

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.6+517.927.4

АНАЛИЗ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский

Для нелинейного дифференциального матричного уравнения с помощью конструктивного метода регуляризации по линейной части уравнения с использованием соответствующих фундаментальных матриц исследована многоточечная краевая задача. По исходным данным задачи получены достаточные условия её однозначной разрешимости. Предложены итерационные алгоритмы построения решения, содержащие сравнительно простые вычислительные процедуры. Даны эффективные оценки, характеризующие скорость сходимости итерационной последовательности к решению, а также оценки области локализации решения.

DOI: 10.31857/S0374064123120014, EDN: NUPTOT

Рассмотрим многоточечную краевую задачу для дифференциального матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \in I, \quad (1)$$

с условием

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = \omega, \quad (2)$$

где $A, B \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $I = [0, \omega]$; $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$, $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$; $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$, M_i – вещественные постоянные $n \times n$ -матрицы. Предполагаем, что нелинейная функция $F(t, X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde{\rho}}$ условию Липшица относительно X (локально) и что $F(t, 0) \neq 0$.

Задача (1), (2) изучается на основе применения метода регуляризации [1, с. 70] в смысле [2, с. 156], при этом используются регуляризаторы различных типов (односторонний и двусторонний), конструируемые по линейной части уравнения. В рассмотренных случаях получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи и алгоритмы построения решения, основанные на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений [3, с. 605]. Качественными методами эта задача исследовалась в статье [4]. С периодическими краевыми условиями на основе метода регуляризации она рассматривалась в [5]. Настоящая статья является обобщением и развитием работ [6, 7].

Задачу (1), (2) будем исследовать в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций $I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ с нормой $\|X\|_C = \max_{t \in I} \|X(t)\|$. Сначала применим левостороннюю регуляризацию [1, гл. 1]. При этом для получения соответствующего эквивалентного интегрального уравнения воспользуемся расщеплением (декомпозицией) матрицы $A(t)$ в виде

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t), \quad (3)$$

где матрица $A_1(t)$ выбирается специальным образом, например, согласно [1, гл. 1]. Достаточно эффективным является представление матрицы $A(t) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, в котором в качестве матрицы $A_1(t)$ используется диагональная часть матрицы $A(t)$, т.е.

$$A_1(t) = \text{diag} [a_{11}(t), a_{22}(t), \dots, a_{nn}(t)].$$

Возможны и другие способы расщепления матрицы $A(t)$ [1, гл. 1, 5], в том числе и тривиальные: $A_1(t) \equiv 0$ и $A_1(t) \equiv A(t)$ (тогда соответственно $A_2(t) \equiv A(t)$ и $A_2(t) \equiv 0$). При выборе декомпозиции матриц целесообразно руководствоваться скоростью сходимости соответствующих алгоритмов.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dU}{dt} = A_1(t)U, \quad t \in I, \quad (4)$$

и примем следующие обозначения: $U(t)$ – какая-либо фундаментальная матрица системы (4),

$$U_i = U(t_i), \quad i = \overline{1, k}, \quad D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \quad \|X\| \leq \rho\}, \quad H = \sum_{i=1}^k M_i U_i, \quad \gamma = \|H^{-1}\|, \quad m_i = \|M_i\|,$$

$$u_i = \|U_i\|, \quad \lambda_1 = \max_{t \in I} \|U(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_{t \in I} \|U^{-1}(t)\|, \quad \alpha_2 = \max_{t \in I} \|A_2(t)\|, \quad \beta = \max_{t \in I} \|B(t)\|,$$

$$h = \max_{t \in I} \|F(t, 0)\|, \quad q = q(\rho) = \gamma \lambda_1 \lambda_2 (\alpha_2 + \beta + L) \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i, \quad N = \gamma \lambda_1 \lambda_2 h \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i,$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $\|\cdot\|$ – некоторая фиксированная норма в $\mathfrak{B}(n)$, например, любая из норм, приведённых в книге [8, с. 21], $L = L(\rho)$ – постоянная Липшица относительно X функции $F(t, X)$ для области D_ρ .

Теорема 1. Если выполнены условия

$$\det H \neq 0, \quad (5)$$

$$q < 1 \quad \text{и} \quad N \leq \rho(1 - q), \quad (6)$$

то задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . Её решение $X(t)$ представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке I последовательности $\{X_p(t)\}_{p=0}^\infty$ матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$X_p(t) = U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [A_2(\tau)X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau)B(\tau) + F(\tau, X_{p-1}(\tau))] d\tau, \quad (7)$$

где $p \in \mathbb{N}$, а в качестве $X_0(t)$ может быть выбрана любая непрерывная функция; при этом для решения справедлива оценка

$$\|X\|_C \leq \frac{N}{1 - q}. \quad (8)$$

Кроме того, каждая из функций $X_p(t)$, $p \in \mathbb{N}$, определяемая соотношением (7), удовлетворяет краевому условию (2), т.е. условию

$$\sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) = 0, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Доказательство. С помощью регуляризатора типа [1, с. 70] на основании (3), (4) покажем сначала, что задача (1), (2) при выполнении условия (5) равносильна интегральному уравнению

$$X(t) = U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [A_2(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (10)$$

Для упрощения записи в дальнейшем функцию $A_2(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))$, стоящую в квадратных скобках в правой части уравнения (10), обозначим через $G(\tau, X(\tau))$. Рассматривая уравнение (1) как уравнение (4) с возмущением $G(t, X)$, в силу формулы Лагранжа вариации произвольных постоянных получим представление

$$X(t) = U(t) \left[U^{-1}(t_1)X(t_1) + \int_{t_1}^t U^{-1}(s)G(s, X(s)) ds \right], \quad t \in I. \quad (11)$$

Подставим в это тождество t_i вместо t и умножим затем его слева на матрицу M_i . Тогда, просуммировав полученные равенства по i от 1 до k , будем иметь

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t_i) = \sum_{i=1}^k M_i U_i U^{-1}(t_1) X(t_1) + \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_1}^{t_i} U^{-1}(s) G(s, X(s)) ds.$$

В силу краевого условия (2) левая часть этого равенства равна нулю, поэтому, умножив его слева на H^{-1} , получим

$$U^{-1}(t_1)X(t_1) = -H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_1}^{t_i} U^{-1}(s) G(s, X(s)) ds. \quad (12)$$

Заменив в равенстве (11) первое слагаемое в квадратных скобках согласно (12) и учитывая определение матрицы H , приходим к тождеству

$$\begin{aligned} X(t) &= U(t) \left[-H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_1}^{t_i} U^{-1}(s) G(s, X(s)) ds + H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_1}^t U^{-1}(s) G(s, X(s)) ds \right] = \\ &= U(t) H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(s) G(s, X(s)) ds. \end{aligned}$$

Итак, если дифференцируемая функция $X(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и краевому условию (2), то она удовлетворяет и интегральному уравнению (10).

Установим обратное: всякое дифференцируемое решение интегрального уравнения (10) является решением задачи (1), (2). Для этого сначала, продифференцировав обе части уравнения (10), получим равенство

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_1(t)X(t) + U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i U^{-1}(t)G(t, X(t)) = A_1(t)X(t) + G(t, X(t)),$$

которое, поменяв переменную t на τ , запишем в виде

$$G(\tau, X(\tau)) = \frac{dX(\tau)}{d\tau} - A_1(\tau)X(\tau). \quad (13)$$

Заменив теперь в уравнении (10) выражение в квадратных скобках равной ему правой частью равенства (13), будем иметь

$$X(t) = U(t) H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [dX(\tau) - A_1(\tau)X(\tau) d\tau],$$

т.е.

$$X(t) = U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) dX(\tau) - U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) A_1(\tau) X(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Выполнив в первой сумме в (14) интегрирование по частям, получим последовательно

$$\begin{aligned} X(t) &= U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \left[U^{-1}(\tau) X(\tau) \Big|_{t_i}^t + \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) A_1(\tau) X(\tau) d\tau \right] - \\ &\quad - U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) A_1(\tau) X(\tau) d\tau = \\ &= U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \left[U^{-1}(\tau) X(t) - U^{-1}(t_i) X(t_i) + \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) A_1(\tau) X(\tau) d\tau \right] - \\ &\quad - U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) A_1(\tau) X(\tau) d\tau = \\ &= U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i [U^{-1}(t) X(t) - U^{-1}(t_i) X(t_i)] = X(t) + U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i X(t_i). \end{aligned}$$

Отсюда имеем соотношение

$$U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i X(t_i) = 0,$$

а значит, и краевое условие (9).

Запишем уравнение (10) в операторном виде

$$X = \mathfrak{L}(X), \quad (15)$$

где $\mathfrak{L}$ – оператор, определяемый правой частью (10). Этот оператор действует из $C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ в $C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$. Рассмотрим его на шаре $\tilde{D}_\rho = \{X(t) : \|X\|_C \leq \rho\}$ и установим, что из условий (6) следует выполнение принципа сжимающих отображений Каччопполи–Банаха (см., например, [3, с. 605]).

Сначала установим, что $\mathfrak{L}(X) \in \tilde{D}_\rho$, если $X \in \tilde{D}_\rho$. Выполнив соответствующие оценки, получим

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{L}(X)\| &\leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \|U_i\| \left\| \int_{t_i}^t \|U^{-1}(\tau)\| [\|A_2(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|X(\tau)\| \|B(\tau)\| + \right. \\ &\quad \left. + \|F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, 0)\| + \|F(\tau, 0)\|] d\tau \right\| \leq \gamma \lambda_1 \lambda_2 [(\alpha_2 + \beta + L)\rho + h] \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i = q\rho + N. \end{aligned}$$

На основании условий (6) справедлива оценка

$$\|\mathfrak{L}(X)\|_C \leq \rho. \quad (16)$$

Далее из (15) для любых $\tilde{X} \in \tilde{D}_\rho$ и $\tilde{\tilde{X}} \in \tilde{D}_\rho$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{L}(\tilde{X}) - \mathfrak{L}(\tilde{\tilde{X}})\| &\leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \|U_i\| \int_0^\omega \|U^{-1}(\tau)\| [\|A_2(\tau)\| + \|B(\tau)\|] \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{\tilde{X}}(\tau)\| + \\ &+ \|F(\tau, \tilde{X}(\tau)) - F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau))\| d\tau \leq \gamma \lambda_1 \lambda_2 (\alpha_2 + \beta + L) \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i \|\tilde{X} - \tilde{\tilde{X}}\|_C = q \|\tilde{X} - \tilde{\tilde{X}}\|_C, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|\mathfrak{L}(\tilde{X}) - \mathfrak{L}(\tilde{\tilde{X}})\|_C \leq q \|\tilde{X} - \tilde{\tilde{X}}\|_C. \quad (17)$$

Таким образом, на шаре $\tilde{D}_\rho$ при выполнении условий (6) справедливы неравенства (16) и (17), означающие, что к уравнению (15) применим принцип сжимающих отображений. На основании этого заключаем, что решение $X = X(t)$ данного уравнения на шаре $\tilde{D}_\rho$ существует и единственно. Другими словами, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ ; при этом на основании (5), (6) справедлива оценка (8).

Решение уравнения (10) будем строить с помощью классического метода последовательных приближений [3, с. 605] в виде (7). В качестве начального приближения принимаем произвольную функцию $X_0(t) \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$. Очевидно, алгоритм (7) определяет последовательность $\{X_p(t)\}_{p=0}^\infty \subset C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, при этом $\{X_p(t)\}_{p=1}^\infty \subset C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Доказательство того, что функции $X_1(t), X_2(t), \dots$ удовлетворяют краевому условию (9) аналогично доказательству эквивалентности интегрального уравнения (10) задаче (1), (2).

Изучим вопрос сходимости этой последовательности. Следуя известному приёму, этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + \dots + (X_p(t) - X_{p-1}(t)) + \dots \quad (18)$$

Докажем равномерную по $t \in I$ сходимость ряда (18). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на отрезке I матричный функциональный ряд (18).

Из (7) имеем

$$X_{p+1}(t) - X_p(t) = \mathfrak{L}(X_p) - \mathfrak{L}(X_{p-1}), \quad p \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

где, согласно определению оператора $\mathfrak{L}$,

$$\mathfrak{L}(Y) = U(t) H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [A_2(\tau) Y(\tau) + Y(\tau) B(\tau) + F(\tau, Y(\tau))] d\tau.$$

Выполнив оценки по норме в (19) и используя соотношение (17), получим

$$\|X_{p+1} - X_p\|_C \leq q \|X_p - X_{p-1}\|_C, \quad p \in \mathbb{N},$$

откуда следует окончательная оценка

$$\|X_p - X_{p-1}\|_C \leq q^p \|X_1 - X_0\|_C, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (20)$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_C = \|\mathfrak{L}(X_0) - X_0\|_C$.

Используя (20), несложно доказать, что последовательность $\{X_r\}_{r=0}^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению уравнения (10), при этом справедливо неравенство

$$\|X - X_r\|_C \leq \frac{q^r}{1 - q} \|X_1 - X_0\|_C, \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (21)$$

Вследствие (20), (21) имеем оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую согласно алгоритму (7):

$$\|X\|_C \leq \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1 - q}. \quad (22)$$

Покажем, что из (22) при $X_0(t) \equiv 0$ следует оценка (8), при этом $\|X_1 - X_0\|_C = \|X_1\|_C = \|\mathfrak{L}(0)\|_C$. Так как

$$\|\mathfrak{L}(0)\| \leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \|U_i\| \int_0^\omega \|U^{-1}(\tau)F(\tau, 0)\| d\tau \leq \gamma \lambda_1 \lambda_2 \omega h \sum_{i=1}^k m_i u_i = N,$$

то неравенство (22) влечёт за собой оценку (8). Теорема доказана.

Далее проведём аналогичный анализ на основе правосторонней регуляризации задачи (1), (2), используя расщепление матрицы $B(t)$ в виде

$$B(t) = B_1(t) + B_2(t),$$

где матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$ выбираются указанными выше способами.

Наряду с принятыми выше обозначениями, будем использовать также следующие: $V(t)$ – фундаментальная матрица линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dV}{dt} = VB_1(t), \quad t \in I,$$

$$V_i = V(t_i), \quad v_i = \|V_i\|, \quad \alpha = \max_{t \in I} \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_{t \in I} \|B_2(t)\|,$$

$$\mu_1 = \max_{t \in I} \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_{t \in I} \|V^{-1}(t)\|,$$

Φ – линейный оператор, задаваемый равенством $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^k M_i Y V_i$ (см. [4]) и

$$\tilde{\gamma} = \|\Phi^{-1}\|, \quad \tilde{q} = \tilde{q}(\rho) = \tilde{\gamma} \mu_1 \mu_2 (\alpha + \beta_2 + L) \omega \sum_{i=1}^k m_i v_i, \quad \tilde{N} = \tilde{\gamma} \mu_1 \mu_2 h \omega \sum_{i=1}^k m_i v_i.$$

Теорема 2. Если оператор Φ однозначен обратим и выполнены условия $\tilde{q} < 1$, $\tilde{N} \leq \rho(1 - \tilde{q})$, то задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . Её решение $X(t)$ представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке I последовательности $\{X_p(t)\}_{p=0}^\infty$ матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$X_p(t) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau)B_2(\tau) + F(\tau, X_{p-1}(\tau))] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t), \quad (23)$$

где $p \in \mathbb{N}$, а в качестве $X_0(t)$ может быть выбрана любая непрерывная функция; при этом для решения справедлива оценка

$$\|X\|_C \leq \frac{\tilde{N}}{1 - \tilde{q}}.$$

Кроме того, каждая из функций $X_p(t)$, $p \in \mathbb{N}$, определяемая соотношением (23), удовлетворяет краевому условию (9).

Для доказательства теоремы 2 достаточно воспользоваться регуляризатором типа [1, с. 70] при получении эквивалентной интегральной задачи

$$X(t) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau, X(\tau))] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t), \quad (24)$$

а затем выполнить соответствующие выкладки в рамках применения принципа сжимающих отображений. Выкладки, связанные с обоснованием сходимости и скорости сходимости алгоритма (23), проводятся аналогично.

В работе [4] задача (1), (2) рассмотрена качественными методами с использованием фундаментальных матриц, определяемых слагаемыми линейной части уравнения (1).

Метод регуляризации [1, с. 70] позволяет выполнить более эффективный анализ задачи (1), (2) на основе двойного расщепления коэффициентов уравнения (1), а именно:

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t), \quad B(t) = B_1(t) + B_2(t),$$

где матрицы $A_i(t)$ и $B_i(t)$ ($i = 1, 2$) выбираются описанными выше способами.

Наряду с обозначениями, принятыми для теорем 1 и 2, будем использовать следующие: Ψ – линейный оператор, задаваемый равенством $\Psi Y \equiv \sum_{i=1}^k M_i U_i Y V_i$ [4] и

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \|\Psi^{-1}\|, \quad \tilde{q} = \tilde{q}(\rho) = \tilde{\gamma} \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 (\alpha_2 + \beta_2 + L) \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i v_i, \\ q_0 &= \tilde{\gamma} \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 L \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i v_i, \quad \tilde{N} = \tilde{\gamma} \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 h \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i v_i. \end{aligned}$$

Теорема 3. Если оператор Ψ однозначно обратим и выполнены условия $\tilde{q} < 1$, $\tilde{N} \leq \rho(1 - \tilde{q})$, то задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . Её решение $X(t)$ представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке I последовательности $\{X_p(t)\}_{p=0}^\infty$ матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$\begin{aligned} X_p(t) &= U(t) \Psi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [A_2(\tau) X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau) B_2(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + F(\tau, X_{p-1}(\tau))] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} V(t), \end{aligned} \quad (25)$$

где $p \in \mathbb{N}$, а в качестве $X_0(t)$ может быть выбрана любая непрерывная функция; при этом для решения справедлива оценка

$$\|X\|_C \leq \frac{\tilde{N}}{1 - \tilde{q}}.$$

Кроме того, каждая из функций $X_p(t)$, $p \in \mathbb{N}$, определяемая соотношением (25), удовлетворяет краевому условию (9).

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теорем 1 и 2. При этом вместо интегральных уравнений (10) и (24) получается следующее эквивалентное задаче (1), (2) интегральное уравнение:

$$X(t) = U(t) \Psi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [A_2(\tau) X(\tau) + X(\tau) B_2(\tau) + F(\tau, X(\tau))] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} V(t). \quad (26)$$

Соответствующие оценки для алгоритма (25) выполняются так же, как и в случае теорем 1 и 2.

Следствие (ср. [4]). Пусть оператор Ψ однозначно обратим и выполнены условия $q_0 < 1$, $\tilde{N} \leq \rho(1 - q_0)$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима; её решение $X(t)$ представимо в виде предела равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением вида (25) и удовлетворяющих условию (9); при этом справедлива оценка

$$\|X\|_C \leq \frac{\tilde{N}}{1 - q_0}.$$

В силу произвольности расщепления матриц $A(t)$, $B(t)$ полагаем $A_2(t) \equiv 0$, $B_2(t) \equiv 0$. Тогда $U(t)$ и $V(t)$ – фундаментальные матрицы уравнений $dU/dt = A(t)U(t)$ и $dV/dt = V(t)B(t)$ соответственно. При таком расщеплении из интегрального уравнения (26) следует уравнение (ср. [4])

$$X(t) = U(t)\Psi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau))V^{-1}(\tau) d\tau V_i\right\}V(t). \quad (27)$$

Разумеется, в конструкции оператора Ψ в (27) участвуют соответствующие матрицы $U(t)$ и $V(t)$.

Замечание. В работе [4] данная задача рассмотрена в области $I \times \mathbb{R}^{n \times n}$. Исследование в этой области её однозначной разрешимости существенно не отличается от линейного случая, рассмотренного в [6, 7]: в основном всё сводится к оценкам коэффициентов сжатия соответствующих интегральных операторов, полученных различными методами, при этом в [4] громоздкими и сложными. Методика, используемая в [6, 7] и в предлагаемой работе, вполне конструктивная, поскольку позволяет получить сравнительно простые условия однозначной разрешимости и несложные алгоритмы построения решения задачи (1), (2) для области более общей конфигурации. Если в настоящей статье условия разрешимости содержат оценки нормы фундаментальных матриц линейных слагаемых в (1), то в [6, 7] соответствующие условия представлены явно в терминах задачи в рассматриваемых случаях вырождения краевых условий, характеризующих связь между матрицами M_i .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптинский В.Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск, 1998.
2. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковец Л.С., Стеценко В.Я. Интегральные уравнения. М., 1968.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.
4. Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness // J. Math. Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.
5. Лаптинский В.Н. О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.
6. Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н. Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 776–784.
7. Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н. Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.
8. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Белорусско-Российский университет,
г. Могилёв

Поступила в редакцию 27.06.2023 г.
После доработки 27.06.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.