ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1566–1570

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.51

БИФУРКАЦИЯ ХОПФА В СИСТЕМЕ ХИЩНИК–ЖЕРТВА С ИНФЕКЦИЕЙ

© 2023 г. **А. П. Крищенко, О. А. Поддерегин**

Исследуется модель системы хищник–жертва с возможной инфекцией жертв в виде трёхмерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью метода локализации инвариантных компактов доказывается существование аттрактора и находится компактное положительно инвариантное множество, оценивающее его положение. Находятся условия вымирания популяций и существования положений равновесия. Предлагается численный метод нахождения бифуркации Хопфа пространственного положения равновесия и приводится пример возникающего устойчивого предельного цикла.

DOI: 10.31857/S0374064123110122, EDN: PEXCDU

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую динамику взаимодействия популяций хищников и жертв, при которой жертвы подвержены заболеванию [1]:

$$\dot{x_1} = b_1(x_1+x_2)(1-x_1) - \frac{x_1x_3}{b_2+x_1+x_2} - b_4x_1x_2,$$

$$\dot{x_2} = b_4x_1x_2 - \frac{x_2x_3}{b_2+x_1+x_2} - b_5x_2 - b_1(x_1+x_2)x_2,$$

$$\dot{x_3} = \frac{(x_1+x_2)x_3}{b_2+x_1+x_2} - b_3x_3, \tag{1}$$

где $\dot{\{\cdot\}} = d\{\cdot\}/dt$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3_{+,0}=\{x\geqslant 0\}$, x_1 (x_2) – плотность популяции восприимчивых (инфицированных) жертв, а x_3 – плотность популяции хищников. Параметры b_i, $i=\overline{1,5}$, этой системы предполагаются положительными.

Для системы (1) докажем, что множество $\mathbb{R}^3_{+,0}$ положительно инвариантно, существует положительно инвариантный компакт, содержащий все инвариантные компакты, все решения (траектории) продолжаются на неограниченный вправо интервал времени и система имеет аттрактор. Кроме того, найдём условия вымирания популяций инфицированных жертв, хищников и предложим метод нахождения бифуркации Хопфа внутреннего положения равновесия, в результате которой в системе возникает устойчивый предельный цикл внутри множества $\mathbb{R}^3_{+,0}$. Отметим, что система (1) в инвариантной плоскости $\{x_2=0\}$ описывает взаимодействие хищников и жертв при отсутствии инфекции и известно, что в этой двумерной системе может происходить другая бифуркация Хопфа, в результате которой появляется предельный цикл в множестве $\{x_2=0\}$.

2. Необходимые сведения. Все компактные инвариантные множества системы $\dot{x} = F(x)$, $F\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, содержащиеся в подмножестве $Q\subset\mathbb{R}^n$, содержатся в *локализирующем множестве* $\Omega(\phi,Q)$, соответствующем функции $\phi\in C^1(\mathbb{R}^n)$ (*локализирующей функции*) и множеству $Q\subset\mathbb{R}^n$ [2],

$$\Omega(\phi,Q)=\{x\in Q: \phi_{\inf}(Q)\leqslant\phi(x)\leqslant\phi_{\sup}(Q)\},$$

где

$$\phi_{\inf}(Q)=\inf\{\phi(x): x\in S(\phi)\bigcap Q\},\quad \phi_{\sup}(Q)=\sup\{\phi(x): x\in S(\phi)\bigcap Q\},$$

$S(\phi)=\{x\in\mathbb{R}^n:\dot\phi(x)=0\}$ – *универсальное сечение функции* ϕ, а $\dot\phi$ – производная функции ϕ в силу системы $\dot x=F(x)$. Пусть

$$\Omega(\phi,Q,\epsilon_-,\epsilon_+)=\{x\in Q:\phi_{\inf}(Q)-\epsilon_-\leqslant\phi(x)\leqslant\phi_{\sup}(Q)+\epsilon_+\},\quad \epsilon_-,\epsilon_+>0.$$

Утверждение 1. *Пусть множество* Q *положительно инвариантно; начинающиеся в* Q *траектории системы определены на неограниченном вправо интервале времени; для любого* $\epsilon>0$ *существует* $\delta>0$, *что* $\dot\phi(x)<-\delta<0$ *при* $x\in Q\bigcap\{\phi_{\sup}(Q)+\epsilon_+\leqslant\phi(x)\leqslant\phi_{\sup}(Q)+\epsilon_++\epsilon\}$, *и для любого* $\epsilon>0$ *существует* $\delta>0$, *что* $\dot\phi(x)>\delta>0$ *при* $x\in Q\bigcap\{\phi_{\inf}(Q)-\epsilon_--\epsilon\leqslant\phi(x)\leqslant\phi_{\inf}(Q)-\epsilon_-\}$. *Тогда любая траектория системы, начинающаяся в* $Q\setminus\Omega(\phi,Q,\epsilon_-,\epsilon_+)$, *попадает в положительно инвариантное множество* $\Omega(\phi,Q,\epsilon_-,\epsilon_+)$ *за конечное время.*

3. Локализация инвариантных компактов и её следствия. Множество $\mathbb{R}^3_{+,0}$ положительно инвариантно, так как траектории системы (1) не могут выйти из $\mathbb{R}^3_{+,0}$ через его границу. Действительно, граница множества $\mathbb{R}^3_{+,0}$ состоит из точек, у которых одна или более координат равны нулю, а остальные координаты положительны. Пусть $x_0=(x_1(0),x_2(0),x_3(0))$ – одна из таких точек и она является начальной для траектории $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$, $t\in[0,T)$. Тогда $x(t)\in\mathbb{R}^3_{+,0}$ при $t\in[0,\epsilon)$, $0<\epsilon\ll1$, т.е. $x_i(t)\geqslant0$, $i=1,2,3$. Действительно, это верно для $x_i(t)$, если $x_i(0)>0$. Если $x_1(0)=0$, то $\dot x_1(0)=b_1x_2(0)$ и $x_1(t)>0$ при $x_2(0)>0$, а при $x_2(0)=0$ выполнено равенство $\dot x_2(0)=0$, и поэтому $x_2(t)=0$, $x_1(t)=0$. Если $x_2(0)=0$, то $\dot x_2(t)=0$, и аналогично для x_3: если $x_3(0)=0$, то $\dot x_3(0)=0$ и $x_3(t)=0$.

Утверждение 2. *Все компактные инвариантные множества системы (1) содержатся в положительно инвариантных множествах*

$$\Omega_1=\{x_1+x_2\leqslant1\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0},\quad \Omega_2=\{x_1+x_2\leqslant1,x_1+x_2+x_3\leqslant1+b_1/(4b_3)\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$$

и множество Ω_2 *компактно.*

Доказательство. Пусть $\phi_1(x)=x_1+x_2$. Тогда в $\mathbb{R}^3_{+,0}$

$$\dot\phi_1(x)=b_1(x_1+x_2)(1-x_1-x_2)-\frac{(x_1+x_2)x_3}{b_2+x_1+x_2}-b_5x_2$$

и $\dot\phi_1(x)<0$ при $\phi_1(x)=x_1+x_2>1$. Поэтому множество $S(\phi_1)\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}=\{\dot\phi_1=0\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$ содержится в множестве $\{0\leqslant\phi_1(x)\leqslant1\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$. Поскольку $\phi_1(x_0)=1$ в точке $x_0=(1,0,0)\in S(\phi_1)\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$, а $\phi_1(x_*)=0$ в точке $x_*=(0,0,0)\in S(\phi_1)\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$, то

$$\sup\{\phi_1(x):x\in S(\phi_1)\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}\}=1,\quad \inf\{\phi_1(x):x\in S(\phi_1)\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}\}=0,$$

и локализирующее множество $\Omega(\phi_1,\mathbb{R}^3_{+,0})=\{0\leqslant\phi_1(x)\leqslant1\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}=\Omega_1$. Множество Ω_1 положительно инвариантно, поскольку $\dot\phi_1(x)<0$ в $\mathbb{R}^3_{+,0}\setminus\Omega_1$.

Пусть теперь $\phi_2(x)=x_1+x_2+x_3$. Тогда

$$\dot\phi_2(x)=\dot{x_1}+\dot{x_2}+\dot{x_3}=b_1(x_1+x_2)(1-x_1-x_2)-b_5x_2-b_3x_3\leqslant\frac{b_1}{4}-b_3x_3$$

и в $S(\phi_2)\bigcap\Omega_1$ выполнено неравенство $\phi_2(x)\leqslant1+b_1/(4b_3)$. Следовательно,

$$\sup\{\phi_2(x):x\in S(\phi_2)\bigcap\Omega_1\}\leqslant1+b_1/(4b_3),\quad \inf\{\phi_2(x):x\in S(\phi_2)\bigcap\Omega_1\}=0$$

и $\Omega(\phi_2,\Omega_1)\subset\{0\leqslant\phi_2(x)\leqslant1+b_1/(4b_3)\}\bigcap\Omega_1=\Omega_2$. Множество Ω_2 положительно инвариантно, поскольку $\dot\phi_2(x)<0$ в $\Omega_1\setminus\Omega_2$, и компактно.

Следствие 1. *Если* $a_1,a_2\geqslant0$, *то множества* $\Omega_{1,a_1}=\{x_1+x_2\leqslant1+a_1\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$, $\Omega_{2,a_1,a_2}=\{x_1+x_2\leqslant1+a_1,x_1+x_2+x_3\leqslant1+a_1+b_1/(4b_3)+a_2\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$ *положительно инвариантны, и множество* Ω_{2,a_1,a_2} *компактно.*

Следствие 2. *Все решения (траектории) системы (1) продолжаются на неограниченный вправо интервал времени.*

Доказательство. Известно, что решение автономной C^1-системы обыкновенных дифференциальных уравнений в любом компакте продолжается вправо или до границы компакта, или на неограниченный вправо интервал времени [3, с. 107]. Для любой траектории системы (1) существуют положительные a_1, a_2, при которых её начальная точка принадлежит компакту Ω_{2,a_1,a_2}. Этот компакт положительно инвариантен, и траектория не может выйти на его границу за конечное время. Следовательно, траектория продолжается на неограниченный вправо интервал времени.

4. Асимптотическое поведение траекторий. Справедливо следующее

Утверждение 3. *Любая траектория системы (1), проходящая через лежащую вне множеств* Ω_{1,ε_1}, $\Omega_{2,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, *где* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, *точку, попадает в эти множества за конечное время и не выходит из них.*

Доказательство. В множестве $\mathbb{R}^3_{+,0}\backslash\Omega_{1,\varepsilon_1} = \{\phi_1(x) = x_1+x_2 > 1+\varepsilon_1\}$ для $\dot{\phi}_1$ справедливо неравенство $\dot{\phi}_1 \leqslant b_1(x_1+x_2)(1-x_1-x_2) \leqslant -\delta < 0$, $\delta = b_1(1+\varepsilon_1)\varepsilon_1 > 0$. Таким образом, согласно утверждению 2, все траектории попадают в множество Ω_{1,ε_1} за конечное время и не выходят из него.

В множестве $\Omega_{1,\varepsilon_1} \setminus \Omega_{2,\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \{\phi_1(x) = x_1+x_2 \leqslant 1+\varepsilon_1, x_1+x_2+x_3 > 1+\varepsilon_1+b_1/(4b_3)+\varepsilon_2\}$ выполнено равенство $x_3 = 1+\varepsilon_1+b_1/(4b_3)+\varepsilon_2-(x_1+x_2)+d$, $d > 0$, и поэтому в этом множестве

$$\dot{\phi}_2(x) \leqslant b_1(x_1+x_2)(1-x_1-x_2) - b_3\left(1+\varepsilon_1+\frac{b_1}{4b_3}+\varepsilon_2-(x_1+x_2)+d\right) \leqslant -b_3(\varepsilon_2+d) < 0.$$

Следовательно, согласно утверждению 2, все траектории попадают в множество $\Omega_{1,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ за конечное время и не выходят из него.

Следствие 3. *Предельные множества всех траекторий системы (1) содержатся в компактном положительно инвариантном множестве* Ω_2, *и это множество содержит аттрактор системы.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что множества $\Omega_{2,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ при $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ компактны, положительно инвариантны и содержат предельные множества всех траекторий, а $\Omega_2 = \bigcap_{\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0}\Omega_{2,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$.

5. Вымирание популяций. Теорема Ла-Салля позволяет определить следующие условия вымирания популяций.

Утверждение 4. *При выполнении неравенства*

$$b_3 > \frac{1}{b_2+1} \tag{2}$$

все траектории системы стремятся к множеству $\{x_3 = 0\}\bigcap\Omega_2$, *а при выполнении неравенства*

$$b_4 < b_1 + b_5 \tag{3}$$

– *к множеству* $\{x_2 = 0\}\bigcap\Omega_2$.

Доказательство. Достаточно проверить, что при выполнении неравенства (2) ((3)) предельные множества всех траекторий содержатся в множестве $\{x_3 = 0\}\bigcap\Omega_2$ $(\{x_2 = 0\}\bigcap\Omega_2)$. Для этого сначала рассмотрим функцию $V(x) = x_3$. Её производная в силу системы равна $\dot{x}_3$, и в Ω_2 выполнено неравенство

$$\dot{V} = x_3\left(\frac{x_1+x_2}{b_2+x_1+x_2} - b_3\right) \leqslant x_3\left(\frac{1}{b_2+1} - b_3\right) \leqslant 0,$$

причём $\dot{V} = 0$ в Ω_2 при (2) лишь в случае $x_3 = 0$. Следовательно, предельные множества всех траекторий содержатся в множестве $\Omega_2\bigcap\{x_3 = 0\}$.

Теперь рассмотрим функцию $W(x) = x_2$. Её производная в силу системы равна $\dot{x}_2$, и в Ω_2 выполнено неравенство

$$\dot{W} \leqslant x_2(b_4x_1 - b_5 - b_1(x_1 + x_2)) \leqslant x_2((b_4 - b_1)(x_1 + x_2) - b_5) \leqslant x_2((b_4 - b_1) - b_5) \leqslant 0,$$

причём $\dot{W} = 0$ в Ω_2 при (3) лишь в случае $x_2 = 0$. Следовательно, предельные множества всех траекторий содержатся в множестве $\Omega_2 \bigcap \{x_2 = 0\}$.

6. Положения равновесия на границе множества $\mathbb{R}^3_{+,0}$. Несложно проверить следующие необходимые и достаточные условия существования этих положений равновесия.

Утверждение 5. *У системы (1) при любых значениях параметров существуют положения равновесия* $E_1(0,0,0)$, $E_2(1,0,0)$. *При выполнении неравенства* $b_3 < 1/(1+b_2)$ *существует положение равновесия* $E_3(x_1^{(3)}, 0, x_3^{(3)})$, $x_1^{(3)} > 0$, $x_3^{(3)} > 0$, *а при выполнении неравенства* $b_4 > b_1 + b_5$, *– положение равновесия* $E_4(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, 0)$, $x_1^{(4)} > 0$, $x_2^{(4)} > 0$.

7. Внутреннее положение равновесия. Из третьего уравнения системы (1) следует, что для существования положения равновесия $E_5(x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)})$ внутри $\mathbb{R}^3_{+,0}$ необходимо выполнение неравенства $b_3 < 1$.

Введём три новых положительных параметра: $\alpha = b_1/b_4$, $\beta = b_5/b_4$, $\gamma = b_2b_3/(1 - b_3)$.

Утверждение 6. *У системы (1) при выполнении неравенств*

$$\alpha + \beta < \gamma < \gamma^*(\alpha, \beta), \tag{4}$$

где $\alpha + \beta < 1$, $\gamma^*(\alpha, \beta) \in (0, 1)$ *– положительный корень многочлена*

$$g_{\alpha,\beta}(\gamma) = \alpha\gamma^2 + ((1 - \alpha)\beta - \alpha)\gamma - \beta^2,$$

существует внутреннее положение равновесия $E_5(x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)})$, *где*

$$x_1^{(5)} = \frac{\alpha\gamma}{\gamma - \beta}, \quad x_2^{(5)} = \gamma - \frac{\alpha\gamma}{\gamma - \beta}, \quad x_3^{(5)} = b_4(b_2 + \gamma)\left(\frac{\alpha\gamma}{\gamma - \beta} - \alpha\gamma - \beta\right).$$

Доказательство. Отметим, что $\alpha + \beta \leqslant 1$, так как иначе популяция x_2 вымирает и внутреннего положения равновесия нет.

Координаты для точки E_5 находятся после несложных алгебраических преобразований. Первые две координаты положительны тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta < \gamma$, а неравенство $x_3^{(5)} > 0$ равносильно условию $\alpha\gamma/(\gamma - \beta) - \alpha\gamma - \beta > 0$, т.е. $g_{\alpha,\beta}(\gamma) < 0$. В результате получаем условие положительности координат в виде неравенств $\alpha+\beta < \gamma < \gamma^*(\alpha, \beta)$, которые совместны при $\alpha + \beta < 1$, так как в этом случае $g_{\alpha,\beta}(\alpha + \beta) = \alpha^2(\alpha + \beta - 1) < 0$ и $\gamma^*(\alpha, \beta) > > \alpha + \beta$. Если $\alpha + \beta = 1$, то $g_{\alpha,\beta}(\alpha + \beta) = 0$, $\gamma^*(\alpha, \beta) = 1 = \alpha + \beta$, и условие положительности координат не выполняется ни при каком γ.

Замечание. *Неравенство* $\gamma^*(\alpha, \beta) \geqslant \alpha + \beta$ *означает, что в пространстве параметров поверхность, задаваемая квадратным трёхчленом в области* $\gamma > 0$, *расположена по одну сторону от плоскости* $\gamma = \alpha + \beta$ *при* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$.

8. Бифуркация Хопфа. Исследуем поведение собственных чисел внутреннего положения равновесия с помощью численных расчётов. Для этого построим сетку точек в области параметров системы, в которой система имеет внутреннее положение равновесия. В каждом узле сетки вычислим спектр внутреннего положения равновесия. Найдём два узла, в каждом из которых действительные собственные числа отрицательны, а два других комплексные, причём действительные части этих пар комплексных собственных чисел имеют противоположные знаки. Соединим эти два узла кривой, которая лежит в области существования внутренних положений равновесия, и в каждой точке которой действительное собственное значение отрицательно. Если существует точка на кривой, в окрестности которой действительная часть комплексных собственных значений меняет знак с отрицательного на положительный, то она соответствует бифуркации Хопфа, что подтвердим наличием соответствующей периодической траектории.

Сначала задаём сетку точек в области (4) первого октанта в пространстве (α, β, γ) и в множестве $(b_3, b_4) = (0,1) \times (0, B_4)$, $B_4 > 0$, первой четверти плоскости параметров (b_3, b_4). В каждом узле $(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, b_{3,l}, b_{4,m})$ произведения этих сеток перейдём к исходным параметрам по формулам $b_1 = \alpha_i b_{4,m}$, $b_2 = ((1 - b_{3,l})/b_{3,l})\gamma_k$, $b_3 = b_{3,l}$, $b_4 = b_{4,m}$, $b_5 = \beta_j b_{4,m}$. Для этих параметров вычисляем спектр внутреннего положения равновесия и выбираем два нужных узла. Так найден набор значений исходных параметров $b^{(1)} = (0.06, 0.2768, 0.5792, 0.6, 0.01)$, при котором $\lambda_1 = -0.1563$, $\lambda_{2,3} = -0.0039 \pm 0.0859i$, и набор значений параметров $b^{(2)} = (0.06, 0.1912, 0.5916, 0.6, 0.01)$, при котором собственные числа равны $\lambda_1 = -0.0942$, $\lambda_{2,3} = 0.0017 \pm 0.0958i$.

В точках отрезка $b(\kappa) = b^{(1)} + (b^{(2)} - b^{(1)})\kappa$, $\kappa \in [0,1]$, спектр имеет нужную структуру, а именно: одно собственное число отрицательно, а два других собственных числа комплексно сопряжённые, и существует значение $\kappa = \kappa^*$, $b(\kappa^*) = (0.06, 0.2149, 0.5882, 0.6, 0.01)$, в окрестности которого действительная часть комплексных собственных чисел меняет знак с ростом κ с отрицательного на положительный. Это означает, что в системе происходит бифуркация Хопфа, в результате которой появляется устойчивый цикл. Например, система с параметрами $b^{(2)}$ имеет такой цикл с начальными данными $(0.1526, 0.2366, 0.0009)$ в окрестности внутреннего положения равновесия $E_5(0.1064, 0.1706, 0.0174)$ (рисунок).

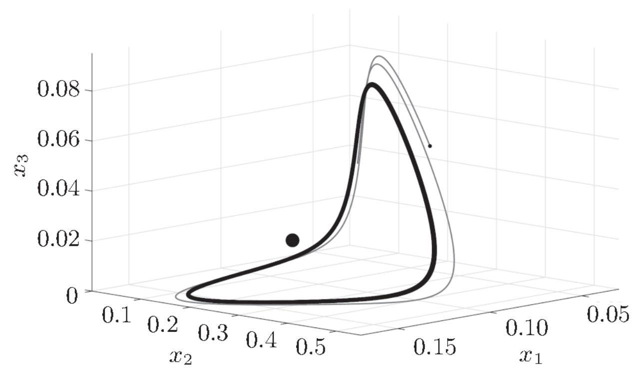

Рисунок. Устойчивый цикл и внутреннее положение равновесия системы с параметрами $b^{(2)}$.

Заключение. С помощью метода локализации инвариантных компактов найдены условия вымирания популяций хищников и инфицированных жертв. Они являются необходимыми и достаточными, что следует из условий существования положений равновесия E_2 и E_3. При этих положениях равновесия могут существовать внутреннее положение равновесия, пространственная устойчивая периодическая траектория и более сложные аттракторы.

Работа выполнена при поддержке программы "Приоритет 2030" МГТУ имени Н.Э. Баумана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bate A.M., Hilkerr F.M.* Complex dynamics in an eco-epidemiological model // Bull. Math. Biol. 2013. V. 75. P. 2059–2078.
2. *Крищенко А.П.* Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 12. С. 1597–1604.
3. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 2012.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 28.04.2023 г.
После доработки 28.04.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.