n_{\alpha_i\alpha_k} \neq 0,$ выполняется неравенство

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i}\rangle < 0.$$

Здесь $\overline{A}_{\alpha_i} = A_{\alpha_i} - b_{\alpha_i}\theta^{\text{т}}.$

Как показано в работе [1], при выполнении условия А в каждой точке границы многогранников можно так доопределить значения переключающего сигнала на границе, что для любого начального условия $x(0)$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$ соответствующее решение системы (1) существует и единственно [3, с. 59].

Нулевое решение замкнутой переключаемой системы (1) считаем (см. [1]) глобально равномерно устойчивым, если для любого фиксированного $\sigma \in S(F)$ нулевое решение соответствующей кусочно-аффинной системы глобально асимптотически устойчиво.

В [1] сформулирована и доказана теорема о достаточном условии глобальной равномерной устойчивости нулевого решения замкнутой системы (1) при заданной допустимой обратной связи $u = -\theta^{\text{т}} x.$ При этом одним из условий проверки выполнения условий указанной теоремы является возможность построения графа дискретных состояний для рассматриваемой замкнутой переключаемой аффинной системы при любом переключающем сигнале $\sigma \in S(F).$ Напомним, что в [1] каждому переключающему сигналу $\sigma \in S(F)$ системы (1), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^{\text{т}} x,$ был сопоставлен ориентированный граф дискретных состояний $G(\sigma),$ вершинами которого являются номера режимов этой системы, а наличие ребра $i \to j$ означает существование траектории соответствующей системы, при движении вдоль которой режим i сменяется режимом $j.$ Настоящая статья посвящена разработке конструктивного метода построения таких графов дискретных состояний и фактически её можно считать продолжением работы [1].

1. О построении графа дискретных состояний. Рассмотрим теперь вопрос о возможной численной реализации алгоритма построения графа дискретных состояний замкнутой системы (1) для любого фиксированного $\sigma \in S(F).$ Основные шаги данного алгоритма опираются на следующие результаты.

Лемма. *Пусть степенной ряд*

$$\sum_{l=1}^{+\infty} a_l t^l \tag{6}$$

сходится на некотором отрезке $[-\delta, 0].$ *Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1) существует значение $\varepsilon \in (0, \delta)$ *такое, что для любого* $t \in [-\varepsilon, 0)$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{l=1}^{+\infty} a_l t^l < 0; \tag{7}$$

2) существует число $q \in \mathbb{N}$ *такое, что*

$$(-1)^q a_q < 0 \quad \text{и} \quad a_l = 0 \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant l < q.$$

Доказательство. Пусть выполнено условие 1), тогда ряд (6) не равен тождественно нулю. Обозначим через q индекс первого ненулевого коэффициента. Тогда при всех $t \in [-\delta, 0)$ справедливо представление

$$\sum_{l=1}^{+\infty} a_l t^l = a_q t^q + \overline{o}(t^q). \tag{8}$$

Отсюда имеем $a_q t^q + \overline{o}(t^q) < 0$ при всех $t \in [-\varepsilon, 0)$. Но для достаточно малых по модулю t выполняется неравенство $|\overline{o}(t^q)| < |a_q t^q|$, а следовательно, знак ряда для этих t определяется знаком слагаемого $a_q t^q$, и так как $t < 0$, получаем $(-1)^q a_q < 0$. Таким образом, условие 2) выполнено.

Пусть теперь выполнено условие 2). Так как $a_l = 0$ для любого $l < q$, то для ряда (6) при всех $t \in [-\delta, 0)$ справедливо представление (8). При этом $a_q t^q < 0$ при $t < 0$, так как $(-1)^q a_q < 0$. Остаётся заметить, что всегда найдётся достаточно малое $\varepsilon \in [-\delta, 0)$ такое, что на промежутке $[-\varepsilon, 0)$ будет выполнено неравенство $|\overline{o}(t^q)| < |a_q t^q|$, а следовательно, на этом же промежутке будет выполнено и неравенство (7). Таким образом, условие 1) выполнено. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть система (1) замкнута допустимым управлением* $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$. *Тогда для переключающего сигнала* $\sigma \in S(F)$, *задаваемого разбиением* $(N, D) \in F$, *существует траектория, при движении вдоль которой режим* γ *сменяется режимом* δ *тогда и только тогда, когда найдётся набор* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\})$ *такой, что:*

1) существуют $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, $\alpha_i = \gamma$, $\alpha_j = \delta$;

2) $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} \neq \varnothing$;

3) $\sigma(\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}; N, D) = \alpha_j = \delta$;

4) существуют $q_{k_1}, \ldots, q_{k_r} \in \{1, \ldots, n\}$ *такие, что совместна система (т.е. существует хотя бы одно решение* $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x \rangle < d_{\alpha_s h} \ \text{при всех} \ \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \ \text{и} \ h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x \rangle \leqslant d_{\alpha_s g} \ \ \text{при всех} \ \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \ \text{и} \ g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_1}-1} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_1}-2} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ (-1)^{q_{k_1}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_1}} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_1}-1} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_2}-1} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_2}-2} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ (-1)^{q_{k_2}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_2}} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_2}-1} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_r}-1} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_r}-2} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ (-1)^{q_{k_r}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_r}} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_r}-1} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\{\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_r}\} = L^{\alpha_i}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} = \{\alpha_l \in \{\alpha_1 \ldots \alpha_p\} : l \neq i, \ \ n_{\alpha_i \alpha_l} \neq 0\}$.

Доказательство. Действительно, пусть для разбиения $(N, D) \in F$ системы (1), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$, существует траектория $x(t)$, вдоль которой режим

γ сменяется режимом δ. Тогда эта траектория должна содержать некоторую точку $x_* = x(t_*) \in (\overline{M}_\gamma \bigcap \overline{M}_\delta) \subset \Gamma(N; D)$ такую, что $x(t) \in M_\gamma$ при $t \in [t_* - \varepsilon, t_*)$ и $x(t) \in M_\delta$ при $t \in (t_*, t_* + \varepsilon]$ для некоторого достаточно малого ε. В силу (3) точка x_* принадлежит некоторому множеству $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$, где набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ содержит γ и δ (следует из определения $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$). При этом $\sigma(x_*; N, D) = \delta$, а тогда $\sigma(\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}; N, D) = \delta$ (см. [1]). Теперь рассмотрим решение $x(t)$ при $t \in [t_* - \varepsilon, t_*)$. На этом промежутке переключающий сигнал принимает значение γ, следовательно, на нём для каждого $\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ выполняется неравенство $\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, x(t) \rangle < d_{\alpha_i \alpha_k}$.

Рассмотрим функцию

$$g(t) = e^{\overline{A}_\gamma (t - t_*)} x_* + \int\limits_{t_*}^{t} e^{\overline{A}_\gamma (t - \tau)} v_\gamma \, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

которую разложим в ряд Тейлора в окрестности $t = t_*$:

$$g(t) = x_* + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(t - t_*)^l}{l!} \frac{d^l g}{dt^l}\bigg|_{t = t_*}, \tag{11}$$

где

$$\frac{d^l g}{dt^l}\bigg|_{t = t_*} = \left[\overline{A}^l_\gamma e^{\overline{A}_\gamma (t - t_*)} x_* + \overline{A}^{l-1}_\gamma v_\gamma + \overline{A}^l_\gamma \int\limits_{t_*}^{t} e^{\overline{A}_\gamma (t - \tau)} v_\gamma \, d\tau \right]\bigg|_{t = t_*} = \overline{A}^l_\gamma x_* + \overline{A}^{l-1}_\gamma v_\gamma.$$

Учитывая, что $g(t_*) = x_*$ и

$$\frac{dg}{dt} = \overline{A}_\gamma e^{\overline{A}_\gamma (t - t_*)} + \overline{A}_\gamma \int\limits_{t_*}^{t} e^{\overline{A}_\gamma (t - \tau)} v_\gamma \, d\tau + v_\gamma = \overline{A}_\gamma g(t) + v_\gamma,$$

получаем, что $x(t) \equiv g(t)$ на промежутке $[t_* - \varepsilon, t_*)$. Отсюда, ввиду $\alpha_i = \gamma$, следует, что на рассматриваемом промежутке выполняется неравенство $\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, g(t) \rangle < d_{\alpha_i \alpha_k}$, которое, в силу разложения (11), можно записать в виде

$$\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, x_* \rangle + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(t - t_*)^l}{l!} \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i} x_* + \overline{A}^{l-1}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle < d_{\alpha_i \alpha_k}.$$

Поскольку $\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, x_* \rangle = d_{\alpha_i \alpha_k}$, получаем

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(t - t_*)^l}{l!} \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i} x_* + \overline{A}^{l-1}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle < 0. \tag{12}$$

Согласно сформулированной лемме последнее неравенство выполнено на всём промежутке $[t_* - \varepsilon, t_*)$ тогда и только тогда, когда найдётся некоторое натуральное число q_k такое, что

$$(-1)^{q_k} \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \overline{A}^{q_k}_{\alpha_i} x_* + \overline{A}^{q_k - 1}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle < 0 \quad \text{и} \quad \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i} x_* + \overline{A}^{l-1}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle = 0$$

для всех $1 \leqslant l < q_k$. Заметим, что q_k не превосходит n. Действительно, пусть

$$\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i} (\overline{A}_{\alpha_i} x_* + v_{\alpha_i}) \rangle = 0, \quad l \in \{0, \ldots, n-1\},$$

и $\chi_{A_{\alpha_i}}(s) = s^n + \lambda_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \lambda_1 s + \lambda_0$ – характеристический многочлен матрицы A_{α_i}. Тогда, в силу теоремы Гамильтона–Кели, имеем соотношения

$$\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \overline{A}^n_{\alpha_i} (\overline{A}_{\alpha_i} x_* + v_{\alpha_i}) \rangle = -\left\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \sum_{l=0}^{n-1} \lambda_l \overline{A}^l_{\alpha_i} (\overline{A}_{\alpha_i} x_* + v_{\alpha_i}) \right\rangle =$$

$$= -\sum_{l=0}^{n-1} \lambda_l \langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i}(\overline{A}_{\alpha_i}x_* + v_{\alpha_i})\rangle = 0.$$

Аналогично можно показать, что при всех $l > n$ будут верны равенства

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i}(\overline{A}_{\alpha_i}x_* + v_{\alpha_i})\rangle = 0.$$

Но в этом случае получим, что левая часть неравенства (12) обращается в нуль. Противоречие. Следовательно, $q_k \in \{1,\ldots,n\}$ и точка x^* является решением системы (9). Необходимость условия теоремы доказана.

Пусть теперь x_* – решение системы неравенств (9). Зафиксируем произвольное $t_* > 0$. Тогда для любого $\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ в силу леммы найдётся некоторое малое число $\varepsilon > 0$ такое, что $t_* - \varepsilon > 0$ и для любого $t \in [t_* - \varepsilon, t_*]$ верно неравенство

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(t-t_*)^l}{l!}\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i}x_* + \overline{A}^{l-1}_{\alpha_i}v_{\alpha_i}\rangle < 0.$$

Так как x_* – решение системы (9), то $x_* \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$, а значит, $\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, x_*\rangle = d_{\alpha_i\alpha_k}$. Поэтому

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, x_*\rangle + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(t-t_*)^l}{l!}\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i}x_* + \overline{A}^{l-1}_{\alpha_i}v_{\alpha_i}\rangle < d_{\alpha_i\alpha_k}.$$

При этом бесконечная сумма

$$x_* + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(t-t_*)^l}{l!}(\overline{A}^l_{\alpha_i}x_* + \overline{A}^{l-1}_{\alpha_i}v_{\alpha_i})$$

является рядом Тейлора для функции $g(t)$, определённой формулой (10), в окрестности точки t_*, поэтому для любого $\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ получаем

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, g(t)\rangle < d_{\alpha_i\alpha_k}. \tag{13}$$

Покажем, что найдётся достаточно малое $\xi \in (0,\varepsilon)$ такое, что $g(t) \in M_{\alpha_i}$ для любого $t \in [t_* - \xi, t_*)$. Действительно, согласно (2)

$$x \in M_{\alpha_i} \Leftrightarrow \langle n_{\alpha_i\alpha_w}, x\rangle < d_{\alpha_i\alpha_w}, \quad w = \overline{1,m}.$$

Заметим, что в силу (4) для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ выполняются неравенства $\langle n_{\alpha_i\alpha_w}, x\rangle < d_{\alpha_i\alpha_w}$ при $w \notin L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$, а следовательно, они выполняются и для x_*. Поэтому в силу непрерывности функции $g(t)$ найдётся достаточно малое $\xi \in (0,\varepsilon)$ такое, что неравенства $\langle n_{\alpha_i\alpha_w}, g(t)\rangle <$ $< d_{\alpha_i\alpha_w}$ будут выполнены при всех $t \in [t_* - \xi, t_*)$ для $w \notin L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$, а неравенства для $w \in \{k_1,\ldots,k_r\}$ выполнены по доказанному выше (см. (13)), так как $\xi < \varepsilon$. Таким образом, $g(t) \in M_{\alpha_i}$ при $t \in [t_* - \xi, t_*)$.

Так как $g(t)$ является решением системы (5) для режима γ, то $g(t)$ на промежутке $[t_* - \xi, t_*)$ совпадает с решением $x(t)$ задачи Коши для системы (1) при $x(t_* - \xi) = g(t_* - \xi)$, т.е. данное решение $x(t)$ лежит в области M_{α_i}, а затем при $t = t_*$ проходит через $x(t_*) = x_*$, где $\sigma(x_*, N, D) = \delta$ и далее, согласно условию 1), продолжится в область M_δ (т.е. в точке x_* произойдёт смена режима γ на режим δ). Достаточность условия теоремы доказана. Теорема доказана.

Следующее замечание позволяет упростить проверку совместности системы (9).

Замечание. Для совместности системы (9) (т.е. существования хотя бы одного решения $x \in \mathbb{R}^n$) с некоторыми q_k необходима совместность (также относительно $x \in \mathbb{R}^n$) системы

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d_{\alpha_s h} \quad \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d_{\alpha_s g} \quad \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i}\rangle \geqslant 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i}\rangle \geqslant 0. \end{cases}$$

Основываясь на доказанной теореме 1, можно сформулировать основные шаги алгоритма построения графа дискретных состояний. Итак, зафиксируем некоторый переключающий сигнал $\sigma \in S(F)$ системы (1), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^{\mathrm{т}} x$. Как уже было указано выше, в соответствии с [1] множеством дискретных состояний рассматриваемой системы (1) – вершинами графа $G(\sigma)$ – считаем множество $I = \{1, \ldots, m\}$. Тогда проверку наличия ориентированного ребра (ij) можно разбить на следующие шаги:

1) формирование множества G_{ij} наборов $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$ таких, что

– $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$ и $\{i, j\} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$,

– $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \neq \varnothing$;

2) поиск набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p) \in G_{ij}$ (с помощью полного перебора), удовлетворяющего условиям теоремы 1; существование хотя бы одного такого набора означает наличие ориентированного ребра (ij) в графе дискретных состояний $G(\sigma)$.

Заметим, что реализация указанных шагов 1) и 2) сводится к проверке совместности некоторого конечного числа систем линейных неравенств. При этом отыскание всевозможных непустых множеств $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$, фактически, осуществляется на этапе проверки допустимости управления $u = -\theta^{\mathrm{т}} x$ (см. [1]), что облегчает формирование множества G_{ij}. Что касается второго шага алгоритма, то перебор наборов $(\alpha_1 \ldots \alpha_p) \in G_{ij}$ может быть существенно сокращён, если воспользоваться сформулированным замечанием.

2. Об инвариантности графа дискретных состояний для параметризованного семейства переключающих сигналов. Приведённый выше алгоритм позволяет построить граф дискретных состояний для конкретного переключающего сигнала, заданного разбиением (N, D). Оказывается, что с небольшими модификациями полученный результат можно обобщить на случай линейно параметризованного множества переключающих сигналов. Далее описаны параметрические семейства разбиений пространства $\mathbb{R}^n$, для каждого из которых соответствующая переключаемая система (1) имеет единый граф дискретных состояний для всех переключающих сигналов.

Итак, рассмотрим параметрическое семейство разбиений

$$F = \{(N, D(\kappa))\}, \tag{14}$$

где N – фиксированная трёхмерная матрица, а $D(\kappa)$ – матрица, элементы которой линейно зависят от параметров $\kappa_1, \ \ldots, \ \kappa_r$, а именно

$$d_{ij}(\kappa) = d_{ij}^0 + d_{ij}^1 \kappa_1 + \ldots + d_{ij}^r \kappa_r, \quad d_{ij}^k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, r},$$

где вектор $\kappa = (\kappa_1 \ldots \kappa_r)$ удовлетворяет линейным ограничениям

$$\Phi\kappa \leqslant \varphi, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{l \times r}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^l,$$

для некоторого натурального l, и при этом множество $K = \{\kappa : \Phi\kappa \leqslant \varphi\}$ является компактом. В силу того, что множество K выпуклое, оно может быть представлено как выпуклая оболочка некоторого конечного числа угловых точек κ^w, $w = \overline{1, \gamma}$:

$$K = \operatorname{Conv}\{\kappa^1, \ldots, \kappa^\gamma\}.$$

Аналогично (3) для каждого $\kappa \in K$ определим множество

$$\Gamma(N; D(\kappa)) = \bigcup_{\substack{(\alpha_1 \ldots \alpha_p) \\ \alpha_1 < \ldots < \alpha_p}} \Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(\kappa),$$

где каждое множество $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(\kappa)$ (при фиксированном векторе $\kappa = (\kappa_1 \ldots \kappa_r)$) состоит из точек $x \in \mathbb{R}^n$, являющихся решениями следующей системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x \rangle < d^0_{\alpha_s h} + d^1_{\alpha_s h}\kappa_1 + \ldots + d^r_{\alpha_s h}\kappa_r \ \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x \rangle \leqslant d^0_{\alpha_s g} + d^1_{\alpha_s g}\kappa_1 + \ldots + d^r_{\alpha_s g}\kappa_r \ \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}. \end{cases}$$

Семейство разбиений (14) будем называть Γ-*инвариантным*, если выполнено следующее

Условие Б. Если для некоторого набора $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\})$ и некоторого $\kappa^* \in K$ соответствующее множество $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\kappa^*)$ не пусто, то для всех $\kappa \in K$ множества $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\kappa)$ не пусты. И обратно, если для некоторого набора $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \in \{1, \ldots, m\})$ и некоторого $\kappa^* \in K$ соответствующее множество $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\kappa^*)$ пусто, то для всех $\kappa \in K$ множества $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\kappa)$ пусты.

Следующая теорема даёт конструктивные условия проверки Γ-инвариантности заданного семейства разбиений (14).

Теорема 2. *Параметрическое семейство (14) удовлетворяет условию Б тогда и только тогда, когда для каждого набора* $(\alpha_1 \ldots, \alpha_p)$ *такого, что* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\}$ *и* $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$, *выполнено одно из следующих условий:*

1) система линейных неравенств

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x \rangle < d^0_{\alpha_s h} + d^1_{\alpha_s h}\kappa_1 + \ldots + d^r_{\alpha_s h}\kappa_r \ \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x \rangle \leqslant d^0_{\alpha_s g} + d^1_{\alpha_s g}\kappa_1 + \ldots + d^r_{\alpha_s g}\kappa_r \ \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \Phi\kappa \leqslant \varphi \end{cases} \tag{15}$$

не имеет решений (относительно $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $\kappa \in \mathbb{R}^r$);

2) для каждой угловой точки κ^w *компакта* K *совместна (относительно* $x \in \mathbb{R}^n$) *система*

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x \rangle < d_{\alpha_s h}(\kappa^w) \ \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x \rangle \leqslant d_{\alpha_s g}(\kappa^w) \ \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}. \end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\}$, – некоторый фиксированный набор. Тогда если для него система (15) не имеет решений, то в силу (4) при всех $\kappa \in K$ соответствующие множества $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(k)$ пустые.

С другой стороны, пусть для всех угловых точек κ^w совместна система (16). Тогда, в силу (4), множества $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(k^w)$ не пусты. Выберем произвольное $\kappa^* \in K$. Покажем, что множество $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(k^*)$ не пусто. Действительно, в силу выпуклости компакта K точка κ^* может быть представлена как выпуклая комбинация его угловых точек

$$\kappa^* = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \kappa^w, \quad \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w = 1, \quad \eta_w \geqslant 0.$$

Пусть x^w – решения системы (16) для соответствующих угловых точек κ^w. Покажем, что в таком случае для выбранной точки $\kappa = \sum_w \eta_w \kappa^w$ решением системы (4) при $D = D(\kappa^*)$ будет $x^* = \sum_w \eta_w x^w$. Заметим, что выполнены следующие соотношения:

$$\langle n_{\alpha_s h}, x^* \rangle = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \langle n_{\alpha_s h}, x^w \rangle < \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w d_{\alpha_s h}(\kappa^w) = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \left(d^0_{\alpha_s h} + \sum_{k=1}^{r} d^k_{\alpha_s h} \kappa^w_k \right) = d_{\alpha_s h}(\kappa^*) \tag{17}$$

при всех $\alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, $h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ и

$$\langle n_{\alpha_s g}, x^* \rangle = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \langle n_{\alpha_s g}, x^w \rangle \leqslant \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w d_{\alpha_s g}(\kappa^w) = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \left(d^0_{\alpha_s g} + \sum_{k=1}^{r} d^k_{\alpha_s g} \kappa^w_k \right) = d_{\alpha_s g}(\kappa^*) \quad (18)$$

при всех $\alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ и $g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$. Отсюда получаем, что $x^* \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(k^*)$, а следовательно, множество $\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(k^*)$ не пусто. Достаточность условия теоремы доказана.

Необходимость условия следует напрямую из способа задания множеств $\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ через систему линейных неравенств (см. (4)). Теорема доказана.

Теперь сформулируем и докажем основной результат, позволяющий строить граф дискретных состояний для семейства разбиений (14). А именно, справедливо следующее следствие из теоремы 1.

Следствие. *Пусть для системы (1) с Γ-инвариантным множеством разбиений (14), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$, найдётся набор $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \in \{1, \ldots, m\})$ такой, что:*

1) существуют $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, что $\alpha_i = \gamma$, $\alpha_j = \delta$;

2) $\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(\kappa) \neq \varnothing$ для всех $\kappa \in K$;

3) $\sigma(\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}; N, D(\kappa)) = \alpha_j = \delta$ для всех $\kappa \in K$;

4) существуют $q_{k_1}, \ldots, q_{k_r} \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что для каждой угловой точки κ^w компакта K совместна (относительно $x \in \mathbb{R}^n$) система

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x \rangle < d_{\alpha_s h}(\kappa^w) \quad \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x \rangle \leqslant d_{\alpha_s g}(\kappa^w) \quad \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}^{q_{k_1}-1}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_1}-2}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ (-1)^{q_{k_1}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}^{q_{k_1}}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_1}-1}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}^{q_{k_2}-1}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_2}-2}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ (-1)^{q_{k_2}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}^{q_{k_2}}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_2}-1}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}^{q_{k_r}-1}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_r}-2}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ (-1)^{q_{k_r}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}^{q_{k_r}}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_r}-1}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \end{cases} \quad (19)$$

где $\{\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_r}\} = L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \{\alpha_l \in \{\alpha_1 \ldots \alpha_p\} : l \neq i, \ n_{\alpha_i \alpha_l} \neq 0\}$.

Тогда для любого разбиения $(N, D(\kappa)) \in F$ при соответствующем переключающем сигнале $\sigma(x; N, D(\kappa))$ для системы (1) существует траектория, при движении вдоль которой режим γ сменяется режимом δ.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\kappa \in K$. В силу выпуклости компакта K точка κ может быть представлена как выпуклая комбинация его угловых точек:

$$\kappa = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \kappa^w, \quad \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w = 1, \quad \eta_w \geqslant 0.$$

Пусть x^w – решения системы (19) для соответствующих угловых точек κ^w. Покажем, что в таком случае для выбранной точки $\kappa = \sum_w \eta_w \kappa^w$ решением системы (9) при $D = D(\kappa)$ будет

$x^* = \sum_w \eta_w x^w$. Действительно, в силу того, что выполнены неравенства (17) и (18), а также соотношения

$$\langle n_{\alpha_i \alpha_{k_l}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-1} x^* + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-2} v_{\alpha_i} \rangle = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_l}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-1} x^w + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-2} v_{\alpha_i} \rangle = 0,$$

$$(-1)^{q_{k_l}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_l}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}} x^* + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-1} v_{\alpha_i} \rangle = (-1)^{q_{k_l}} \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_l}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}} x^w + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-1} v_{\alpha_i} \rangle < 0,$$

получаем, что для рассматриваемого разбиения $(N, D(\kappa))$ совместна соответствующая система (9), т.е. выполнено условие 4) теоремы 1. В силу условия Б и условий 1)–3) доказываемого утверждения для данного разбиения выполнены также условия 1)–3) теоремы 1. Таким образом, выполнены достаточные условия теоремы 1, следовательно, для рассматриваемого разбиения найдётся траектория, при движении вдоль которой режим γ сменяется режимом δ. Из произвольности выбранной точки κ следует утверждение следствия.

Основываясь на следствии, проверку наличия ориентированного ребра (ij) графа дискретных состояний $G(F)$ для некоторого семейства разбиений (14) можно разбить на следующие шаги:

1) проверка выполнения условия Б для рассматриваемого разбиения;

2) формирование множества G_{ij} наборов $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$ таких, что

– $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$ и $\{i, j\} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$,

– $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(\kappa) \neq \varnothing$ для всех $\kappa \in K$;

3) поиск набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p) \in G_{ij}$ (с помощью простого перебора), удовлетворяющего условиям следствия; существование хотя бы одного такого набора означает наличие ориентированного ребра (ij) в графе дискретных состояний $G(F)$.

Заметим, что в силу доказанных утверждений реализация указанных шагов 1)–3) сводится к проверке совместности некоторого конечного числа систем линейных неравенств.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсов А.С., Крылов П.А.* Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 4. С. 554–562.
2. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М., 1968.
3. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 10.05.2023 г.
После доработки 08.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.