ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 12, с. 1599–1605

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ АНТИПЕРРОНОВСКОГО ЭФФЕКТА СМЕНЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

© 2023 г. Н. А. Изобов, А. В. Ильин

Доказано существование двумерной линейной системы $\dot{x} = A(t)x, \ t \geqslant t_0$, с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и всеми положительными характеристическими показателями, а также бесконечно дифференцируемого m-возмущения $f(t, y)$, имеющего порядок $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и не превосходящего m порядок роста вне её, таких, что возмущённая система $\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \ y \in \mathbb{R}^2, \ t \geqslant t_0$, имеет решение $y(t)$ с отрицательным показателем Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0374064123120026, EDN: NUWDWF

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$. Вместе с ними рассматриваем и нелинейные системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

с m-возмущениями $f(t, y)$, также бесконечно дифференцируемыми порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне её:

$$\|f(t, y)\| \leqslant C_f\|y\|^m, \quad m > 1, \quad C_f = \mathrm{const}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Эффект Перрона [1; 2, с. 50–51] в двумерном случае устанавливает существование системы (1) с отрицательными показателями и 2-возмущение (3) таких, что все нетривиальные решения двумерной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и часть из них имеет совпадающие положительные показатели, а в оставшейся непустой части – отрицательный показатель. Этот эффект смены отрицательных показателей системы (1) на положительные для решений системы (2) исследован нами (в том числе и совместно с С.К. Коровиным) в серии работ, завершившейся полным описанием [3, 4] совокупностей как положительных, так и отрицательных (и при их отсутствии) показателей всех нетривиальных решений системы (2).

Бо́льший интерес своими возможными приложениями представляет антиперроновский [5, 6] эффект смены всех положительных показателей системы линейного приближения (1) на отрицательные для решений систем с малыми возмущениями (линейными экспоненциально убывающими, линейными стремящимися к нулю на бесконечности, нелинейными высшего порядка малости). При этом в статье [5] реализована смена показателей

$$\lambda_1(A) > 0 \mapsto \lambda_{n-1}(A + Q) < 0 < \lambda_n(A + Q)$$

экспоненциально убывающими линейными возмущениями $f(t, y) = Q(t)y$ (остался открытым случай $\lambda_n(A + Q) < 0$), а в [6] – полная смена показателей $\lambda_1(A) > 0 \mapsto \lambda_n(A + Q) < 0$ возмущениями $Q(t) \to 0$ для $t \to +\infty$.

В настоящей работе реализован следующий вариант антиперроновского эффекта: смена положительных показателей двумерного линейного приближения (1) на отрицательный для нетривиального решения нелинейной системы (2) с m-возмущением (3).

Справедлива следующая

Теорема. *Для любых параметров* $m > 1$, $\theta > 1$, $\lambda > 0$ *существуют:*

1) двумерная линейная система (1) с ограниченной бесконечно дифференцируемой матрицей коэффициентов $A(t)$ *и характеристическими показателями* $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda > 0$,

2) также бесконечно дифференцируемое по своим аргументам m*-возмущение*

$$f(t, y) : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

такие, что возмущённая нелинейная система (2) имеет решение $y(t)$ *с показателем Ляпунова*

$$\lambda[y] = -\lambda\frac{\theta+1}{m\theta-1} < 0. \tag{4}$$

Доказательство. 1°. Построение системы линейного приближения. По числу $\alpha = \lambda(\theta+1)/(\theta-1)$, точкам $t_k = \theta^k$, $k \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, функциям $\varepsilon(t) = \exp(-t^2)$, $t \geqslant 1$, и Гелбаума–Олмстеда [7, с. 54]

$$e_{\beta\gamma}(\tau, \tau_1, \tau_2) = \beta + (\gamma - \beta)\exp\{-(\tau-\tau_1)^{-2}\exp[-(\tau-\tau_2)^{-2}]\}, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2),$$

принимающей на концах интервала значения β и γ и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка, определим ограниченные бесконечно дифференцируемые коэффициенты необходимой диагональной системы

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a_1(t), a_2(t)]x = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0 = 1. \tag{5}$$

Для этого на промежутке $[t_{2k}, t_{2k+2})$ с произвольным фиксированным $k \in \mathbb{N}_0$ положим

$$a_2(t) = \begin{cases} -\alpha, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \\ e_{-\alpha,\alpha}(t, t'_{2k+1}, t_{2k+1}), & t \in (t'_{2k+1}, t_{2k+1}), \end{cases} \qquad t'_k \equiv t_k - \varepsilon(t_k),$$

$$a_2(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in [t_{2k+1}, t'_{2k+2}], \\ e_{\alpha,-\alpha}(t, t'_{2k+2}, t_{2k+2}), & t \in (t'_{2k+2}, t_{2k+2}), \end{cases}$$
$$a_1(t) = -a_2(t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Для вычисления характеристических показателей системы (5) рассмотрим другую диагональную систему

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a'_1(t), a'_2(t)]x = A'(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{5$'$}$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$a'_2(t) = \begin{cases} -\alpha, & t \in [t_{2k}, t_{2k+1}), \\ \alpha, & t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}), \end{cases} \qquad a'_1(t) = -a'_2(t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}).$$

Из очевидных равенств

$$(t_{2k+2} - t_{2k})^{-1}\int\limits_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} a'_2(\tau)\,d\tau = (t_{2k+3} - t_{2k+1})^{-1}\int\limits_{t_{2k+1}}^{t_{2k+3}} a'_1(\tau)\,d\tau = \alpha\frac{\theta-1}{\theta+1} = \lambda,$$

справедливых при всех $k \in \mathbb{N}_0$, для характеристических показателей системы (5$'$) следуют необходимые представления $\lambda_1(A') = \lambda_2(A') = \lambda$.

Матрицы $A(t)$ и $A'(t)$ на промежутке $[t_k, t_{k+1})$ отличаются друг от друга на величину, не превосходящую 2α, причём это происходит на промежутке длины $\varepsilon(t_{k+1})$. Таким образом, имеет место неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \|A(\tau) - A'(\tau)\| e^{M\tau}\, d\tau < +\infty$$

при любом конечном $M > 0$.

Поэтому, согласно [8], системы (5) и $(5')$ являются асимптотически эквивалентными (приводимыми друг к другу линейным преобразованием Ляпунова). Тем самым справедливы и необходимые равенства

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \alpha\frac{\theta-1}{\theta+1} = \lambda.$$

2°. Построение возмущённой системы и её решения с отрицательным показателем. Сначала изложим алгоритм такого построения на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ с произвольно фиксированным $k > 1$.

Определим величины

$$\beta_1 = \theta\beta_2 - (\theta-1)\alpha, \quad \beta_2 = -\alpha\frac{\theta-1}{m\theta-1} \tag{6}$$

и будем строить на этом отрезке возмущённую систему с m-возмущением

$$f(t,y) = (f_1(t,y_2), f_2(t,y_1))^{\mathrm{т}}, \quad t\in[t_{2k}, t_{2k+2}], \quad y\in\mathbb{R}^2_+ \equiv \{(y_1,y_2)^{\mathrm{т}} : y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0\},$$

и её решение $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^{\mathrm{т}}$ с начальными значениями

$$y_1(t_{2k}) = e^{\beta_1 t_{2k}}, \quad y_2(t_{2k}) = c_{2k}e^{\beta_2 t_{2k}}. \tag{7}$$

Здесь и ниже

$$c_{2k}(t) \equiv \exp\biggl(\int\limits_{t'_{2k}}^{t} [-\alpha + e_{\alpha,-\alpha}(\tau, t'_{2k}, t_{2k})]\, d\tau\biggr), \quad t\in[t'_{2k}, t_{2k}], \tag{8}$$

$$c_{2k+1}(t) \equiv \exp\biggl(\int\limits_{t'_{2k+1}}^{t} [\alpha + e_{-\alpha,\alpha}(\tau, t'_{2k+1}, t_{2k+1})]\, d\tau\biggr), \quad t\in[t'_{2k+1}, t_{2k+1}];$$

будем также использовать обозначение $c_k(t_k) = c_k$.

Для последних функций справедливы оценки

$$e^{-2\alpha\varepsilon(t_{2k})} \leqslant c_{2k}(t) \leqslant 1, \quad t\in[t'_{2k}, t_{2k}].$$

$$1 \leqslant c_{2k+1}(t) \leqslant e^{2\alpha\varepsilon(t_{2k+1})}, \quad t\in[t'_{2k+1}, t_{2k+1}],$$

Положив

$$f_1(t,y_2) \equiv 0, \quad t\in[t_{2k}, t_{2k+1}], \tag{9}$$

для первой компоненты $y_1(t)$ строящегося решения получим представление

$$y_1(t) = e^{\beta_1 t_{2k} + \alpha(t - t_{2k})} \times \begin{cases} 1, & t\in[t_{2k}, t'_{2k+1}], \\ c^{-1}_{2k+1}(t), & t\in[t'_{2k+1}, t_{2k+1}]. \end{cases} \tag{10}$$

При определении необходимого бесконечно дифференцируемого m-возмущения $f_2(t,y_1)$ и построении второй компоненты $y_2(t)$ этого решения на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ следует иметь в виду, что сама функция y_1^m, $y_1 \geqslant 0$, для $m > 1$, отличных от натуральных значений, не является бесконечно дифференцируемой в точке $y_1 = 0$. Поэтому воспользуемся следующими двумя бесконечно дифференцируемыми (с нулевыми значениями односторонних производных любого порядка на концах соответствующих промежутков) функциями:

$$E(\tau,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4) = \begin{cases} e_{01}(\tau,\tau_1,\tau_2), & \tau \in [\tau_1,\tau_2], \\ 1, & \tau \in (\tau_2,\tau_3], \\ e_{10}(\tau,\tau_3,\tau_4], & \tau \in [\tau_3,\tau_4], \end{cases} \tag{11}$$

$$F_k(y_i) = \begin{cases} y_i^m e_{01}(y_i,0,\varepsilon(t_k)), & y_i \in [0,\varepsilon(t_k)], \\ y_i^m, & y_i > \varepsilon(t_k), \end{cases} \qquad i \in \{1,2\}. \tag{12}$$

Следует отметить, что необходимое уменьшение величин положительных компонент $y_i(t)$ строящегося решения $y(t)$ (и тем самым в итоге необходимую реализацию отрицательности показателя решения $y(t)$, построенного на всей полуоси $[t_0,+\infty)$) будем осуществлять ненулевыми и только отрицательными значениями компонент m-возмущения.

В соответствии с этим компонента $f_2(t,y_1)$ m-возмущения $f(t,y)$ на отрезке $[t_{2k},t_{2k+1}]$ имеет представление

$$f_2(t,y_1) = \begin{cases} 0, & t \in [t_{2k},\eta_{2k+1}], \\ -d_{2k+1}F_{2k+1}(y_1)E(t,\eta_{2k+1},\eta'_{2k+1},t'_{2k+1},t_{2k+1}), & t \in (\eta_{2k+1},t_{2k+1}], \end{cases} \tag{13}$$

в котором $\eta_{2k+1} \equiv t_{2k+1} - 1$, $\eta'_{2k+1} = \eta_{2k+1} + \varepsilon(t_{2k+1})$, $y_1 \geqslant 0$, а постоянная $d_{2k+1} > 0$ подлежит последующему определению.

Бесконечная дифференцируемость функции $f_2(t,y_1)$ обеспечивается аналогичным свойством функций Гелбаума–Олмстеда и нулевыми значениями их односторонних производных любого порядка в концевых точках промежутков определения, а также значениями самих этих функций в указанных точках.

По определению постоянной $\beta_1 < 0$ для первой компоненты $y_1(t)$ наряду с представлениями (8) и (10) справедливы равенства

$$y_1(t) = e^{\beta_2 t_{2k+1}} + \alpha(t - t_{2k+1}) \times \begin{cases} 1, & t \in [t_{2k},t'_{2k+1}], \\ c_{2k+1}^{-1}(t), & t \in [t'_{2k+1},t_{2k+1}]. \end{cases} \tag{14}$$

Для этой компоненты на отрезке $[t_{2k+1}-1,t_{2k+1}]$, во всех внутренних точках которого возмущение $f_2(t,y_1)$ при $y_1 > 0$ отрицательно, в соответствии с его определением (11)–(13) установим неравенство

$$y_1(t) > \varepsilon(t_{2k+1}), \quad t \in [t_{2k+1}-1,t_{2k+1}]. \tag{15}$$

Так как $\beta_2 > -\alpha$, то неравенство (15) на отрезке $[t_{2k+1}-1,t'_{2k+1}]$ получается из представления (14) следующим образом:

$$\ln y_1(t) > -\alpha(1+t_{2k+1}) > -2\alpha t_{2k+1} > -t_{2k+1}^2 \equiv \ln\varepsilon(t_{2k+1}),$$

что обеспечивается выбором

$$k > k_0: \quad t_k > t_{k_0} = \theta^{k_0} > 4(1+\alpha).$$

Таким образом, неравенство (15) полностью доказано. Оно позволяет представить возмущение $f_2[t,y_1(t)]$ в виде

$$f_2[t,y_1(t)] = -d_{2k+1}E(t,\ldots)y_1^m(t), \quad t \in [t_{2k+1}-1,t_{2k+1}]. \tag{16}$$

Вторая компонента $y_2(t)$ с начальным значением $y_2(t_{2k}) = c_{2k}\exp(\beta_2 t_{2k})$ является на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ решением линейного неоднородного уравнения

$$\dot{y}_2 = a_2(t) + f_2(t, y_1(t)), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}].$$

Это решение в силу равенств (11)–(14) и (16) имеет представление

$$y_2(t) = z_1(t) + z_2(t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}],$$

$$z_1(t) = y_2(t_{2k})e^{-\alpha(t-t_{2k})} \times \begin{cases} 1, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}), \\ c_{2k+1}(t), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}], \end{cases} \tag{17}$$

$$z_2(t) = 0, \quad t \in [t_{2k}, \eta_{2k+1}),$$

$$z_2(t) = -d_{2k+1}e^{m\beta_2 t_{2k+1}} \int\limits_{\eta_{2k+1}}^{t} c_{2k+1}^{1-m}(\tau)E(\tau,\ldots)e^{\alpha(\tau-t)+m\alpha(\tau-t_{2k+1})}\,d\tau \equiv$$

$$\equiv -d_{2k+1}e^{m\beta_2 t_{2k+1}} J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t), \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]. \tag{18}$$

При этом, согласно оценкам (9) для функций $c_k(t)$, отличных от единицы лишь на интервалах (t'_k, t_k), справедливы неравенства

$$J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t) \leqslant e^{2m\alpha}, \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}],$$

$$e^{-2m\alpha} \leqslant J_{2k+1}(\eta'_{2k+1}, t'_{2k+1}) < J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t_{2k+1}). \tag{19}$$

По определению (6) величины β_2 справедливо равенство

$$\beta_2 - (\theta - 1)\alpha = m\theta\beta_2.$$

Поэтому функция $z_1(t)$, найденная по формуле (17), принимает значение

$$z_1(t_{2k+1}) = c_{2k}\exp(m\beta_2 t_{2k+1}). \tag{20}$$

Постоянную d_{2k+1} определим из условия

$$y_2(t_{2k+1}) = z_1(t_{2k+1}) + z_2(t_{2k+1}) = \exp(\beta_1 t_{2k+1}).$$

Сравнивая значения (18) и (20), для постоянной d_{2k+1} получаем представление

$$d_{2k+1} = \frac{c_{2k} - \exp(\beta t_{2k+1})}{J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t_{2k+1})},$$

в котором величина $\beta = \beta_1 - m\beta_2$ является в соответствии с определением (6) отрицательной:

$$\beta = (\theta - m)\beta_2 - (\theta - 1)\alpha = -\alpha(1+m)\frac{\theta - 1}{m\theta - 1} < 0.$$

Поэтому для $k \geqslant k_0$: $\theta^{k_0} > m\theta/(\theta-1)^2$ постоянная d_{2k+4} будет положительной и ограниченной сверху величиной $e^{2m\alpha}$.

С учётом оценок (9) и соотношений (17)–(19) для второй компоненты $y_2(t)$ справедливы неравенства

$$|y_2(t)| = e^{2\alpha+\beta_2 t_{2k}-\alpha(t-t_{2k})} \leqslant e^{2\alpha+\beta_2 t}, \quad t \in [t_{2k}, \eta_{2k+1}),$$

поскольку $\beta_2 t > -\alpha$ в силу (6);

$$|y_2(t)| \leqslant z_1(t) + |z_2(t)| \leqslant e^{2\alpha+\beta_2 t_{2k}-\alpha(t-t_{2k})} + d_{2k+1}e^{m\beta_2 t_{2k+1}} J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t) \leqslant$$

$$\leqslant e^{4m\alpha(+\beta_2 t_{2k}-\alpha(t_{2k+1}-t_{2k}))}+e^{4m\alpha+m\beta_2 t_{2k+1}}=$$
$$=2e^{4m\alpha+m\beta_2 t_{2k+1}}\leqslant e^{4m\alpha+\beta_2 t},\quad t\in[\eta_{2k+1},t_{2k+1}],$$

так как $\beta_2<0,$ и поэтому

$$m\beta_2 t_{2k+1}<\beta_2 t_{2k+1}\leqslant\beta_2 t.$$

Для первой же компоненты $y_1(t)$ в силу оценок (9), представления (10) и определения β_1 справедливы соотношения

$$0<y_1(t)\leqslant\exp[\alpha+\beta_1 t_{2k}+\alpha(t-t_{2k})]=\exp[\alpha+\beta_2 t_{2k+1}-\alpha(t_{2k+1}-t)]\leqslant$$
$$\leqslant\exp(\alpha+\beta_2 t),\quad t\in[t_{2k},t_{2k+1}].$$

Полученные на завершающем этапе построения на отрезке $[t_{2k},t_{2k+1}]$ возмущённой системы и её решения равенства

$$y_1(t_{2k+1})=c_{2k+1}^{-1}\exp(\beta_2 t_{2k+1}),\quad y_2(t_{2k+1})=\exp(\beta_1 t_{2k+1})$$

являются начальными значениями компонент решения $y(t)$ для их построения на следующем отрезке $[t_{2k+1},t_{2k+2}]$. Они идентичны предыдущим начальным значениям (7) с заменой y_1 на y_2 и наоборот. Поэтому необходимые построения на отрезке $[t_{2k+1},t_{2k+2}]$ повторяют с указанной заменой построения на предыдущем отрезке $[t_{2k},t_{2k+1}]$.

В итоге на всем отрезке $[t_{2k},t_{2k+2}]$ построены двумерная нелинейная система с необходимым m-возмущением и её нетривиальное решение $y(t)$ с компонентами $y_1(t)$ и $y_2(t)$, принимающими значения

$$y_1(t_{2k})=e^{\beta_1 t_{2k}},\quad y_1(t_{2k+1})=c_{2k+1}^{-1}e^{\beta_2 t_{2k+1}},$$
$$y_2(t_{2k})=c_{2k}e^{\beta_2 t_{2k}},\quad y_2(t_{2k+1})=e^{\beta_1 t_{2k+1}},\quad k\geqslant k_0, \tag{21}$$

и удовлетворяющими оценкам

$$|y_i(t)|\leqslant 2\exp(4m\alpha+\beta_2 t),\quad i=1,2,\quad t\in[t_{2k},t_{2k+2}], \tag{22}$$

с числом $k_0\in\mathbb{N},$ наибольшим из определённых выше.

Методом математической индукции распространим приведённое на отрезке $[t_{2k},t_{2k+2}]$ построение нелинейной системы с m-возмущением и её решения $y(t)$ на всю полуось $t\geqslant T_0=$ $=\theta^{2k_0}$. При этом для всех $k\geqslant k_0$ сохранятся значения (21) и оценки (22) для компонент решения $y(t)$. Тем самым очевидны представления $\lambda[y]=\beta_2$ и (4) для показателя этого решения.

На отрезке $[t_0,T_0+2],$ $t_0=1,$ положим $f(t,y)\equiv 0,$ $y\geqslant 0,$ и построенное решение $y(t)$ продолжим по непрерывности на этот отрезок решением системы линейного приближения. Положим также $f(t,y)\equiv 0$ для всех $y\notin\mathbb{R}_+^2$ и $t\geqslant t_0$. Теорема доказана.

В заключение отметим очевидную бесконечную продолжимость вправо всех решений построенной возмущённой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 702–728.
2. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006.
3. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472.
4. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1589.

5. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1450–1457.
6. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1443–1453.
7. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1967.
8. *Изобов Н.А., Мазаник С.А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 2. С. 168–173.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25.06.2023 г.
После доработки 25.06.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.