ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1561–1565

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.958

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА В ТОНКОМ СЛОЕ

© 2023 г. Е. С. Болдырева

Исследуется существование и устойчивость периодических решений модельного уравнения Навье–Стокса в тонком трёхмерном слое в зависимости от существования и устойчивости периодических решений одного специального предельного двумерного уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064123110110, EDN: PDGIXG

Введение. Уравнение Навье–Стокса является классической моделью исследований течения ньютоновской жидкости. Наиболее подробно уравнения Навье–Стокса исследованы в фундаментальных работах [1–3] и др.

Цель данной статьи – исследовать периодические по времени решения модельного уравнения Навье–Стокса несжимаемой жидкости в тонкой трёхмерной области $Q = \Omega \times (0, \varepsilon)$, где $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – прямоугольник, ε – малый параметр. Для этого рассматривается трёхмерное уравнение Навье–Стокса, дополненное периодическими по пространственным переменным граничными условиями и уравнением несжимаемости.

Данная задача рассматривалась многими авторами (см., например, [4–8]). Постановка задачи в тонком слое впервые была предложена в работе [4]. Модельная задача Навье–Стокса в параллелепипеде рассматривается в [5], там же вводится понятие “приведённой” системы уравнений, которая является в некотором смысле предельной: это трёхмерная система функций, зависящая от времени t и двух пространственных переменных, лежащих в области Ω. Два уравнения этой системы являются двумерным уравнением Навье–Стокса в прямоугольнике, а третье – линейное параболическое уравнение.

Отметим, что после замены переменных толщина ε сингулярно входит в систему уравнений. В настоящей работе осуществляются предельные переходы, которые идейно близки к принципу усреднения (см. [9, 10]).

Дополнительным требованием является нулевое среднее по пространственным переменным исследуемых решений. На важность такого класса решений указано в работе [7]. При выполнении этого требования в настоящей статье найдены условия, при которых наличие периодического решения у двумерного уравнения из “приведённой” системы влечёт за собой существование при малых ε периодических по t решений у трёхмерного уравнения. Более того, установлено, что устойчивость по первому приближению периодического решения двумерного уравнения Навье–Стокса в приведённой системе влечёт за собой при малых ε устойчивость этих решений у трёхмерного уравнения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трёхмерное уравнение Навье–Стокса в тонком слое

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu\triangle U + (U\cdot\nabla)U + \nabla P = F(t, x_1, x_2, x_3), \quad \nabla\cdot U = 0, \tag{1}$$

где $t > 0$ и $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega_\varepsilon$ ($\Omega_\varepsilon = \Omega \times (0, \varepsilon)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – прямоугольник $[0, l_1] \times [0, l_2]$ и $\varepsilon > 0$ – малая величина); функция $U = (U_1, U_2, U_3)$ – трёхмерная вектор-функция от переменных (t, x_1, x_2, x_3), которая является скоростью течения элемента в момент времени t в точке (x_1, x_2, x_3); коэффициент ν – кинематическая вязкость, ниже будем считать, что $\nu = 1$; скалярная величина $P = P(t, x_1, x_2, x_3)$ – давление; $F = F(t, x_1, x_2, x_3)$ – внешняя сила, предполагается T-периодической по переменной t.

Будем рассматривать уравнение (1) как эволюционное уравнение относительно скорости $U = (U_1(t, x_1, x_2, x_3), U_2(t, x_1, x_2, x_3), U_3(t, x_1, x_2, x_3))$ и давления $P = P(t, x_1, x_2, x_3)$. Задача для уравнения (1) будет изучаться при наличии периодических по пространственным переменным граничных условий

$$U(t,0,x_2,x_3)=U(t,l_1,x_2,x_3),\quad U_{x_1}(t,0,x_2,x_3)=U_{x_1}(t,l_1,x_2,x_3),$$
$$U(t,x_1,0,x_3)=U(t,x_1,l_2,x_3),\quad U_{x_2}(t,x_1,0,x_3)=U_{x_2}(t,x_1,l_2,x_3),$$
$$U(t,x_1,x_2,0)=U(t,x_1,x_2,\varepsilon),\quad U_{x_3}(t,x_1,x_2,0)=U_{x_3}(t,x_1,x_2,\varepsilon), \tag{2}$$

где U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3} – производные от функции U по x_1, x_2, x_3 соответственно. Уравнение (1) с краевыми условиями (2) можно интерпретировать как течение на трёхмерном тонком в одном направлении торе.

Кроме того, при выполнении условия

$$\int\limits_Q F\,dx=0, \tag{3}$$

как показано в [7], если в начальный момент времени

$$\int\limits_Q U\,dx=0, \tag{4}$$

то все решения U будут обладать таким же свойством в любой момент времени.

Произведём в задаче (1), (2) следующую замену переменных:

$$x_1=x_1,\quad x_2=x_2,\quad x_3=\varepsilon y,$$
$$\widetilde{u}(t,x_1,x_2,y)=U(t,x_1,x_2,\varepsilon y),\quad p(t,x_1,x_2,y)=P(t,x_1,x_2,\varepsilon y).$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{d\widetilde{u}_\varepsilon}{dt}-\triangle_\varepsilon\widetilde{u}_\varepsilon+(\widetilde{u}_\varepsilon\cdot\nabla_\varepsilon)\widetilde{u}_\varepsilon=F_\varepsilon(t,x_1,x_2,\varepsilon y), \tag{5}$$

где $\nabla_\varepsilon=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,\varepsilon^{-1}\partial/\partial y)$ и $\triangle_\varepsilon=(\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\varepsilon^{-2}\partial^2/\partial y^2)$ – сингулярные по ε дифференциальные выражения, граничные условия (2) запишутся как

$$\widetilde{u}(t,0,x_2,y)=\widetilde{u}(t,l_1,x_2,y),\quad \widetilde{u}_{x_1}(t,0,x_2,y)=\widetilde{u}_{x_1}(t,l_1,x_2,y),$$
$$\widetilde{u}(t,x_1,0,y)=\widetilde{u}(t,x_1,l_2,y),\quad \widetilde{u}_{x_2}(t,x_1,0,y)=\widetilde{u}_{x_2}(t,x_1,l_2,y),$$
$$\widetilde{u}(t,x_1,x_2,0)=\widetilde{u}(t,x_1,x_2,1),\quad \widetilde{u}_{x_3}(t,x_1,x_2,0)=\widetilde{u}_{x_3}(t,x_1,x_2,1), \tag{6}$$

а условия (3) и (4) перейдут в условия $\int_Q\widetilde{u}_\varepsilon\,dx=0$ и $\int_Q F_\varepsilon\,dx=0$ соответственно, где $Q=$ $=(0,l_1)\times(0,l_2)\times(0,1)$.

Обозначим через A_ε оператор, порождённый эллиптическим дифференциальным выражением $\triangle_\varepsilon$ и граничными условиями (6), т.е. $A_\varepsilon\widetilde{u}=-\triangle_\varepsilon\widetilde{u}_\varepsilon$, а через B_ε – оператор, определяемый равенством $B_\varepsilon\widetilde{u}=(\widetilde{u}_\varepsilon\cdot\nabla_\varepsilon)\widetilde{u}_\varepsilon$. Тогда, как показано в [11], для любого фиксированного $\varepsilon>0$ оператор A_ε – сильно-позитивный в пространстве $L_2(Q)$, поэтому для него определены $e^{-A_\varepsilon t}$ и дробные степени $A_\varepsilon^{-\alpha}$, где $-1<-\alpha<0$.

Используя стандартные замены с дробными степенями $\widetilde{u}=A_\varepsilon^{-\alpha}\hat{u}$ (см. [11, 12]), уравнение (5) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{d\hat{u}}{dt}+A_\varepsilon\hat{u}=A^\alpha F_\varepsilon-B_\varepsilon\hat{u}. \tag{7}$$

Задача о T-периодических по t решениях уравнения (7) сводится к задаче о нахождении неподвижных точек интегрального оператора (см. [11])

$$\Phi_\varepsilon(\hat{u}) = e^{-A_\varepsilon t}(I - e^{-A_\varepsilon T})^{-1}\int_0^T A_\varepsilon^\alpha e^{-A_\varepsilon(T-s)}(F_\varepsilon - B_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha}\hat{u}(s))\,ds + \int_0^t A_\varepsilon^\alpha e^{-A_\varepsilon(t-s)}(F_\varepsilon - B_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha}\hat{u}(s))\,ds$$

в пространстве $C_T(L_2(Q)$ – T-периодических по t функций со значениями в пространстве $L_2(Q)$.

Будем предполагать, что неподвижные точки являются гладкими функциями, тогда от интегрального уравнения $\hat{u} = \Phi_\varepsilon(\hat{u})$ можно перейти к дифференциальному уравнению (7) (см. [11]), т.е. если $\hat{u}$ – неподвижная точка оператора Φ_ε, то $A_\varepsilon^\alpha \widetilde{u}$ – решение уравнения (7).

Первым результатом данной работы является доказательство существования при малых ε периодических по t решений r_ε. Затем с помощью линеаризации по В.И. Юдовичу [3] исследуется устойчивость решений r_ε. Линеаризованное уравнение (см. [3]) имеет вид

$$\bar{u}'_\varepsilon - \triangle_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon + (r_\varepsilon(t)\cdot\nabla_\varepsilon)\bar{u}_\varepsilon + (\bar{u}_\varepsilon\cdot\nabla_\varepsilon)r_\varepsilon(t) = 0.$$

Исследуем устойчивость периодических по t решений уравнения (7) с помощью спектральной задачи

$$u_\varepsilon{}' + A_\varepsilon u_\varepsilon + B_\varepsilon(t)u_\varepsilon + \sigma_\varepsilon u_\varepsilon(t) = 0, \tag{8}$$

где $u_\varepsilon(t)$ – T-периодическая по t функция, $B_\varepsilon(t)u_\varepsilon = (r_\varepsilon(t)\cdot\nabla_\varepsilon)u_\varepsilon + (u_\varepsilon\cdot\nabla_\varepsilon)r_\varepsilon(t)$, а σ_ε – спектральный параметр. Для этого используем результат В.И. Юдовича об устойчивости, который в наших обозначениях сформулируем как

Теорема 1. *Для того чтобы периодическое решение r_ε уравнения (5) при малом ε было асимптотически устойчивым, достаточно, чтобы уравнение (8) не имело нетривиальных периодических решений при* $\operatorname{Re}\sigma_\varepsilon \leqslant -\sigma_0 < 0$.

2. Приведённое уравнение Навье–Стокса. Предельный переход в операторе Φ_ε при $\varepsilon \to 0$ описывается при помощи “приведённой” системы (см. [4, 6]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)v + (v\cdot\bigtriangledown_2)v = \begin{pmatrix}F_{01}\\ F_{02}\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_3 + \left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u_3 = F_{03}, \tag{9}$$

где $u = (v_1(t,x_1,x_2), v_2(t,x_1,x_2), u_3(t,x_1,x_2))$, $v = (v_1(t,x_1,x_2), v_2(t,x_1,x_2))$, $u_3 = u_3(t,x_1,x_2)$. В (9) учтено, что функция $F_0(t,x_1,x_2) = F(t,x_1,x_2,0)$ и является трёхмерной:

$$F_0(t,x_1,x_2) = (F_{01}(t,x_1,x_2), F_{02}(t,x_1,x_2), F_{03}(t,x_1,x_2)).$$

Рассмотрим систему уравнений (9) со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} &u(t,0,x_2) = u(t,l_1,x_2), \quad u_{x_1}(t,0,x_2) = u_{x_1}(t,l_1,x_2),\\ &u(t,x_1,0) = u(t,x_1,l_2), \quad u_{x_2}(t,x_1,0) = u_{x_2}(t,x_1,l_2). \end{aligned} \tag{10}$$

Кроме того, будем предполагать, что выполнены равенства $\bigtriangledown_2\cdot v = 0$. Заметим, что если $\int_\Omega F_0\,dx = 0$, то для периодических по t решений u выполнено тождество

$$\int_\Omega u(t,x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \equiv 0.$$

Обозначим через A_0 оператор, порождённый эллиптическим дифференциальным выражением $\triangle_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ и граничными условиями (10).

Для "приведённой" системы (9) задача об исследовании устойчивости (см. теорему 1) решений данной системы сводится к отсутствию периодических решений при $\sigma \geqslant \sigma_0$ с $\operatorname{Re}\sigma > 0$ следующей спектральной задачи:

$$\frac{\partial \widehat{w}}{\partial t} + \widehat{A_0}\widehat{w} + \widehat{A_0^\alpha}\widehat{B_0}\widehat{A_0^{-\alpha}}\widehat{w} + \sigma\widehat{w} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + \widehat{A_0}w_3 + \widehat{A_0^\alpha}\widehat{B_{03}}\widehat{A_0^{-\alpha}}w_3 + \sigma w_3 = 0. \tag{12}$$

Системе (11), (12) соответствует действующий в пространстве $C_T(L_2(\Omega))$ оператор Φ_{0_2}, задаваемый формулой

$$\Phi_{0_2}(w) = e^{-A_0 t}(I - e^{-A_0 T})^{-1}\int\limits_0^T A_0^\alpha e^{-A_0(T-s)}(B_0(s) - \sigma)A_0^{-\alpha}w(s)\,ds +$$
$$+ \int\limits_0^t A_0^\alpha e^{-A_0(t-s)}(B_0(s) - \sigma)A_0^{-\alpha}w(s)\,ds.$$

Пусть M – проекция, полученная интегрированием по переменной y:

$$(Mu)(x_1, x_2, x_3) = \int\limits_0^1 u(x_1, x_2, y)\,dy,$$

таким образом, Mu фактически не зависит от третьей переменной. Очевидно, $M : L_2(Q) \to \to L_2(Q)$. В силу лемм 1, 2 из статьи [6] при $\varepsilon \to 0$ оператор $\Phi_\varepsilon(u) \to \Phi_0(Mu)$, где $\Phi_0(Mu)$ определяется формулой

$$\Phi_0(M\hat{u}) = e^{-A_0 t}(I - e^{-A_0 T})^{-1}\int\limits_0^T A_0^\alpha e^{-A_0(T-s)}(F_0 - B_0 A_0^{-\alpha}M\hat{u})\,ds +$$
$$+ \int\limits_0^t A_0^\alpha e^{-A_0(t-s)}(F_0 - B_0 A_0^{\alpha}M\hat{u})\,ds.$$

При таком доопределении оператора $\Phi_\varepsilon(u)$ при $\varepsilon = 0$ получившийся оператор $\Phi_\varepsilon(u)$ будет вполне непрерывным по совокупности переменных (ε, u).

Заметим, что неподвижные точки оператора $\Phi_0(M\hat{u})$ являются функциями двух пространственных переменных и поэтому совпадают с неподвижными точками $\Phi_{0_2}(u)$ в пространстве $C_T(L_2(\Omega))$.

3. Теоремы о существовании и устойчивости. Главным результатом данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть "приведённое" трёхмерное уравнение Навье–Стокса (9) имеет T-периодическое по t решение u^0 такое, что спектральная задача, построенная по линеаризованному на первых двух компонентах решения u^0 двумерного уравнения Навье–Стокса*

$$\frac{\partial q^0}{\partial t} - \triangle_2 q^0 + (q^0\triangledown_2)v_i^0(t) + (v_i^0(t)\triangledown_2)q^0 = 0, \quad i = 1, 2,$$

в классе T-периодических по t решений, удовлетворяющих условиям (3), (4), не вырождена. Тогда при малых ε трёхмерное уравнение Навье–Стокса (5) имеет периодические по t решения r_ε и справедливо соотношение

$$\sup_t\biggl(\int\limits_Q |r_\varepsilon(t, x_1, x_2, y) - u^0(t, x_1, x_2)|^2\,dx_1\,dx_2\,dy\biggr) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

В доказательстве теоремы главную роль играет следующая вспомогательная лемма, имеющая и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть спектральная задача (12), построенная по линеаризованному на первых двух компонентах решения* u^0 *двумерного уравнения Навье–Стокса, в классе* T*-периодических по* t *решений не вырождена при всех* σ *с* $\operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$. *Тогда при том же* σ *спектральная задача (11), (12), построенная по приведённой линеаризованной на решении* u^0 *системе, тоже не вырождена.*

Теорема 3. *Пусть спектральная задача (12), построенная по двумерному линеаризованному на первых двух компонентах решения* u^0 *уравнения Навье–Стокса, в классе* T*-периодических по* t *решений не вырождена при* $\operatorname{Re}\sigma \leqslant -\sigma_0 \neq 0$, *т.е.* $v_i^0(t)$, $i = 1, 2$, *является асимптотически устойчивым решением двумерного уравнения Навье–Стокса (10). Тогда при достаточно малом* ε *спектральная задача, построенная по трёхмерному линеаризованному на решении* r_ε *уравнению (8), тоже не вырождена при* $\operatorname{Re}\sigma_\varepsilon \leqslant -\sigma_0 < 0$, *т.е. решение* r_ε *будет асимптотически устойчивым решением уравнения (5).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leray J.* Etude de diverses equations integrales nonlineaires et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique // J. Math. Pures Appl. 1933. V. 12. P. 1–82.
2. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
3. *Юдович В.И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов, 1984.
4. *Raugel G., Sell G.* Navier–Stokes equations on thin 3FD domains. I: Global attractors and global regularity of solutions // J. Amer. Math. Soc. 1993. V. 6. P. 503–568.
5. *Raugel G., Sell G.* Equations de Navier–Stokes dans des domaines minces endimension trois: regularite globale // C. R. Acad. Sci. Paris. 1989. V. 309. P. 299–303.
6. *Johnson R., Kamenskii M., Nistri P.* On the existence of periodic solutions of the Navier–Stokes equations in thin domain using the topological degree // J. of Dynamics and Differ. Equat. 2000. V. 12. № 4. P. 681–712.
7. *Foias C., Manley O., Rosa R., Temam R.* Navier–Stokes Equations and Turbulence. Cambridge, 2009.
8. *Звягин В.Г.* Введение в топологические методы нелинейного анализа. Воронеж, 2014.
9. *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для системы уравнений с оператором Навье–Стокса в главной части // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. № 1. С. 94–127.
10. *Гурова И.Н.* Одно утверждение типа принципа родственности и вторая теорема Н.Н. Боголюбова в принципе усреднения параболических уравнений // Качественные и приближённые методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1982. С. 47–58.
11. *Красносельский М.А.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
12. *Соболевский П.Е.* О нестационарных уравнениях гидродинамики вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 1. С. 45–48.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 02.09.2023 г.
После доработки 02.09.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.