ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре 2023 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале “Дифференц. уравнения”. 2023. Т. 59. № 6).

DOI: 10.31857/S0374064123110146, EDN: ORPMVN

А. Х. Сташ (Майкоп) “Об управлении суслинскими спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней линейных однородных дифференциальных уравнений” (15 сентября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110158, EDN: PFDCPP

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{E}}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

задаваемых наборами $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ непрерывных функций, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$. Далее звёздочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим $\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{a\in\tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a)$.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 2 [1–3]. Для момента $t > 0$ и функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ введём обозначения:

$\nu^-(y, t)$ – число точек её *строгой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, t)$ – число её *нулей* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, t)$ – число её *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) на промежутке $(0, t]$.

Далее для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции $\psi y \equiv (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ введём обозначение $\nu^\gamma(y, m, t) \equiv \nu^\gamma(\langle \psi y, m\rangle, t)$, где $\gamma \in \{-, 0, +\}$ и $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ – скалярное произведение.

Определение 3 [1]. *Верхние* (*нижние*) *частоты Сергеева знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ зададим при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно равенствами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, t) \quad \Big(\check{\nu}^\gamma(y) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, t)\Big).$$

Определение 4 [2, 3]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ зададим при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно равенствами

$$\hat{\nu}_\bullet^\gamma(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, m, t) \quad \Big(\check{\nu}_\bullet^\gamma(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, m, t)\Big),$$

$$\hat{\nu}_\circ^\gamma(y) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, m, t) \quad \Big(\check{\nu}_\circ^\gamma(y) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, m, t)\Big).$$

---

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара – И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Определение 5. Множество всех значений показателя $\varkappa\colon \mathcal{S}_*(a) \to \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty, +\infty\}$ на нетривиальных решениях уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ назовём *спектром* $\varkappa(\mathcal{S}_*(a))$ этого показателя уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$.

Определение 6 [4, с. 489]. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *суслинским множеством прямой* $\mathbb{R}$, если оно является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии. Множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ – *суслинское множество расширенной числовой прямой*, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой $\mathbb{R}$ и некоторого (возможно, пустого) подмножества множества $\mathbb{R}$.

Все показатели колеблемости решений линейных однородных уравнений первого порядка равны нулю, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (равно как и нижние) показатели равны между собой, и их спектры состоят из одного значения [3].

В работе [5] доказано существование уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат конечные подмножества, состоящие из сколь угодно большого наперёд заданного числа метрически и топологически существенных значений, кроме того, построено линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными ограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат одно и то же счётное множество метрически и топологически существенных значений. В статье [6] приводится линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с неограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат один и тот же отрезок числовой прямой.

В работах [7, 8] доказано, что спектры верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней линейного дифференциального уравнения порядка выше двух являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. В предположении, что спектры содержат точку нуль, верно и обратное утверждение [9], которое распространяется и на верхние сильные показатели колеблемости знаков, нулей и корней, как показывает

Теорема. *Для любого* $n > 2$ *и произвольного содержащего нуль суслинского множества* $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *существует дифференциальное уравнение* $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, *удовлетворяющее равенствам*

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}_{\bullet}^{0}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}_{\bullet}^{+}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^{-}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^{0}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^{+}(\mathcal{S}_*(a)) = \mathcal{A}.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. 2. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1577. 3. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172. 4. Куратовский К. Топология. Т. 1. М., 1966. 5. Сташ А.Х. О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 2 (119). С. 9–22. 6. Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 3 (122). С. 9–17. 7. Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425. 8. Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1595–1609. 9. Войделевич А.С. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журн. Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32.

А. Н. Ветохин (Москва) “К задаче Миллионщикова о классе Бэра минорант показателей Ляпунова спустя 30 лет” (22 сентября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S037406412311016X, EDN: PFDWLW

Напомним, что для заданных чисел $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$ для систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

с непрерывными ограниченными коэффициентами максимальная полунепрерывная снизу миноранта k-го из показателей Ляпунова $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ определяется формулой

$$\underline{\lambda}_k(A) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \|B(t)\|<\varepsilon} \lambda_k(A+B).$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному ограниченному отображению

$$A : \mathcal{M} \times \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{1}$$

построим функцию

$$\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot\,)). \tag{2}$$

В работе [1] был поставлен вопрос о точном бэровском классе функции (2). В.М. Миллионщиков установил, что при любом $n \in \mathbb{N}$ и $k = 1$ миноранта младшего показателя Ляпунова совпадает с нижним центральным показателем Винограда [2], и потому функция (2) принадлежит третьему бэровскому классу. Оказалось, что при $n = 3$ и $k = 2, 3$ функции $\underline{\lambda}_k(\cdot)$ принадлежат третьему бэровскому классу [3], аналогичный результат справедлив для произвольных $n \geqslant 3$ и $k = \overline{2, n}$ [4].

В статье [5] в случае когда $\mathcal{M}$ есть множество $\mathcal{B}$ иррациональных чисел с естественной метрикой числовой прямой установлено существование отображения (1), для которого функция (2) не принадлежит второму бэровскому классу. Этот результат обобщает

Теорема 1. *Если пространство $\mathcal{M}$ содержит множество типа $F_{\sigma\delta}$, не являющееся множеством типа $G_{\delta\sigma}$, то найдётся такое отображение (1), что функция (2) не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.*

Р. Бэр установил [6], что множество иррациональных чисел, у которых неполные частные при разложении в цепную дробь стремятся к бесконечности, является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ и не является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathcal{B}$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Если $\mathcal{M} = [0, 1]$, $n \geqslant 2$ и $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, то найдётся такое отображение (1), что функция (2) не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.*

Литература. 1. Миллионщиков В.М. Задачи о минорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 11. С. 2014–2015. 2. Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104. 3. Сергеев И.Н. К задаче о классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 9. С. 1600–1601. 4. Быков В.В., Салов Е.Е. О классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 1. С. 33–40. 5. Ветохин А.Н. Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 34. № 10. С. 1313–1317. 6. Baire R. Sur la representation des functions discontinues // Acta. Math. 1906. V. 30. P. 1–48.

И. Н. Сергеев (Москва) “Свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы” (29 сентября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110171, EDN: PFGGTM

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \tag{1}$$

Положим $B_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n : 0 < |x_0| < \delta\}$ и $\Delta \equiv \sup\{\delta : B_\delta \subset G\}$, а через $x(\,\cdot\,, x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x(0, x_0) = x_0$.

Определение 1. Для системы (1) при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно назовём *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной*:

а) *мерой устойчивости* [1, 2] такое число $\mu_\varkappa(f) \in [0, 1]$, что при каждом $\mu < \mu_\varkappa(f)$ имеет место *μ-устойчивость*, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon \in (0, \Delta)$, что при каждом $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$ *относительная* мера в шаре B_δ (т.е. доля от его меры Лебега $\operatorname{mes} B_\delta$)

подмножества $M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)$ всех значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих соответствующему требованию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t,x_0)| < \varepsilon, \quad \varliminf_{t\to+\infty} |x(t,x_0)| < \varepsilon, \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t,x_0)| < \varepsilon, \tag{2}$$

не меньше μ, и наоборот, при каждом $\mu > \mu_\varkappa(f)$ такая μ-устойчивость не имеет места;

б) *мерой неустойчивости* [1, 2] такое число $\nu_\varkappa(f) \in [0,1]$, что при каждом $\nu < \nu_\varkappa(f)$ имеет место *ν-неустойчивость*, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon \in (0,\Delta)$, что при каждом $\delta \in (0,\delta_\varepsilon)$ *относительная* мера в шаре B_δ подмножества $N_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)$ всех значений $x_0 \in B_\delta$, не удовлетворяющих соответствующему требованию (2), не меньше ν, и наоборот, при каждом $\nu > \nu_\varkappa(f)$ такая ν-неустойчивость не имеет места.

Введённые в определении 1 меры устойчивости и неустойчивости позволяют оценивать снизу возможность (в некотором смысле стохастическую) выбора начального значения возмущённого решения, удовлетворяющего требованию (2) и соответственно его отрицанию.

Определение 2. Система (1) при $\varkappa = \lambda,\pi,\sigma$ обладает *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной*:

в) *устойчивостью* [3, 4] (или *почти устойчивостью* [5]), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0,\Delta)$, что $M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta) = B_\delta$ (или соответственно $\operatorname{mes} M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta) = \operatorname{mes} B_\delta$);

д) *полной* [3, 4] (или *почти полной* [5]) *неустойчивостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0,\Delta)$, что $N_\varkappa(f,\varepsilon,\delta) = B_\delta$ (или соответственно $\operatorname{mes} N_\varkappa(f,\varepsilon,\delta) = \operatorname{mes} B_\delta$).

Согласно [1, 2] для каждой системы (1) её ляпуновские, перроновские и верхнепредельные меры устойчивости и неустойчивости задаются формулами

$$\mu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{\delta\to+0} \frac{\operatorname{mes} M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes} B_\delta}, \quad \nu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{\delta\to+0} \frac{\operatorname{mes} N_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes} B_\delta}, \quad \varkappa = \lambda,\pi,\sigma, \tag{3}$$

и удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant \mu_\lambda(f) \leqslant \mu_\sigma(f) \leqslant \mu_\pi(f) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \nu_\pi(f) \leqslant \nu_\sigma(f) \leqslant \nu_\lambda(f) \leqslant 1, \tag{4}$$

$$0 \leqslant \mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) \leqslant 1, \quad \varkappa = \lambda,\pi,\sigma. \tag{5}$$

Все следующие утверждения опубликованы в работе [1]. Прежде всего, из равенств

$$\operatorname{mes} M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta) + \operatorname{mes} N_\varkappa(f,\varepsilon,\delta) = \operatorname{mes} B_\delta, \quad \varepsilon > 0, \quad 0 < \delta < \Delta, \quad \varkappa = \lambda,\pi,\sigma, \tag{6}$$

вытекает

Теорема 1. *Если в формулах (3) при некотором $\varkappa \in \{\lambda,\pi,\sigma\}$ только у первой или только у второй меры нижний предел при $\delta \to +0$ заменить верхним, то она в сумме с другой мерой будет давать уже ровно 1, но будет оценивать аналогичную описанной в определении 1 возможность выбора начального значения возмущённого решения с требованием (2) или соответственно его отрицанием уже не снизу, а сверху.*

Далее в линейном случае оба слагаемых в формуле (6) совсем не зависят от δ, а ляпуновские и верхнепредельные меры могут принимать лишь свои крайние значения, заведомо реализуемые также и на перроновских мерах. Это и устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 2. *Для любой линейной системы вида (1) в формулах (3) для всех упоминаемых в них мер устойчивости и неустойчивости пределы при $\delta \to +0$ являются точными, причём возможны только следующие две ситуации:*

1) либо выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f) = 1 > 0 = \nu_\pi(f) = \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f)$$

и система (1) обладает устойчивостью всех трёх типов;

2) либо выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = 0 < 1 = \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f)$$

и система (1) обладает ляпуновской и верхнепредельной почти полной (возможно, даже полной) неустойчивостью.

Теорема 3. *При любом $n \in \mathbb{N}$ каждая из двух перечисленных в теореме 2 ситуаций реализуется на некоторой ограниченной линейной автономной системе вида (1), причём вторая ситуация реализуется по меньшей мере на двух системах: одна из них обладает перроновской полной неустойчивостью, а другая, неавтономная, – перроновской устойчивостью.*

В одномерном случае множество всевозможных реализуемых наборов различных мер устойчивости и неустойчивости оказывается конечным, что и утверждают следующие две теоремы.

Теорема 4. *При $n = 1$ меры устойчивости и неустойчивости любой системы (1) удовлетворяют соотношениям*

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) \leqslant \mu_\pi(f), \quad \nu_\lambda(f) = \nu_\sigma(f) \geqslant \nu_\pi(f), \tag{7}$$

$$\mu_\varkappa(f), \nu_\varkappa(f) \in \{0, 1/2, 1\}, \quad \mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) = 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma. \tag{8}$$

Теорема 5. *При $n = 1$ оба неравенства в соотношениях (7) для некоторой ограниченной линейной системы (1) являются строгими, а случаи всех равенств в (7) для каждой пары мер устойчивости и неустойчивости, задаваемой условиями (8), реализуются на некоторых автономных системах (1).*

В теореме 3 также подтверждена реализуемость для автономных линейных систем как нулевых, так и единичных значений сразу всеми мерами устойчивости или неустойчивости. Для автономных нелинейных двумерных систем множество реализуемых наборов всех мер оказывается уже довольно богатым, что показывают

Теорема 6. *При $n = 2$ для каждого отдельного нестрогого неравенства в (4) существуют две автономные системы вида (1): для одной из них оно обращается в равенство, а для другой – в строгое неравенство.*

Теорема 7. *При $n = 2$ для любого $r > 0$ существует автономная система (1), у которой меры устойчивости всех трёх типов принимают одно и то же положительное значение, равно как и все меры неустойчивости, причём отношение этих двух значений равно r, а правое неравенство в (5) обращается в равенство.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Мат. заметки. 2023. Т. 113. № 6. С. 895–904. 2. Сергеев И.Н. Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 851–852. 3. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 4. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 5. Сергеев И.Н. Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.

Н. В. Денисов, В. Д. Васильев (Москва) "Определение и свойства примитивной меры устойчивости нулевого решения дифференциальной системы" (6 октября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110183, EDN: PFOBHO

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x), \quad (t,x) \in G \subset \mathbb{R}^{1+n}, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(G). \tag{1}$$

Примитивной мерой устойчивости нулевого решения системы (1) назовём величину

$$\mu_f \equiv \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\operatorname{mes}\{x_0 \in U_\varepsilon(0) : |x(\,\cdot\,, x_0)| < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}_+\}}{\operatorname{mes} U_\varepsilon(0)}, \tag{2}$$

где $U_\varepsilon(0)$ – ε-окрестность точки нуль фазового пространства (с мерой Лебега mes), а $x(\,\cdot\,, x_0)$ – решение системы с начальным значением $x(0, x_0) = x_0$. Через M_f обозначим множество всех частичных пределов при $\varepsilon \to +0$ дроби в правой части формулы (2): если это множество не одноточечно, то меру μ_f считаем *не определённой*.

Следующие утверждения показывают, в частности, отсутствие какой-либо логической связи между значениями примитивной меры устойчивости (в отличие от аналогичных мер из работ [1–3]) системы (1) и устойчивостью или неустойчивостью по Ляпунову этой системы (точнее, её нулевого решения).

Теорема 1. *Для любого $\alpha \in [0,1]$ существует устойчивая система (1), примитивная мера устойчивости которой равна $\mu_f = \alpha$.*

Теорема 2. *Для любого $\alpha \in [0,1]$ существует неустойчивая система (1), примитивная мера устойчивости которой равна $\mu_f = \alpha$.*

Теорема 3. *Существует устойчивая система, примитивная мера устойчивости μ_f которой не определена.*

Теорема 4. *Существует неустойчивая система, примитивная мера устойчивости μ_f которой не определена.*

Теорема 5. *Для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ существует система (1), удовлетворяющая равенству $M_f = [\alpha, \beta]$.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Мат. заметки. 2023. Т. 113. № 6. С. 895–904. 2. Сергеев И.Н. Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 851–852. 3. Сергеев И.Н. Свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 11. С. 1581–1583.

А. К. Деменчук, А. В. Конюх (Минск) “О теореме Массеры о существовании периодических решений линейных периодических систем и её обобщении” (13 октября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110195, EDN: PJDKMQ

Проблеме существования периодических решений обыкновенных дифференциальных периодических систем, в том числе линейных, посвящено огромное число работ (см., например, монографии [1–3] и приведённую в них библиографию). При этом достаточно длительное время априори предполагалась соизмеримость периодов самой системы и её периодического решения. Х.Л. Массера был, по-видимому, первым, кто показал ошибочность такого предположения. В 1950 г. он получил достаточные условия существования решений, период которых несоизмерим с периодом самой системы [4]. Впоследствии такого рода решения были названы *сильно нерегулярными* [5, с. 17], а описываемые ими колебания – *асинхронными*. Необходимое и достаточное условие наличия у линейной дифференциальной периодической неоднородной системы сильно нерегулярных решений получено в статье [6].

В работе [7] Х.Л. Массера доказал, что линейная неоднородная система

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с непрерывными ω-периодическими функциями A, f имеет ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда она имеет ограниченное решение. Этот факт существенно упростил проблему, сведя вопрос о наличии у линейной ω-периодической системы решений из класса $\mathcal{P}_\omega$ непрерывно дифференцируемых ω-периодических вектор-функций к вопросу о наличии у неё решений из более широкого класса $\mathcal{B}$ ограниченных непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Это определило интерес к данному результату и обусловило его многочисленные обобщения на другие типы систем и их решений (см., например, работы [8–10]).

Возникает естественный вопрос, нельзя ли усилить указанную теорему Массеры так, чтобы из того, что ω-периодическая система (1) имеет решение в более широком, чем $\mathcal{B}$, классе, также следовало бы, что она имеет и ω-периодическое решение. Одному из решений этой задачи и посвящён настоящий доклад. Дадим следующее

Определение. Введём класс $\mathcal{L}$ непрерывно дифференцируемых функций $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *растущих медленнее линейной функции*, т.е. удовлетворяющих хотя бы одному из двух условий:

$$x(t) = o(t), \quad t \to -\infty \quad \text{или} \quad t \to +\infty. \tag{2}$$

Множество $\mathcal{B}$ содержится в $\mathcal{L}$, не совпадая с ним: так, функция $x(t) = (\ln(t^2+1), 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет обоим условиям (2), но не является ограниченной. Поэтому теорему Массеры усиливает следующая

Теорема 1. *Если ω-периодическая система (1) имеет решение, растущее медленнее линейной функции, то она имеет и ω-периодическое решение.*

Для того чтобы понять, насколько существенно теорема 1 усиливает теорему Массеры, а заодно и насколько существенно сама теорема Массеры упрощает вопрос о наличии ω-периодических решений, наделим множества $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ метрикой равномерной сходимости на компактах. Тогда ответы на эти два вопроса в определённой степени даёт

Теорема 2. *Множество $\mathcal{B}$ в метрическом пространстве $\mathcal{L}$ имеет первую категорию Бэра, равно как и множество $\mathcal{P}_\omega$ в метрическом пространстве $\mathcal{B}$.*

Литература. 1. Еругин Н.П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, 1963. 2. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных систем. М., 1964. 3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972. 4. Massera J.L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. V. 4. № 1. P. 37–45. 5. Деменчук А. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление. Саарбруккен, 2012. 6. Грудо Э.И., Деменчук А.К. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 3. С. 409–416. 7. Massera J.L. The existence of periodic solutions of systems of differential equations // Duke Math. J. 1950. V. 17. № 4. P. 457–475. 8. Makay G. On some possible extensions of Massera's theorem // Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equat. Electron J. Qual. Theory Differ. Equat. Szeged, 2000. № 16. 9. Murakami S., Naito T., Minh N. Massera's theorem for almost periodic solutions of functional differential equations // J. Math. Soc. Japan. 2004. V. 56. № 1. P. 247–268. 10. Okada Y. Massera type theorems in hyperfunctions with refleexive Banach values // RIMS Kuokyuroku Bessatsu. 2013. B40. P. 001–014.

Е. А. Барабанов (Минск), **В. В. Быков** (Москва) “Поведение размерностей линеалов решений правильной системы при бесконечно малых параметрических возмущениях её матрицы коэффициентов” (20 октября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110201, EDN: PESHBC

Пусть M – метрическое пространство. Для каждого $\mu \in M$ обозначим через $S(\mu, A)$ пространство решений системы

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$L_\alpha(\mu, A) \equiv \{x \in S(\mu, A) : \lambda[x] < \alpha\}, \quad N_\alpha(\mu, A) \equiv \{x \in S(\mu, A) : \lambda[x] \leqslant \alpha\},$$

где $\lambda[x]$ – характеристический показатель функции x [1, с. 41] (для нулевого решения считаем его равным $-\infty$). Как известно, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ множества $L_\alpha(\mu, A)$ и $N_\alpha(\mu, A)$ являются линейными подпространствами пространства $S(\mu, A)$. Обозначим их размерности через $d_\alpha(\mu, A)$ и $D_\alpha(\mu, A)$ соответственно. В частности, величина $d_0(\mu, A)$ называется *индексом экспоненциальной устойчивости.*

Обозначим через $\mathcal{R}^n(M)$ класс семейств систем (1) с матрицами $A(t,\mu) = B(t) + Q(t,\mu)$, где функция $B : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена, система $\dot{x} = B(t)x$ правильна [1, с. 80], а $Q : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и удовлетворяет условию $\sup\limits_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Зафиксировав $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, положим

$$R^n_{\alpha,\beta}(M) \equiv \{(d_\alpha(\,\cdot\,, A), D_\beta(\,\cdot\,, A)) : A \in \mathcal{R}^n(M)\}.$$

Следуя [2, с. 221], для каждых числа $r \in \mathbb{R}$ и функции $f : M \to \mathbb{R}$ условимся обозначать через $[f \geqslant r]$ *лебеговское множество* $\{\mu \in M : f(\mu) \geqslant r\}$ функции f. Кроме того, через $\mathcal{Z}_n$ будем обозначать множество $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Обобщение примера Р.Э. Винограда [3] неустойчивости показателей Ляпунова правильной системы при убывающих к нулю на бесконечности возмущениях её коэффициентов представляет

Теорема. *Для произвольных метрического пространства M, чисел $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и натурального $n\geqslant 2$ вектор-функция $(g,h)\colon M\to\mathcal{Z}_n\times\mathcal{Z}_n$ принадлежит классу $R^n_{\alpha,\beta}(M)$ тогда и только тогда, когда для каждого $r\in\mathbb{R}$ множество $[g\geqslant r]$ имеет тип F_σ, а множество $[h\geqslant r]$ – тип $F_{\sigma\delta}$, причём для всех $\mu\in M$ выполняется неравенство $h(\mu)\geqslant g(\mu)$, если $\beta\geqslant\alpha$, и неравенство $h(\mu)\leqslant g(\mu)$, если $\beta<\alpha$.*

Замечание. Полное описание аналогичного класса вектор-функций для семейств (1) с матрицами $B(t)+Q(t,\mu)$, где $B:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена, а $Q:\mathbb{R}_+\times M\to\mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и экспоненциально убывает (равномерно по μ) при $t\to+\infty$, получено в работе [4] и совпадает с приведённым.

Литература. 1. Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб., 1992. 2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 3. Виноград Р.Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91. № 5. С. 1001–1002. 4. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Потеря устойчивости в линейной системе с экспоненциально убывающим параметрическим возмущением // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1563–1564.

М. И. Зайдель (Москва) “Полное описание пар индексов устойчивости и экспоненциальной устойчивости линейной системы при экспоненциально убывающих параметрических возмущениях” (27 октября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110213, EDN: PCIFYG

Для заданного натурального $n\geqslant 2$ рассмотрим множество $\mathcal{M}_n$ линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty), \tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Для краткости мы отождествляем систему (1) с матричнозначной функцией $A\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{n\times n}$ и пишем $A\in\mathcal{M}_n$.

Через $\mathrm{s}\,(A)$ обозначим *индекс устойчивости* системы $A\in\mathcal{M}_n$, т.е. размерность линейного подпространства её ограниченных решений, а через $\mathrm{es}\,(A)$ – её *индекс экспоненциальной устойчивости*, т.е. размерность линейного подпространства её решений с отрицательными характеристическими показателями Ляпунова [1, с. 12].

Для системы $A\in\mathcal{M}_n$ и метрического пространства M рассмотрим класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ непрерывных (по совокупности переменных) матричнозначных функций $Q\colon\mathbb{R}_+\times M\to\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих для некоторых положительных постоянных C_Q и σ_Q (своих для каждой матрицы Q) оценке

$$\|Q(t,\mu)\|\leqslant C_Q\exp(-\sigma_Q t),\quad (t,\mu)\in\mathbb{R}_+\times M,$$

а также неравенствам

$$\mathrm{s}\,(A+Q(\,\cdot\,,\mu))\leqslant\mathrm{s}\,(A),\quad \mathrm{es}\,(A+Q(\,\cdot\,,\mu))\leqslant\mathrm{es}(A),\quad \mu\in M.$$

Для каждых M и $n\geqslant 2$ ставится задача полного дескриптивно-функционального описания класса пар

$$\Sigma\mathcal{E}_n(M)\equiv\{((\mathrm{s}\,(A),\mathrm{es}\,(A)),(\mathrm{s}\,(A+Q),\mathrm{es}\,(A+Q))) : A\in\mathcal{M}_n,\ \ Q\in\mathcal{E}_n[A](M)\},$$

составленных из пар индексов системы A и пар индексов (зависящих от параметра $\mu\in M$) семейства $A+Q$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$, а Q (при каждом фиксированном A) – класс $\mathcal{E}_n[A](M)$. Напомним, что функция $f\colon M\to\mathbb{R}$ называется [2, с. 224] функцией *класса* $(F_\sigma,{}^*)$ (а значит, второго класса Бэра [2, с. 249]), если для любого $r\in\mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}((r,+\infty))$ является F_σ-множеством пространства M, т.е. представляется в виде счётного объединения его замкнутых подмножеств. Кроме того, будем обозначать через $\mathcal{Z}_n$ множество $\{0,1,\ldots,n\}$. Решение поставленной задачи даёт

Теорема. *Для любых метрического пространства M и натурального числа $n \geqslant 2$ пара $((\alpha_0, \beta_0), (\alpha(\cdot), \beta(\cdot)))$, где $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{Z}_n$ и $\alpha, \beta \colon M \to \mathcal{Z}_n$, принадлежит классу $\Sigma\mathcal{E}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $\alpha_0 \geqslant \beta_0$;

2) $\alpha(\mu) \geqslant \beta(\mu)$ для всех $\mu \in M$;

3) $\alpha(\mu) \leqslant \alpha_0$, $\beta(\mu) \leqslant \beta_0$ для всех $\mu \in M$;

4) функции α, β принадлежат классу $(F_\sigma,{}^*)$.

Далее рассмотрим такое параметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M,$$

что при каждом $\mu \in M$ функция $\mathcal{A}(\,\cdot\,, \mu)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}_+$. Класс таких семейств $\mathcal{A}(\,\cdot\,,\cdot\,)$, непрерывных по $\mu \in M$ в компактно-открытой топологии на пространстве $\mathcal{M}_n$, обозначим через $\mathcal{C}^n(M)$, а в равномерной топологии – через $\mathcal{U}^n(M)$. Имеет место цепочка включений

$$\bigcup_{A \in \mathcal{M}_n} \mathcal{E}_n[A](M) \subset \mathcal{U}^n(M) \subset \mathcal{C}^n(M),$$

а из теоремы вытекает

Следствие. *Для каждых метрического пространства M и натурального числа $n \geqslant 2$ классы*

$$\Sigma\mathcal{C}_n(M) \equiv \{(\mathrm{s}\,(\mathcal{A}), \mathrm{es}\,(\mathcal{A})) : \mathcal{A} \in \mathcal{C}^n(M)\}, \quad \Sigma\mathcal{U}_n(M) \equiv \{(\mathrm{s}\,(\mathcal{A}), \mathrm{es}\,(\mathcal{A})) : \mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)\} \qquad (2)$$

совпадают между собой и состоят из пар $(\alpha(\cdot), \beta(\cdot))$ функций $\alpha, \beta : M \to \mathcal{Z}_n$, принадлежащих классу $(F_\sigma,{}^*)$ и удовлетворяющих неравенству $\alpha(\mu) \geqslant \beta(\mu)$ для всех $\mu \in M$.

Замечание. Описание классов, составленных лишь из вторых элементов пар классов (2), получено в работе [3]: эти классы совпадают между собой и состоят из функций класса $(F_\sigma,{}^*)$.

Литература. 1. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 3. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1307–1318. (Поправка: Письмо в редакцию // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1726.)

Э. Е. Тусупбекова (Москва) “Исследование и анализ системы, описывающей модель “лес–биомасса” (10 ноября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110225, EDN: PBMWWV

В работе [1] предложена математическая модель системы “лес–биомасса” (в её основу положена модель “хищник–жертва” [2]), в которой учитывается возрастная структура лесной биомассы через выделение в её популяции P молодых и M зрелых деревьев, а переменная I обозначает объём полученной продукции после их индустриальной переработки. Для описания взаимодействия между величинами P, M и I рассматривается динамическая система

$$\dot{P} = rP\biggl(1 - \frac{P}{k}\biggr) - \beta P + \gamma P, \quad \dot{M} = \beta P - qd_0 M - d_1 M,$$

$$\dot{I} = \biggl(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 I}{\alpha_3 + M}\biggr) I - d_2 I, \quad P(0), M(0), I(0) \geqslant 0, \qquad (1)$$

в которой параметры r, k, γ, β, α_1, α_2, α_3, q, d_0, d_1, d_2 характеризуют соответственно скорость роста молодых деревьев, ёмкость среды лесной биомассы, размер новых плантаций, скорость перехода дерева от молодого до зрелого состояния, максимальный темп индустриализации, максимальное снижение темпов индустриализации, среднюю ставку правительства по предоставлению защиты лесной биомассы, скорость исчерпания зрелых деревьев промышленными предприятиями, необходимые затраты на вырубку леса, скорость исчерпания зрелых деревьев под влиянием природных факторов и снижение производительности предприятий из-за отсутствия предпочитаемых зрелых деревьев.

В статье [1] с использованием методов работы [3] доказаны положительность и ограниченность решений системы (1) и существование их предельных значений (на бесконечности). Ниже асимптотические свойства решений исследуются с помощью методов работы [4]. Система (1), исходя из физического смысла её параметров и в соответствии с классификацией особых точек в трёхмерном пространстве, может иметь положения равновесия только типа *узел* или *седлоузел* (с ненулевыми действительными собственными значениями одного знака или, соответственно, разных знаков – при этом узловую часть называем *устойчивой*, если отрицательных собственных значений больше, и *неустойчивой*, если их меньше). Обозначим

$$A \equiv r-\beta+\gamma, \quad B \equiv qd_0+d_1, \quad D \equiv \alpha_1-d_2.$$

Теорема 1. *Система (1) имеет четыре положения равновесия*

$$E_0 \equiv (0,0,0), \quad E_1 \equiv (p_0,m_0,0), \quad E_2 \equiv (0,0,i_2), \quad E_3 \equiv (p_0,m_0,i_3),$$

где

$$p_0 \equiv \frac{Ak}{r}, \quad m_0 \equiv \frac{A\beta k}{Br}, \quad i_2 \equiv \frac{D\alpha_3}{\alpha_2}, \quad i_3 \equiv \frac{D(\alpha_3+m_0)}{\alpha_2},$$

а при условии $A,B,D \neq 0$ *для них реализуются в точности следующие восемь случаев:*

1) если $A,D<0<B$, *то* E_0 *– устойчивый узел, а* E_3 *и* E_1, E_2 *– седлоузлы с неустойчивой и устойчивыми узловыми частями соответственно;*

2) если $A,D>0>B$, *то* E_0 *– неустойчивый узел, а* E_3 *и* E_1, E_2 *– седлоузлы с устойчивой и неустойчивыми узловыми частями соответственно;*

3) если $A,B>0>D$, *то* E_1 *– устойчивый узел, а* E_2 *и* E_0, E_3 *– седлоузлы с неустойчивой и устойчивыми узловыми частями соответственно;*

4) если $A,B<0<D$, *то* E_1 *– неустойчивый узел, а* E_2 *и* E_0, E_3 *– седлоузлы с устойчивой и неустойчивыми узловыми частями соответственно;*

5) если $B,D>0>A$, *то* E_2 *– устойчивый узел, а* E_1 *и* E_0, E_3 *– седлоузлы с неустойчивой и устойчивыми узловыми частями соответственно;*

6) если $B,D<0<A$, *то* E_2 *– неустойчивый узел, а* E_1 *и* E_0, E_3 *– седлоузлы с устойчивой и неустойчивыми узловыми частями соответственно;*

7) если $A,B,D>0$, *то* E_3 *– устойчивый узел, а* E_0 *и* E_1, E_2 *– седлоузлы с неустойчивой и устойчивыми узловыми частями соответственно;*

8) если $A,B,D<0$, *то* E_3 *– неустойчивый узел, а* E_0 *и* E_1, E_2 *– седлоузлы с устойчивой и неустойчивыми узловыми частями соответственно.*

Интерес для приложений представляют случаи 4) и 7) теоремы 1, в которых поставленная задача имеет практический смысл.

Теорема 2. *Если* $A\neq 0$, *то решения системы (1) имеют вид*

$$P(t)=A\biggl(\biggl(\frac{A}{P(0)}-\frac{r}{k}\biggr)e^{-At}+\frac{r}{k}\biggr)^{-1}, \quad M(t)=\frac{A\beta}{e^{Bt}}\int\limits_{t_1}^{t}e^{B\tau}\biggl(\biggl(\frac{A}{P(0)}-\frac{r}{k}\biggr)e^{-A\tau}+\frac{r}{k}\biggr)^{-1}d\tau+C_1,$$

$$I(t)=\frac{e^{Dt}}{\alpha_2}\biggl(\int\limits_{t_2}^{t}e^{Ds}\biggl(\frac{A\beta}{e^{Bs}}\int\limits_{t_1}^{s}e^{B\tau}\biggl(\biggl(\frac{A}{P(0)}-\frac{r}{k}\biggr)e^{-A\tau}+\frac{r}{k}\biggr)^{-1}d\tau+C_1\biggr)^{-1}ds+C_2\biggr)^{-1},$$

а если $A=0$, *то*

$$P(t)=\biggl(\frac{r}{k}t+\frac{1}{P(0)}\biggr)^{-1}, \quad M(t)=\frac{\beta}{e^{Bt}}\int\limits_{t_1}^{t}e^{B\tau}\biggl(\frac{r}{k}\tau+\frac{1}{P(0)}\biggr)^{-1}d\tau+C_1,$$

$$I(t)=\frac{e^{Dt}}{\alpha_2}\left(\int\limits_{t_2}^{t}e^{Ds}\left(\frac{\beta}{e^{Bs}}\int\limits_{t_1}^{s}e^{B\tau}\left(\frac{r}{k}\tau+\frac{1}{P(0)}\right)^{-1}d\tau+C_1\right)^{-1}ds+C_2\right)^{-1},\quad t_1,t_2,C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Приведённые результаты позволяют исследовать динамику изучаемого процесса и понять, при каком наборе параметров система имеет устойчивый режим существования.

Литература. 1. Chaudhary M., Dhar J., Misra O. A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for industrialization: a modified Leslie Gower interaction // Modeling Earth Systems and Environment. 2015. V. 1 (43). P. 1–10. 2. Leslie P.H. Some further notes on the use of matrices in population mathematics // Biometrika. 1948. P. 213–245. 3. Chen F. On a nonlinear nonautonomous predator-prey model with diffusion and distributed delay // Comput. Appl. Math. 2014. V. 180. № 1. P. 33–49. 4. Асташова И.В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Соврем. математика и её приложения. 2003. Т. 8. С. 3–33.

И. В. Асташова (Москва) “Об асимптотической эквивалентности квазилинейных уравнений при возмущении степенной малости ” (17 ноября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110237, EDN: PQNSOX

Рассматривается задача асимптотической эквивалентности следующих двух уравнений:

$$y^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)y^{(j)}+p(x)\operatorname{sgn}y\,|y|^k=f(x), \tag{1}$$

$$z^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)z^{(j)}+p(x)\operatorname{sgn}z\,|z|^k=0. \tag{2}$$

В работах [1, 2] приводятся результаты об асимптотической близости решений уравнений (1) и (2) при экспоненциально малой правой части f; в статье [3] доказываются результаты об их асимптотической эквивалентности при $a_j=0$ в случае экспоненциально или степенно малых возмущений f; в [4] при $f=0$ изучается вопрос о различных типах асимптотической близости решений уравнения (2) и его частных случаев к решениям соответствующих линейных уравнений; в работах [5, 6] содержатся, в частности, результаты об асимптотическом поведении решений невозмущённых уравнений. Ниже, в предположении $k>1$ и $n\geqslant 2$, обозначим $\alpha\equiv n/(k-1)$.

Теорема. *Если функции $a_0,\ \ldots,\ a_{n-1},\ p,\ f$ непрерывны, причём p ограничена и*

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty}x^{n-j-1}|a_j(x)|\,dx<+\infty,\quad j=\overline{0,n-1},$$

то для любого $C>0$ найдётся такое $\sigma>\alpha$, что если $f(x)=o(x^{-\sigma-n})$, $x\to+\infty$, то для каждого решения y уравнения (2), удовлетворяющего условию $|y(x)|\leqslant Cx^{-\alpha}$, существует единственное решение z уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$|y(x)-z(x)|=O(x^{-\sigma}),\quad x\to+\infty, \tag{3}$$

а для каждого решения z уравнения (1), удовлетворяющего условию $|z(x)|\leqslant Cx^{-\alpha}$, существует единственное решение y уравнения (2), удовлетворяющее условию (3).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272-п).

Литература. 1. Astashova I. On asymptotic equivalence of n-th order nonlinear differential equations // Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys. 2022. V. 87. P. 17–24. 2. Асташова И.В. Об асимптотической эквивалентности квазилинейных уравнений // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1572–1573. 3. Astashova I.V. On asymptotic equivalence of n-th order nonlinear differential equations // Tatra

Mountains Math. Publ. 2015. V. 63. P. 31–38. 4. Astashova I., Bartusek M., Dosla Z., Marini M. Asymptotic proximity to higher order nonlinear differential equations // Adv. in Nonlin. Anal. 2022. V. 11 (1). P. 1598–1613. 5. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990. 6. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / Под ред. И.В. Асташовой. М., 2012. P. 22–290.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение полных свойств колеблемости и вращаемости дифференциальной системы и их исследование по первому приближению” (24 ноября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110249, EDN: PPKMFX

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ рассмотрим дифференциальную (нелинейную, вообще говоря) систему вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \tag{1}$$

с которой свяжем линейную однородную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_\prime(t,x), \quad A(t) \equiv f'_x(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

причём на нелинейную добавку $h(t,x) \equiv f(t,x) - A(t)x = o(x)$ $(x \to 0)$ обычное требование её равномерной малости по $t \in \mathbb{R}_+$ здесь не накладываем. Через $x_f(\,\cdot\,,x_0)$ обозначим непродолжаемое решение системы (1) с начальным условием $x_f(0,x_0) = x_0$, а через $S_\delta(f)$ – множество решений с начальными значениями x_0, удовлетворяющими условию $0 < |x_0| < \delta$.

Определение 1 [1]. Для описания характеристик колеблемости и ориентированной вращаемости (аналогичных характеристикам блуждаемости [2]) выполним следующее:

1) каждому числу $t \in \mathbb{R}_+$ и непрерывно-дифференцируемой функции $u : [0,t] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ поставим в соответствие значения *функционалов* $\mathrm{K} = \mathrm{N}, \Theta$ *колеблемости* и *вращаемости* соответственно (неопределённые, если функция u определена не на всём отрезке $[0,t]$):

а) $\mathrm{K}(t,u) = \mathrm{N}(t,u)$ – *нормированное* (умноженное на π) число нулей на промежутке $(0,t]$ функции P_1u, где P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую в $\mathbb{R}^n$, причём в *критической* ситуации, когда хотя бы один из нулей $\tau \in [0,t]$ *кратен* (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1u)^\cdot$), считаем выражение $\mathrm{N}(t,u)$ *неопределённым*;

б) $\mathrm{K}(t,u) = \Theta(t,u) \equiv |\varphi(t,P_2u)|$ – модуль *ориентированного угла* $\varphi(t,P_2u)$ (непрерывного по t, с начальным условием $\varphi(0,P_2u) = 0$) между вектором $P_2u(t)$ и начальным вектором $P_2u(0)$, где P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость в $\mathbb{R}^n$, причём в *критической* ситуации, когда $P_2u(\tau) = 0$ хотя бы при одном $\tau \in [0,t]$, считаем выражение $\Theta(t,u)$ *неопределённым*;

2) далее, системе (1), моменту $t \in \mathbb{R}_+$ и невырожденному преобразованию $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ поставим в соответствие значения *нижнего* и *верхнего* (*шаровых*) *функционалов колеблемости* и *вращаемости* при $\mathrm{K} = \mathrm{N}, \Theta$ соответственно, определяемых равенствами

$$\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \equiv \varliminf_{x_0 \to 0} \mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t), \quad \hat{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \equiv \varlimsup_{x_0 \to 0} \mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t);$$

3) наконец, *нижний* (*слабый шаровой*) $\check{\varkappa}^\circ_b(f)$ и *верхний* (*сильный шаровой*) $\hat{\varkappa}^\bullet_b(f)$ *показатели колеблемости* и *вращаемости* системы (1) зададим при $\varkappa = \nu, \theta$ соответственно формулами

$$\check{\varkappa}^\circ_b(f) \equiv \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} t^{-1}\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L), \quad \hat{\varkappa}^\bullet_b(f) \equiv \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t \to +\infty} t^{-1}\hat{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \tag{3}$$

(а *верхний слабый* $\hat{\varkappa}^\circ_b(f)$ и *нижний сильный* $\check{\varkappa}^\bullet_b(f)$ – теми же формулами (3), но с переставленными в них местами пределом при $t \to +\infty$ и точной нижней гранью по $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$).

Показатели (3) оказываются для системы (1) соответственно наименьшим и наибольшим в каждой четвёрке показателей колеблемости или вращаемости из определения 1.

Известны и другие функционалы, отвечающие за аналогичные свойства решений, не связанные с их нормой (см., например, [3–5]): *неориентированную, частотную* и *плоскую вращаемость*, *блуждаемость*, а также *поворачиваемость* заданного *ранга*. Помимо шаровых показателей можно рассматривать (см. [6–8]) ещё *сферические* и *радиальные показатели*.

Определяемые ниже свойства дифференциальной системы отдалённо напоминают устойчивость по Ляпунову (нулевого решения). В отличие от неё здесь на все решения, начинающиеся достаточно близко к нулю, накладываются ограничения не по норме, а по среднему количеству нулей их проекций на прямые или по среднему угловому отклонению (от начального положения) их проекций на плоскости, причём лишь на конечных (пусть и растущих) промежутках времени, поскольку в нелинейном случае решения могут быть определены не на всей полуоси.

Определение 2. Будем говорить, что система (1) обладает:

1) *полной колеблемостью* или *полной вращаемостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $T \in \mathbb{R}_+$, что для каждого $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ справедливы, соответственно, оценки

$$\check{\mathrm{N}}_b(f,t,L) > \varepsilon t \quad \text{или} \quad \check{\Theta}_b(f,t,L) > \varepsilon t, \quad t > T;$$

2) *полной неколеблемостью* или *полной невращаемостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $T \in \mathbb{R}_+$ и $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$, что справедливы, соответственно, оценки

$$\hat{\mathrm{N}}_b(f,t,L) < \varepsilon t \quad \text{или} \quad \hat{\Theta}_b(f,t,L) < \varepsilon t, \quad t > T.$$

Наличие у системы полных свойств колеблемости и вращаемости, как и блуждаемости [2], однозначно определяется знаками её соответствующих шаровых показателей, как показывает

Теорема 1. *Полная колеблемость и полная вращаемость системы (1) равносильны положительности её нижнего показателя колеблемости и соответственно вращаемости:*

$$\check{\nu}_b^\circ(f) > 0, \quad \check{\theta}_b^\circ(f) > 0,$$

а её полная неколеблемость и полная невращаемость равносильны равенству нулю её верхнего показателя колеблемости и соответственно вращаемости:

$$\hat{\nu}_b^\bullet(f) = 0, \quad \hat{\theta}_b^\bullet(f) = 0.$$

В двумерном случае все шаровые показатели вращаемости исходной системы совпадают с аналогичными показателями системы её первого приближения, по которой, таким образом, однозначно устанавливается наличие у исходной системы полной вращаемости или полной невращаемости, что и подтверждает

Теорема 2. *При $n = 2$ полные вращаемость и невращаемость системы (1) равносильны положительности нижнего и соответственно равенству нулю верхнего показателя вращаемости линейной системы (2) её первого приближения:*

$$\check{\theta}_b^\circ(f_\prime) > 0, \quad \hat{\theta}_b^\bullet(f_\prime) = 0,$$

и более того, имеют место равенства

$$\tilde{\theta}_b^*(f) = \tilde{\theta}_b^*(f_\prime), \quad \tilde{} = \check{}, \hat{}, \quad * = \circ, \bullet.$$

Как известно [9], нижние показатели колеблемости и вращаемости исходной системы оцениваются сверху соответствующими показателями системы её первого приближения, что позволяет переносить отдельные свойства последней на исходную систему, о чём и говорит

Теорема 3. *Если линейная система (2), являющаяся системой первого приближения для системы (1), не обладает полной колеблемостью или полной вращаемостью, то ею не обладает также и система (1), и более того, имеют место неравенства*

$$\check{\nu}_b^*(f) \leqslant \check{\nu}_b^*(f_\prime), \quad \check{\theta}_b^*(f) \leqslant \check{\theta}_b^*(f_\prime), \quad * = \circ, \bullet.$$

Однако многие свойства вращаемости системы первого приближения не переносятся на исходную систему уже в трёхмерном случае, а свойства колеблемости – даже в двумерном, что и демонстрируют

Теорема 4. *При $n = 2$ существует линейная система (2), являющаяся системой первого приближения для системы (1) и обладающая полной колеблемостью, которой не обладает система (1), и более того, имеют место соотношения*

$$\check{\nu}_b^*(f) = 0 < 1 = \hat{\nu}_b^*(f) = \check{\nu}_b^*(f_\prime), \quad * = \circ, \bullet.$$

Теорема 5. *При $n = 3$ существует линейная система (2), являющаяся системой первого приближения для системы (1) и обладающая полной неколеблемостью и полной невращаемостью, которыми не обладает система (2), и более того, имеют место соотношения*

$$\hat{\kappa}_b^*(f_\prime) = \check{\kappa}_b^*(f) = 0 < 1 = \hat{\kappa}_b^*(f), \quad * = \circ, \bullet, \quad \kappa = \nu, \theta.$$

Замечание. Возможности исследования по первому приближению полных свойств колеблемости и вращаемости, в отличие от блуждаемости [2], пока ещё не вполне изучены.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 859–861. 2. Сергеев И.Н. Определение полных блуждаемости и неблуждаемости дифференциальной системы и их исследование по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1577–1578. 3. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 4. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 5. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 6. Сергеев И.Н. Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840. 7. Сергеев И.Н. Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562. 8. Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46. 9. Сергеев И.Н. Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 726–734.