ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1550–1560

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ЛЕММА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

© 2023 г. А. В. Юрченков, И. Р. Белов

Рассмотрена дискретная стационарная система с мультипликативными шумами с реализацией в пространстве состояний. Внешнее возмущение выбрано из класса стационарных эргодических последовательностей ненулевой цветности. Уровень средней анизотропии внешнего возмущения считаем ограниченным известным значением. Получены условия ограниченности анизотропийной нормы заданным числом в терминах решения матричной системы неравенств с выпуклым ограничением специального вида. Продемонстрировано, как на основе полученных условий построить статическое управление по состоянию, обеспечивающее минимальное значение анизотропийной нормы замкнутой этим управлением системы.

DOI: 10.31857/S0374064123110109, EDN: PETMIU

Введение. Анизотропийная теория, разработанная И.Г. Владимировым, сформировалась немногим меньше тридцати лет назад [1, 2], когда появилась идея использовать стохастический подход, основанный на понятиях теории информации, для задач, связанных с $\mathcal{H}_\infty$-оптимизацией. Методы подавления влияния внешних возмущений, используемые в $\mathcal{H}_\infty$-теории, обладают большой консервативностью, поскольку рассчитаны на так называемый "наихудший" случай входного возмущения, который на практике зачастую не может быть реализован, вследствие чего может наблюдаться существенный перерасход ресурсов при отработке такого управления. С другой стороны, $\mathcal{H}_2$-оптимальные законы управления являются чувствительными к малым изменениям стохастических параметров внешнего возмущения, которое предполагается стационарным из класса гауссовских. Используемый в анизотропийной теории критерий качества – *анизотропийная норма* – величина, которая для несферичных систем всегда находится между масштабированной $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-нормой (в зависимости от свойств внешнего возмущения), т.е. анизотропийная теория может обобщить результаты как $\mathcal{H}_2$-, так и $\mathcal{H}_\infty$-подходов.

В анизотропийной теории рассматриваются как стационарные (на бесконечном временно́м горизонте), так и нестационарные (на конечном временно́м горизонте) дискретные системы [3, 4], для которых уже решены многие задачи анализа и синтеза, в том числе и с некоторыми видами неопределённости [5]. Однако сравнительно недавно в качестве объекта изучения были приняты системы с мультипликативными шумами [6]. Такой тип описания может позволить учитывать стохастическую неопределённость в модели, что потребовало разработки новых подходов к вопросам анализа таких систем [7]. Определённую трудность, связанную с численным решением систем нелинейных матричных уравнений для оптимальных постановок задач в рамках анизотропийной теории, удалось преодолеть, перейдя к субоптимальным постановкам и соответствующим численным методам на основе полуопределённого программирования [8], вследствие чего специфические для анизотропийной теории системы матричных уравнений (изначально нелинейных) могут быть сведены к задаче оптимизации с выпуклым ограничением.

Для нестационарных систем с мультипликативными шумами на основе решённой задачи анализа [9] были решены задачи оценивания [10, 11], а также предложен способ настройки схемы обмена информацией между датчиками для получения наиболее точной оценки параметров выходной последовательности [12]. Однако для стационарных систем была рассмотрена только задача анализа на основе мажоранты анизотропийной нормы [13]. В данной статье будет развита идея анализа стационарной системы с мультипликативными шумами из работы [14], после чего будет решена задача управления по состоянию в субоптимальной постановке. Задача поиска управления будет сведена к проблеме разрешимости системы матричных неравенств с минимизацией верхней границы анизотропийной нормы, замкнутой этим управлением системы.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим стационарную эргодическую последовательность $W = \{w(k)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ с элементами из пространства $\mathbb{R}^m$. Из элементов последовательности можно получить расширенный вектор произвольной длины (кратной m) следующим образом:

$$W_{r:s} = (w(r)^{\mathrm{T}}, w(r+1)^{\mathrm{T}}, \ldots, w(s)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad W_{r:s} \in \mathbb{R}^{m(r-s+1)}.$$

Теперь на основе такого объекта введём следующее понятие.

Определение 1 [15]. Под *средней анизотропией* стационарной эргодической последовательности случайных векторов $\{w_k\}$ понимают предельное значение усреднённой анизотропии неограниченно растущей последовательности векторов

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

где

$$\mathbf{A}(W) = \inf_{\lambda>0} \mathbf{D}(f||p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2}\ln\left(\frac{2\pi \mathrm{e}}{m}\mathbf{E}[|W|^2]\right) - h(W)$$

– анизотропия случайного вектора W, f – плотность распределения вероятностей вектора W относительно лебеговой меры в $\mathbb{R}^m$, $h(W) = -\mathbf{E}[\ln f(W)] = -\int_{\mathbb{R}^m} f(w)\ln f(w)\,dw$ – дифференциальная энтропия, λ – положительный параметр, определяющий плотность

$$p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2\lambda}\right), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

изотропного гауссовского распределения в $\mathbb{R}^m$ с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m, где I_m – единичная матрица порядка m.

Последовательности, имеющие отличный от нуля уровень средней анизотропии, будем называть "*окрашенными*". Такие последовательности можно генерировать с помощью линейной стационарной системы из белошумной последовательности $V = \{v(k)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ [3]:

$$w(j) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)v(j-k), \quad j \geqslant 0,$$

где $g(k) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – импульсные характеристики системы G с комплекснозначной передаточной функцией

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k g(k),$$

принадлежащей соответствующему пространству Харди $\mathcal{H}_2^{m\times m}$, в которое входят аналитичные внутри открытого единичного диска функции на комплексной плоскости. Спектральная плотность для G определяется как

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{G}(\omega)\widehat{G}^*(\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi), \tag{1}$$

где $\widehat{G}(\omega) = \lim\limits_{r\to1-0} G(re^{i\omega})$ – значение передаточной функции на границе единичного круга, $\widehat{G}^*(\omega)$ – комплексное сопряжение, i – мнимая единица.

С помощью (1) определение средней анизотропии последовательности, генерируемой фильтром G из стационарной гауссовской последовательности с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, может быть дано как

$$\overline{\mathbf{A}}(G) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\,\det\left(\frac{m\widehat{G}(\omega)\widehat{G}^{*}(\omega)}{\|G\|_2^2}\right), \tag{2}$$

где $\|G\|_2$ – $\mathcal{H}_2$-норма передаточной функции:

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}\left(S(\omega)\right)d\omega\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{tr}\left(g^{\mathrm{T}}(k)g(k)\right)\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим линейную стационарную дискретную систему F следующего вида:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad z(k) = Cx(k) + Dw(k), \tag{3}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ – выход системы. Матрицы A, B, C, D имеют соответствующие размерности, причём матрица A устойчива по Шуру $(\rho(A) < 1)$. Внешнее возмущение принадлежит классу последовательностей с известным ограничением на среднюю анизотропию:

$$\mathcal{W}_a = \{W = \{w(k)\}_{k=0}^{+\infty} : \overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a\}. \tag{4}$$

Определение 2 [3]. *Анизотропийной нормой* системы F (3) называют величину, равную

$$\|F\|_a = \sup_{G\in\mathcal{G}_a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2},$$

где G – передаточная функция формирующего фильтра из множества фильтров $\mathcal{G}_a$, генерирующих возмущения из семейства (4).

Приведённое выше определение анизотропийной нормы сформулировано на языке передаточных функций (фактически формирующего фильтра и самой системы F), хотя может быть дано и как супремум отношения мощностных полунорм выхода системы Z ко входу W при условии, что $W \in \mathcal{W}_a$ [16].

Рассмотрим стационарную систему с реализацией вида (3). Приведём утверждение, позволяющее вычислять анизотропийную норму для асимптотически устойчивой системы при фиксированном уровне средней анизотропии a.

Теорема 1 [3]. *Для асимптотически устойчивой линейной стационарной системы F (3), удовлетворяющей условию*

$$\|F\|_2 < \sqrt{m}\|F\|_\infty,$$

существует единственная пара (q, R), $q \in (0, \|F\|_\infty^{-2})$, $R \succ 0$, являющаяся решением уравнения Риккати

$$R = A^{\mathrm{T}}RA + qC^{\mathrm{T}}C + L^{\mathrm{T}}\Sigma L,$$

где

$$\Sigma \equiv (I_m - qD^{\mathrm{T}}D - B^{\mathrm{T}}RB)^{-1}, \quad L \equiv \Sigma(B^{\mathrm{T}}RA + qD^{\mathrm{T}}C),$$

такая, что анизотропийная норма выражается следующим образом:

$$\|F\|_a = \left(\frac{1}{q}\left(1 - \frac{m}{\operatorname{tr}\left(LPL^{\mathrm{T}} + \Sigma\right)}\right)\right)^{1/2},$$

где P – грамиан управляемости системы (3):

$$P = (A+BL)P(A+BL)^{\mathrm{T}} + B\Sigma B^{\mathrm{T}},$$

связанный с заданным уровнем средней анизотропии a выражением

$$-\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m\Sigma}{\operatorname{tr}(LPL^{\mathrm{T}}+\Sigma)}\right)=a.$$

Здесь и далее выражения вида $R\succ 0$ следует понимать в смысле положительной определённости матрицы R.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую линейную по состоянию дискретную стационарную систему:

$$F\sim\begin{cases}x(k+1)=Ax(k)+Bw(k),\\ z(k)=Cx(k)+Dw(k),\end{cases}\tag{5}$$

где $x(k)\in\mathbb{R}^{n_x}$ – состояние, $w(k)\in\mathbb{R}^{m_w}$ – возмущение, $z(k)\in\mathbb{R}^{p_z}$ – выход системы, $B\in\mathbb{R}^{n_x\times m_w}$, $C\in\mathbb{R}^{p_z\times n_x}$, $D\in\mathbb{R}^{p_z\times m_w}$, матрица $A\in\mathbb{L}_2^{n_x\times n_x}$ представима как

$$A=A_0+\sum_{i=1}^{M}\xi_i^A(k)A_i,\tag{6}$$

причём действительные матрицы A_i, $i=\overline{1,M}$, известны. Случайные центрированные величины $\xi_i^A(k)\in\mathbb{L}_2$ независимы по всему набору переменных i, k. Также считается, что вторые моменты случайных величин $\xi_i^A(k)$ известны и конечны (с учётом представления матриц системы (6), не пренебрегая общностью, можно полагать, что $\mathbf{E}[(\xi_i^A(k))^2]=1$). Внешнее возмущение представляет собой элемент из множества последовательностей $W=\{w(k)\}_{k=0}^{+\infty}\in\mathcal{W}_a$, описанного в (4). Внешнее возмущение $w(k)$ статистически независимо с мультипликативными шумам $\xi_i^A(k)$ для любых k. Дополнительное условие для матрицы A системы имеет вид

$$\lim_{k\to+\infty}\rho(\mathbf{E}[A^k])^{1/k}<1\tag{7}$$

и является стохастическим аналогом ограниченности спектрального радиуса. Кроме того, также потребуем, чтобы $\rho(A_0)<1$.

Задача состоит в поиске таких условий на матрицы системы (5), при которых анизотропийная норма

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a=\sup_{W\in\mathcal{W}_a}\frac{\|FW\|_2}{\|W\|_2}\tag{8}$$

была бы ограничена.

3. Основной результат. Из-за того что рассматривая система (5) не является детерминированной, вид формирующего фильтра будет выбран следующим образом:

$$G\sim\begin{cases}x_g(k+1)=\mathbf{E}[A]x_g(k)+Bv(k),\\ w(k)=Lx_g(k)+\Sigma^{1/2}v(k),\end{cases}\tag{9}$$

где матрицы A, B совпадают с аналогичными матрицами в (5), а матрицы $L\in\mathbb{R}^{m_w\times n_x}$, $\Sigma\in\mathbb{R}^{m_w\times m_w}$ подлежат определению, $V=\{v(k)\}$ – последовательность случайных векторов со стандартным распределением, характеризующимся нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей. При указанном виде формирующего фильтра отношение в правой части (8) должно достигать супремума и быть равным анизотропийной норме.

Спектральная плотность линейного объекта (9) имеет вид

$$S(\omega)=\widehat{G}(\omega)\widehat{G}^*(\omega),\quad \omega\in[-\pi,\pi),$$

где $G(z) \in \mathcal{H}_2^{m_w \times m_w}$ – передаточная функция в соответствующем пространстве Харди аналитичных внутри единичного диска на комплексной плоскости с конечной $\mathcal{H}_2$-нормой

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega\right)^{1/2}.$$

При этом средняя анизотропия связана со спектральной плотностью $S(\omega)$ известным соотношением (2).

Сформулируем аналог леммы о вещественной ограниченности [17] для анизотропийной нормы стационарной дискретной системы с мультипликативными шумами.

Теорема 2. *Рассмотрим дискретную систему (5) с внешним возмущением в виде стационарной эргодической последовательности со средней анизотропией, не превосходящей заданное значение a. Анизотропийная норма этой системы будет ограничена значением γ:*

$$|\!|\!| F |\!|\!|_a \leqslant \gamma,$$

если существует решение следующей системы:

$$R_1 = \sum_{i=0}^{M} A_i^{\mathrm{т}} R_1 A_i + qC^{\mathrm{т}}C, \tag{10}$$

$$R_2 = A_0^{\mathrm{т}} R_2 A_0 + L^{\mathrm{т}}\Sigma^{-1}L, \tag{11}$$

$$\Sigma = (I_{m_w} - qD^{\mathrm{т}}D - B^{\mathrm{т}}R_1B - B^{\mathrm{т}}R_2B), \tag{12}$$

$$L = \Sigma(qD^{\mathrm{т}}C + B^{\mathrm{т}}R_1A_0 + B^{\mathrm{т}}R_2A_0), \tag{13}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\,\det\left((1-q\gamma^2)\Sigma\right) \geqslant a, \tag{14}$$

где $q \in [0, \|F\|_\infty^{-2})$, $S = S^{\mathrm{т}} \succ 0$, $R_i = R_i^{\mathrm{т}} \succ 0$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Рассмотрим два функционала

$$\alpha(\Pi) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\,\det \Pi(\omega)\, d\omega, \tag{15}$$

$$\nu(\Pi) = \left(\frac{1}{2\pi m_w}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}\left(\Lambda(\omega)\Pi(\omega)\right) d\omega\right)^{1/2}, \tag{16}$$

где нормированная спектральная плотность для фильтра G (9) из множества нормированных спектральных плотностей $\mathbf{\Pi}$

$$\Pi(\omega) = 2\pi m_w S(\omega)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} S(v)\, dv\right)^{-1},$$

а $\Lambda(\omega) = \mathbf{E}[\widehat{F}^*(\omega)\widehat{F}(\omega)]$. Заметим, что функционал (15) сильно выпуклый [17].

Минимальное значение функционала $\alpha(\Pi)$, при котором будет достигнута пороговая величина γ для функционала $\nu(\Pi)$, как раз соответствует уровню средней анизотропии входного возмущения, поскольку

$$\alpha(\Pi) = \overline{\mathbf{A}}(G), \quad \nu(\Pi) = \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}.$$

Поиск такого формирующего фильтра G может быть сведён к задаче линейного программирования с выпуклым ограничением, поскольку $\alpha(\Pi)$ является выпуклым по своему аргументу, а функционал $\nu^2(\Pi)$ – линейным. Решение задачи может быть получено методом множителей Лагранжа.

Поскольку минимум функционала $\min\limits_{\Pi\in\mathbf{\Pi}:\nu(\Pi)\geqslant\gamma}\alpha(\Pi)$ достигается на спектральной плотности вида

$$S_q(\omega)=(I_{m_w}-q\Lambda)^{-1},\quad q\in[0,\|F\|_\infty^{-2}), \tag{17}$$

то нормализованная спектральная плотность имеет представление

$$\Pi_q(\omega)=2\pi m_w S_q(\omega)\biggl(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{tr}S_q(v)\,dv\biggr)^{-1}.$$

Определяя функции

$$\mathcal{A}(q)=\alpha(\Pi_q),\quad \mathcal{N}(q)=\nu(\Pi_q), \tag{18}$$

которые являются строго монотонно возрастающими по аргументу q, в работе [17] показано, что неравенство $\|F\|_a\leqslant\gamma$ может быть заменено на эквивалентное $\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma))\geqslant a$. Из (17) следует, что

$$\Lambda(\omega)=\frac{1}{q}(I_{m_w}-S_q(\omega))^{-1},$$

вследствие чего

$$\frac{1}{2\pi m_w}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{tr}(\Lambda(\omega)S_q(\omega))\,d\omega=\frac{1}{q}\biggl(\frac{1}{2\pi m_w}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{tr}(S_q(\omega))\,d\omega-1\biggr).$$

Пользуясь определением функций (16), (18), можно сделать вывод, что

$$\frac{1}{2\pi m_w}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{tr}(S_q(\omega))\,d\omega=\frac{1}{1-q(\mathcal{N}(q))^2}. \tag{19}$$

Подставив (19) в (15), получим

$$\mathcal{A}(q)=\mathfrak{A}(q,\mathcal{N}(q)), \tag{20}$$

т.е. при достижении значения γ для функции $\mathcal{N}(q)$ будет справедливо следующее:

$$\mathfrak{A}(q,\gamma)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\det S_q(\omega)\,d\omega-\frac{m_w}{2}\ln(1-q\gamma^2).$$

Функция $\mathfrak{A}(q,\gamma)$ является монотонно возрастающей по параметру $\gamma\in[0,\sqrt{q})$ и достигает максимума по параметру q в точке $q=\mathcal{N}^{-1}(\gamma)$, где совпадает с функцией $\mathcal{A}(q)$. В работе [17] показано, что для некоторого q условие $\|F\|_a\leqslant\gamma$ эквивалентно $\mathfrak{A}(q,\gamma)\geqslant a$.

Установим связь между матрицами системы в пространстве состояний (5) и условием $\mathfrak{A}(q,\gamma)\geqslant a$. Спектральная плотность фильтра $G_\star$, реализующего "наихудшее" возмущение, имеет вид (17). Соотношение $S_q(\omega)=(I_{m_w}-q\Lambda)^{-1}$ можно представить в виде

$$\widehat{\Theta}^*(\omega)\widehat{\Theta}(\omega)=I_{m_w},\quad \omega\in[-\pi,\pi), \tag{21}$$

где $\widehat{\Theta}(\omega)$ – значение передаточной функции системы

$$\Theta=\begin{bmatrix}\sqrt{q}F\\ G_\star{}^{-1}\end{bmatrix} \tag{22}$$

на границе единичного круга на комплексной плоскости.

Условие (21) означает, что система (22) обладает свойством изометричности (т.е. сохраняет норму входа на выходе). “Наихудшее” возмущение $W_\star = G_\star V$ со спектральной плотностью $(I_{m_w} - q\Lambda)^{-1}$ может быть получено следующим образом:

$$w_\star(k) = Lx_g(k) + \Sigma^{1/2}v(k), \tag{23}$$

где матрица L должна удовлетворять условию $\rho(\mathbf{E}[A] + BL) < 1$, $\Sigma = \Sigma^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^{m_w \times m_w} \succ 0$.

После замыкания “наихудшим” возмущением (23) фильтра (9) получены следующие уравнения динамики:

$$G \sim \begin{cases} x_g(k+1) = (\mathbf{E}[A] + BL)x_g(k) + B\Sigma^{1/2}v(k), \\ w(k) = Lx_g(k) + \Sigma^{1/2}v(k). \end{cases}$$

Данная система будет обратима вследствие условия $\Sigma \succ 0$. Это позволяет получить реализацию в пространстве состояний системы (22) в виде

$$\Theta \sim \begin{cases} \bar{x}(k+1) = \overline{A}\bar{x}(k) + \overline{B}w(k), \\ \bar{z}(k) = \overline{C}\bar{x}(k) + \overline{D}w(k), \end{cases} \tag{24}$$

где $\bar{x}^{\mathrm{т}}(k) = (x^{\mathrm{т}}(k), \xi^{\mathrm{т}}(k))^{\mathrm{т}}$ – расширенное состояние, объединяющее состояние системы (5) и состояние обращенного фильтра $G_\star{}^{-1}$, $\bar{z}^{\mathrm{т}} = (z^{\mathrm{т}}(k), v^{\mathrm{т}}(k))$, матрицы связаны с матрицами систем (5) и (9) следующим образом:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{E}[A] \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{bmatrix} \sqrt{q}C & 0 \\ 0 & -\Sigma^{-1/2}L \end{bmatrix}, \quad \overline{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{q}D \\ \Sigma^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Будем искать грамиан наблюдаемости системы (24) в виде

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix},$$

где $R_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i = 1, 2$. При этом положительно определённая матрица R должна удовлетворять уравнению Ляпунова

$$R = \mathbf{E}[\overline{A}^{\mathrm{т}} R \overline{A}] + \overline{C}^{\mathrm{т}}\overline{C},$$

что соответствует уравнениям (10), (11).

Используя критерий изометричности в пространстве состояний [18], получаем достаточные условия изометричности системы Θ:

$$(\mathbf{E}[\overline{B}^{\mathrm{т}} R \overline{A}] + \overline{D}^{\mathrm{т}}\overline{C})\overline{P} = 0, \tag{25}$$

$$\mathbf{E}[\overline{B}^{\mathrm{т}} R \overline{B}] + \overline{D}^{\mathrm{т}}\overline{D} = I_{2m_w} \tag{26}$$

при условии управляемости пары $(\overline{A}, \overline{B})$. Здесь стоит уточнить, что подразумевается управляемость пары $(\overline{A}, \overline{B})$ почти всюду, что эквивалентно условию управляемости пары $(\mathbf{E}[A], B)$. Матрица $\overline{P} = (P^{\mathrm{т}}, P^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$ связана с решением уравнения Ляпунова

$$P = A_0 P A_0^{\mathrm{т}} + BB^{\mathrm{т}}.$$

Таким образом, из условий (25), (26) получены условия для матриц L, Σ в (12), (13).

С помощью формулы Колмогорова–Сегё [19] можно установить следующую связь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det S_q(\omega)\,d\omega = \ln\det\Sigma,$$

что позволяет получить зависимость (20) от матрицы Σ:

$$\mathfrak{A}(q,\gamma) = -\frac{1}{2}\ln\det\left((1-q\gamma^2)\Sigma\right).$$

Из последнего следует, что выполнение условия $\mathfrak{A}(q,\gamma) \geqslant a$ зависит от матрицы Σ, связанной через параметр q с Риккати-подобным семейством уравнений (10)–(14). Теорема доказана.

4. Управление на основе статической обратной связи по состоянию. На основе системы (5) будем рассматривать систему с управлением следующего вида:

$$F \sim \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_u u(k) + Bw(k), \\ z(k) = Cx(k) + Dw(k), \end{cases} \tag{27}$$

где матрицы A, B, C, D совпадают с аналогичными в (5), $B_u \in \mathbb{R}^{n_x\times m_u}$, $u(k)\in\mathbb{R}^{m_u}$ – управление, пара $(\mathbf{E}[A], B_u)$ является управляемой.

Выберем управление в виде обратной связи по состоянию $u(k) = Kx(k)$, $K \in \mathbb{R}^{m_u\times n_x}$. Задачу управления можно сформулировать следующим образом: найти такое значение коэффициента усиления K, при котором значение анизотропийной нормы замкнутой системы $F_{\rm cl}$ будет ограничено сверху числом γ.

Результат, сформулированный в теореме 2, может быть легко адаптирован, как показано в работе [20], для применения методов выпуклой оптимизации.

Теорема 3 [18]. *Для системы с мультипликативными шумами (5) при условии (7), на которую действует возмущение со средней анизотропией, не превосходящей заданного значения a, анизотропийная норма не будет превышать заданного значения $|\!|\!|F|\!|\!|_a \leqslant \gamma$, если имеют решения следующие неравенства:*

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{M} A_i^{\rm T} R A_i - R + C^{\rm T}C & * \\ B^{\rm T}RA_0 + D^{\rm T}C & -\eta I_m + D^{\rm T}D + B^{\rm T}RB \end{bmatrix} \prec 0, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_m - \Psi - D^{\rm T}D & * \\ RB & R \end{bmatrix} \succ 0, \tag{29}$$

$$\ln\det\Psi \geqslant 2a + m_w\ln(\eta-\gamma^2), \tag{30}$$

где $R = R^{\rm T} \succ 0$, $\Psi = \Psi^{\rm T}\succ 0$, $\eta > 0$.

После замыкания управлением системы (5) и применения теоремы 2 неравенство (28) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{M} A_i^{\rm T} R A_i + (A_0+B_uK)^{\rm T}R(A_0+B_uK) - R + C^{\rm T}C & * \\ B^{\rm T}R(A_0+B_uK) + D^{\rm T}C & -\eta I_m + D^{\rm T}D + B^{\rm T}RB \end{bmatrix} \prec 0. \tag{31}$$

Это неравенство будет нелинейным относительно неизвестных матриц R и K. Такой тип нелинейности можно легко обойти. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 4. *Пусть уровень средней анизотропии внешнего возмущения системы (27) ограничен заданным значением $a \geqslant 0$, управление выбрано в виде $u(k) = Kx(k)$. Анизотропийная норма замкнутой системы будет ограничена пороговым значением γ, если система неравенств*

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & \cdots & * & * \\ A_0\Phi + B_u\Lambda & B & -\Phi & * & \cdots & * & * \\ A_1\Phi & 0 & 0 & -\Phi & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_M\Phi & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\Phi & * \\ C\Phi & D & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0, \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_m - \Psi - D^{\text{т}} D & * \\ B & \Phi \end{bmatrix} \succ 0 \tag{33}$$

совместно с (30) имеет решение относительно $\Phi \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{m_w \times m_w}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}$ *и скалярного параметра* η, *причём* $\Phi = \Phi^{\text{т}} \succ 0$, $\Psi = \Psi^{\text{т}} \succ 0$, $\eta > 0$, *а матричный коэффициент* $K \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}$ *вычисляется по формуле* $K = \Lambda \Phi^{-1}$.

Доказательство. Применив к неравенству (31) лемму Шура [21], получим неравенство

$$\begin{bmatrix} -R & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & \cdots & * & * \\ R(A_0 + B_u K) & RB & -R & * & \cdots & * & * \\ RA_1 & 0 & 0 & -R & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ RA_M & 0 & 0 & 0 & \cdots & -R & * \\ C & D & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Умножив последнее неравенство справа и слева на блочно-диагональную матрицу

$$\operatorname{blckdiag}(R^{-1}, I, R^{-1}, \ldots, R^{-1}, I)$$

и введя новые переменные $\Phi = R^{-1}$, $K\Phi = \Lambda$, получим неравенство (32). Аналогично изменяется ненравенство (29) при конгруэнтном преобразовании $\operatorname{blckdiag}(I, R^{-1})$, неравенство (30) при этом не меняется. Теорема доказана.

Неравенства (32), (33) являются линейными по совокупности своих переменных, а неравенство (30) – выпуклое относительно γ^2. Следовательно, можно поставить следующую задачу выпуклой оптимизации:

$$\gamma^2 \xrightarrow{(30),(32),(33)} \min \quad \text{w.r.t.} \quad \Lambda, \quad \Phi = \Phi^{\text{т}} \succ 0, \quad \Psi = \Psi^{\text{т}} \succ 0, \quad \eta > 0, \quad \gamma^2. \tag{34}$$

После численного решения задачи (34) стандартными средствами [22] коэффициент при управлении можно вычислить по формуле $K = \Lambda \Phi^{-1}$.

5. Моделирование. Сравним результаты для управления, сформированного на основе анизотропийного и $\mathcal{H}_2$-регулятора, с точки зрения нормы выхода, а также приведём оценки верхней границы анизотропийной нормы для разного уровня средней анизотропии возмущения.

В качестве объекта управления выбрана модель сервопривода для подводного аппарата [23]. Внешнее возмущение выбиралось из класса двумерных, окрашенных с известным уровнем средней анизотропии a, для указанной модели внешнее возмущение представляет собой возможное влияние на подводный аппарат случайных течений. После дискретизации в модель были добавлены два мультипликативных шума, матричный коэффициент A_1 при первом был выбран на основе матрицы A, где вторая строка была умножена на 0.1, остальные строки – нулевые; матрица A_2 имела единственный ненулевой столбец под номером три, который был пропорционален третьему столбцу матрицы A с коэффициентом 0.05. Рассматриваемая модель имела восемь пространственных переменных, в качестве регулируемой переменной выбрано положение руля, на который действует сила, генерируемая сервоприводом. В качестве двух управлений рассматриваются обратные связи по давлению и по положению нагрузки.

Граница γ анизотропийной нормы замкнутой управлением системы была посчитана для различных уровней a, в таблице приводится значение евклидовой нормы регулируемой переменной, а для сравнения даны значения аналогичной нормы регулируемой переменной при использовании $\mathcal{H}_2$-регулятора при том же уровне окрашенности внешнего возмущения. Как видно из приведённых значений, с увеличением окрашенности внешнего возмущения (т.е. его отличия от равномерного распределения) анизотропийный регулятор имеет более выраженную тенденцию к уменьшению нормы регулируемой переменной, т.е. демонстрирует более высокое качество.

Таблица. Результаты моделирования

a	γ	$\|z\|_2$-норма	
		Анизотропийный регулятор	$\mathcal{H}_2$-регулятор
0.01	0.7370	11.7841	12.0900
0.05	0.7960	16.0702	17.3483
1.00	1.0057	20.1657	23.6001
5.00	1.1372	213.1535	237.4295

Заключение. В работе получено условие ограниченности анизотропийной нормы для стационарной дискретной системы с мультипликативными шумами в терминах существования решения выпуклой задачи оптимизации. На основе полученного критерия ограниченности решена задача синтеза статического управления по состоянию. В качестве перспективного направления можно указать проблемы синтеза регулятора на основе наблюдений и динамического регулятора. Также можно рассматривать наличие мультипликативных шумов при возмущении в пространственном описании объекта управления.

Работа выполнена при частичной поддержке программы “Приоритет 2030” МГТУ имени Н.Э. Баумана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P.* Stochastic approach to $\mathcal{H}_\infty$-optimization // Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control. 1994. V. 3. P. 2249–2250.
2. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 5. С. 583–585.
3. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // Proc. 13 IFAC World Congr. 1996. P. 179–184.
4. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // Автоматика и телемеханика. 2006. № 8. С. 92–111.
5. *Курдюков А.П., Максимов Е.А.* Робастная устойчивость линейных дискретных систем с неопределённостью, ограниченной по анизотропийной норме // Докл. РАН. 2005. Т. 400. № 2. С. 178–180.
6. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.-M.* Matematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2010.
7. *Kustov A.Yu.* State-space formulas for anisotropic norm of linear discrete time varying stochastic systems // Proc. 15th Int. Conf. on Electrical Eng., Comp. Science and Aut. Control (CCE). 2018. P. 6.
8. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Критерий строгой ограниченности анизотропийной нормы заданным значением в терминах матричных неравенств // Докл. РАН. 2011. Т. 441. № 3. С. 318–321.
9. *Belov I.R., Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu.* Anisotropy-based bounded real lemma for multiplicative noise systems: the finite horizon case // Proc. of the 27th Mediterranean Conf. on Control and Automation. 2019. P. 148–152.
10. *Kustov A.Yu., Yurchenkov A.V.* Finite-horizon anisotropy-based estimation with packet dropouts // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. № 2. P. 4516–4520.
11. *Kustov A.Yu., Yurchenkov A.V.* Finite-horizon anisotropic estimator design in sensor networks // Proc. of the 59th IEEE Conf. on Decision and Control. 2020. P. 4330–4335.
12. *Юрченков А.В.* Пример настройки матрицы смежности для сети датчиков с анизотропийным критерием // Управление большими системами. 2022. Вып. 99. С. 38–56.
13. *Юрченков А.В., Кустов А.Ю., Курдюков А.П.* Условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами // Докл. РАН. 2016. Т. 467. № 4. С. 396–399.
14. *Кустов А.Ю., Тимин В.Н., Юрченков А.В.* Условие ограниченности анизотропийной нормы стационарной системы с мультипликативными шумами // Тр. 13-й мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2020). 2020. С. 340–342.
15. *Diamond P.M., Kloeden P.D., Vladimirov I.G.* Mean anisotropy of homogeneous Gaussian random fields and anisotropic norms of linear translation-invariant operators on multidimensional integer lattices // J. of Appl. Math. and Stoch. Anal. 2003. V. 16. № 3. P. 209–231.

16. *Kurdyukov A.P., Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu.* Robust stability in anisotropy-based theory with non-zero mean of input sequence // Proc. of the 21st Intern. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems. 2014. P. 208–214.
17. *Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M.* Anisotropy-based bounded real lemma // Proc. of 19th Intern. Symp. om Mathematical Theory of Networks and Systems. 2010. P. 291–297.
18. *Gu D.-W., Tsai M.C., O'Young S.D., Postlethwaite I.* State-space formulae for discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ optimization // Int. J. of Control. 1989. V. 49. P. 1683–1723.
19. *Grenader U., Szegö G.* Toeplitz Forms and Their Applications. Cambridge, 1958.
20. *Юрченков А.В.* Условие ограниченности анизотропийной нормы для стационарных систем с мультипликативными шумами // Проблемы управления. 2022. № 5. С. 16–24.
21. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. New York, 2004.
22. *Löfberg J.* YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB // Proc. of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. P. 284–289.
23. *Davison E.J.* Benchmark problems for control system design // Report of the IFAC Theory Comittee, 1990. P. 41–42.

Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 01.05.2023 г.
После доработки 14.09.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.