ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1571–1574

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.1

О ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРА НЕЛИНЕЙНОСТИ В АЛГОРИТМЕ “SUPER-TWISTING”

© 2023 г. В. В. Фомичев, А. О. Высоцкий

Исследована устойчивость модифицированного (при вариации параметра нелинейности) алгоритма “super-twisting”. Анализ основан на мажорировании траекторий системы с произвольным параметром нелинейности траекториями систем классического алгоритма “super-twisting”. Получены условия устойчивости для модифицированных систем, а также оценки на размеры области устойчивости в зависимости от параметров системы.

DOI: 10.31857/S0374064123110134, EDN: PFBOCN

Введение. Задача стабилизации является одной из центральных в теории управления, в том числе и для систем с неопределённостью (с неизвестными неизмеряемыми входными воздействиями). Одним из наиболее популярных алгоритмов управления, используемых для достижения робастной по отношению к внешним возмущениям устойчивости динамических систем, является алгоритм “super-twisting” [1, 2]. Для системы уравнений данного алгоритма было доказано существование набора параметров, обеспечивающих устойчивость [2]. Впоследствии с помощью метода функций Ляпунова были получены алгебраические достаточные условия устойчивости [3, 4]. Наконец, в работах [5, 6] с помощью анализа системы при “наихудшем возмущении” были найдены необходимые и достаточные условия её устойчивости.

Традиционно при изучении данного алгоритма варьируются только множители перед нелинейным и разрывным слагаемыми в первом и втором уравнениях системы соответственно при одинаковом значении степени, равном 1/2. Целью данной работы является изучение свойства устойчивости обобщённого (при различных значениях степени) алгоритма “super-twisting”.

Далее используется следующее обозначение: для $x \in \mathbb{R}$

$$\lceil x \rfloor^{\alpha} = \operatorname{sign}(x)|x|^{\alpha}.$$

1. Постановка задачи. Наихудшее возмущение. Рассматривается система

$$\dot{x}_1 = x_2 - k\lceil x_1 \rfloor^{\alpha}, \quad \dot{x}_2 = \xi - \mu\lceil x_1 \rfloor^{0}, \tag{1}$$

где $\xi = \xi(t)$ – неизвестное ограниченное $(|\xi(t)| \leqslant \xi_0)$ измеримое входное воздействие, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$.

Требуется исследовать данную систему на устойчивость в зависимости от значений параметров k, μ и α.

При $\alpha = 1/2$ данная система представляет собой классический [2] алгоритм “super-twisting”. Для неё с помощью анализа фазового пространства было показано [6], что траектории системы с любым возмущением из рассматриваемого класса будут ограничены траекторией системы с “наихудшим” возмущением:

$$\xi^* = \xi_0 \operatorname{sign}(\dot{x}_1) = \xi_0 \operatorname{sign}(x_2 - k\lceil x_1 \rfloor^{\alpha}). \tag{2}$$

Из ограниченности траекторий следует, что для исследования устойчивости таких систем достаточно рассматривать системы с возмущением (2).

Рассуждения о наихудшей помехе из работы [6] могут быть без изменений применены к системе (1) с произвольным параметром α. Всюду далее в данной статье будет рассматриваться система (1) с возмущением (2):

$$\dot{x}_1 = x_2 - k\lceil x_1 \rfloor^{\alpha}, \quad \dot{x}_2 = \xi^* - \mu\lceil x_1 \rfloor^{0}. \tag{3}$$

2. Анализ устойчивости. Для случая $\alpha = 1/2$ известны [6] необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости системы (1) с возмущением (2). Показано, что устойчивость системы если достигается, то является глобальной. Кроме того, для любых $\xi_0 > 0$, $\mu > \xi_0$ существует $k_0 = k_0(\mu, \xi_0)$ такое, что при любом $k > k_0$ система (3) с параметрами $k, \mu, \alpha = 1/2$ будет устойчива, при $k = k_0$ система устойчива, но не асимптотически, а при $k < k_0$ она неустойчива.

Не нарушая общности рассуждений, положим начальные условия для системы (3) равными $(0, x_2^0), x_2^0 > 0$. Рассматривать систему, в силу симметричности относительно начала координат, достаточно только в правой полуплоскости координатной плоскости, т.е. при $x_1 \geqslant 0$.

2.1. Случай $\boldsymbol{\alpha < 1/2}$. Проанализируем устойчивость системы (3) при $0 < \alpha < 1/2$. Будем сравнивать траекторию системы (3) с произвольными параметрами $k, \mu, \alpha < 1/2$ с траекторией системы

$$\dot{x}_1 = x_2 - k^* \lceil x_1 \rfloor^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi^* - \mu \lceil x_1 \rfloor^0, \tag{4}$$

где $k^* = k_0(\mu, \xi_0) + \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ – сколь угодно малое положительное число. В силу приведённых выше рассуждений система (4) будет глобально асимптотически устойчивой.

Покажем, что существует окрестность начала координат, в которой траектория системы (4) будет ограничивать траекторию системы (3) с рассматриваемым набором параметров.

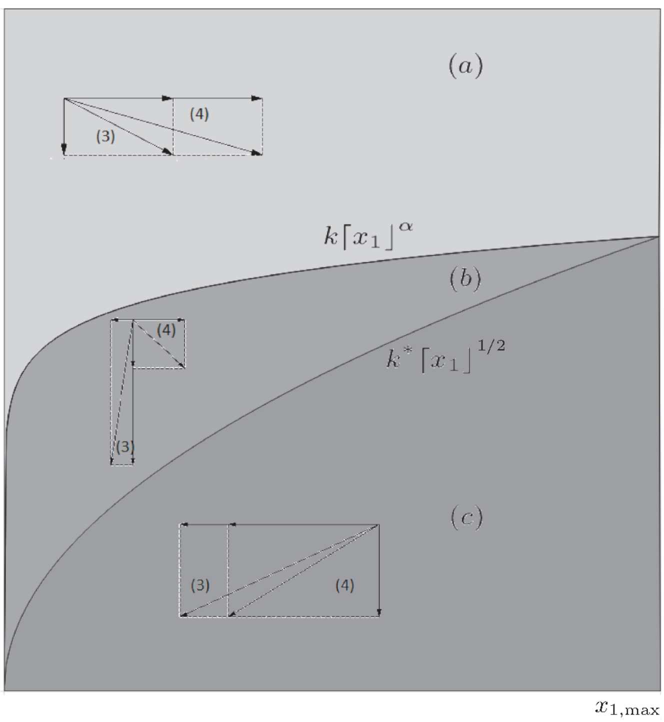

Рисунок. Сравнение векторов скоростей систем (3) и (4).

Заметим, что в области координатной плоскости, где

$$k\lceil x_1 \rfloor^{\alpha} \geqslant k^* \lceil x_1 \rfloor^{1/2}, \tag{5}$$

траектория системы (4) будет ограничивать траекторию системы (3). Действительно, в области, где знаки первой компоненты векторов скорости систем совпадают (области (a) и (c) на рисунке), значения второй компоненты векторов скоростей систем совпадают. Значит, поскольку величина $\dot{x}_1$ больше в системе (4), траектория системы (3) не может пересечь траекторию системы (4). Случай когда знаки первых компонент вектора скорости двух систем отличаются возможен только если $\dot{x}_1 < 0$ для системы (3) (область (b) на рисунке). Следовательно, тогда пересечение траекторий невозможно, и траектория системы (4) будет ограничивать траекторию системы (3).

Получим оценку на величину начального условия x_2^0, гарантирующую выполнение неравенства (5). Очевидно, что поскольку траектории системы (4) ограничивают сверху траектории системы (3) достаточно выбрать такое начальное условие, чтобы это неравенство выполнялось для системы (4). Неравенство (5) примет вид

$$|x_1| \leqslant (k/k^*)^{2/(1-2\alpha)} = x_{1,\max}. \tag{6}$$

Решение системы (4) было найдено в работе [6]. В частности, была получена зависимость максимального значения координаты x_1 (обозначим его x_1^*) от начального условия x_2^0:

$$x_1^* = \begin{cases} \dfrac{(x_2^0)^2}{2b} \exp\left\{ \dfrac{-2k^*}{\sqrt{8b-(k^*)^2}} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{k^*}{\sqrt{8b-(k^*)^2}} + \operatorname{arctg} \dfrac{4b-(k^*)^2}{k^*\sqrt{8b-(k^*)^2}} \right) \right\}, & (k^*)^2 < 8b, \\ \left(\dfrac{x_2^0 u_1}{b+k^*u_1} \right)^2 \left(\dfrac{u_2(b+k^*u_1)}{u_1(b+k^*u_2)} \right)^{2B}, & (k^*)^2 \geqslant 8b, \end{cases}$$

где $b = \mu - \xi_0$, $u_{1,2} = (-k \pm \sqrt{k^2 - 8b})/4$, $B = -u_2/(u_1 - u_2)$.

Для системы (4) неравенство (6) равносильно неравенству $x_1^* \leqslant x_{1,\max}$. Последнее можно записать как соотношение для начального условия x_2^0:

$$x_2^0 < \begin{cases} \sqrt{2b} \exp\left\{ \dfrac{k_0}{\sqrt{8b-k_0^2}} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{k_0}{\sqrt{8b-k_0^2}} + \operatorname{arctg} \dfrac{4b-k_0^2}{k_0\sqrt{8b-k_0^2}} \right) \right\} \sqrt{x_{1,\max}}, & k_0^2 < 8b, \\ \dfrac{b+k_0u_1}{u_1} \left(\dfrac{u_1(b+k_0u_2)}{u_2(b+k_0u_1)} \right)^{B} \sqrt{x_{1,\max}}, & k_0^2 \geqslant 8b. \end{cases} \tag{7}$$

Если для начальных условий системы (3) выполнено условие (7), то поскольку её траектория ограничена траекторией системы (4) для неё также будет выполнено и условие (6). Таким образом, доказана

Теорема 1. *Система (1) с* $0 < \alpha < 1/2$, $\mu > \xi_0$ *и* $k > 0$ *является локально асимптотически устойчивой. Выполнение условия (7) гарантирует сходимость системы.*

Следствие. *Если набор параметров* k, μ *обеспечивает устойчивости системы (3) при* $\alpha = 1/2$ *(т.е. если* $k > k_0(\mu, \xi_0)$*), то при* $\alpha \to 1/2 - 0$ *область устойчивости системы (3) растёт, заполняя всю координатную плоскость.*

2.2. Случай $\alpha > 1/2$. Перейдём к рассмотрению случая $\alpha > 1/2$. Аналогично случаю $\alpha < 1/2$ будем сравнивать траекторию системы (3) с траекторией неустойчивой системы

$$\dot{x}_1 = x_2 - k_* \lceil x_1 \rfloor^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi^* - \mu \lceil x_1 \rfloor^0, \tag{8}$$

где $k_* = k_0(\mu, \xi_0) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число.

Покажем, что существует окрестность начала координат, внутри которой траектории системы (8) ограничивают снизу траектории системы (3). Аналогичными случаю $\alpha < 1/2$ рассуждениями легко показать, что такая ограниченность траекторий будет достигаться всюду в области, где $k\lceil x_1 \rfloor^\alpha \leqslant k_* \lceil x_1 \rfloor^{1/2}$, т.е. при

$$|x_1| \leqslant (k_*/k)^{2/(2\alpha-1)} = x_{1,\min}. \tag{9}$$

Для системы (8) эквивалентное условию (9) неравенство для начального условия x_2^0 запишется в виде

$$\begin{cases} x_2^0 < \sqrt{2b} \exp\left\{ \dfrac{k_0}{\sqrt{8b-k_0^2}} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{k_0}{\sqrt{8b-k_0^2}} + \operatorname{arctg} \dfrac{4b-k_0^2}{k_0\sqrt{8b-k_0^2}} \right) \right\} \sqrt{x_{1,\min}}, & k_0^2 < 8b, \\ x_2^0 < \dfrac{b+k_0u_1}{u_1} \left(\dfrac{u_1(b+k_0u_2)}{u_2(b+k_0u_1)} \right)^{B} \sqrt{x_{1,\min}}, & k_0^2 \geqslant 8b. \end{cases} \tag{10}$$

В силу ограниченности траектории системы (8) траекторией системы (3) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Система (1) с* $1/2 < \alpha < 1$ *не является устойчивой ни для каких* $\mu > \xi_0$ *и* $k > 0$*. При этом если траектории системы сходятся в некую ограниченную область, то она гарантированно будет содержать область, ограниченную траекториями системы (8) с начальными условиями, удовлетворяющими условию (10).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 89–100.
2. *Levant A.* Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control // Int. J. of Control. 1993. V. 58. P. 1247–1263.
3. *Moreno J., Osorio M.* Strict Lyapounov functions for the super-twisting algorithm // IEEE Trans. on Autom. Contr. 2012. V. 57. P. 1035–1040.
4. *Seeber R., Horn M.* Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting // Automatica. 2017. V. 84. P. 241–243.
5. *Seeber R., Horn M.* Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm // 15th Intern. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). 2018. P. 120–125.
6. *Фомичев В.В., Высоцкий А.О.* Критерий устойчивости и точные оценки для алгоритма “суперскручивания”// Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 2. С. 252–256.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 08.09.2023 г.
После доработки 08.09.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.