

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

О ГЛАДКОСТИ ПОТЕНЦИАЛА ПУАССОНА  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. Е. А. Бадерко, К. Д. Федоров

Рассматривается решение задачи Коши в полосе на плоскости для однородной параболической системы второго порядка. Коэффициенты системы удовлетворяют двойному условию Дини. Начальная функция непрерывна и ограничена вместе со своими первой и второй производными. С помощью потенциала Пуассона исследуется характер гладкости этого решения и доказываются соответствующие оценки.

DOI: 10.31857/S0374064123120038, EDN: NUZLJI

**Введение.** В настоящей работе предметом исследования является характер гладкости решения задачи Коши в полосе  $D$  на плоскости для однородной параболической системы второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини. В силу теорем о единственности решения задачи Коши (см. [1, с. 29] и [2]) этот вопрос сводится к изучению характера гладкости потенциала Пуассона.

Если коэффициенты параболической системы удовлетворяют условию Гёльдера, то, как следует из работы [3] (см. также [1, с. 361]), для любой начальной функции из класса  $H^{2+\alpha}(\mathbb{R})$ , где  $0 < \alpha < 1$ , решение задачи Коши принадлежит классу  $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})$ .

В случае одного параболического уравнения в статье [4] установлена принадлежность потенциала Пуассона пространству  $H^{2+\omega_1, 1+\omega_2}(\overline{D})$ , где  $\omega_1, \omega_2$  – некоторые модули непрерывности. При этом предполагается, что модуль непрерывности коэффициентов уравнения удовлетворяет тройному условию Дини, начальная функция непрерывна и ограничена вместе со своими первой и второй производными, причём её вторая производная Дини-непрерывна.

Если коэффициенты параболической системы в полосе  $D$  удовлетворяют двойному условию Дини, то в [5] установлены оценки для потенциала Пуассона и его первой пространственной производной в предположении, что начальная функция непрерывна и ограничена вместе со своей первой производной.

В настоящей статье для параболической системы с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, рассматривается случай, когда начальная функция является непрерывной и ограниченной вместе со своими первой и второй производными, и доказывается теорема о принадлежности потенциала Пуассона пространству  $\hat{C}^{2,1}(\overline{D})$  (см. ниже (1)).

Заметим, что достаточно слабые условия на коэффициенты системы и на плотность потенциала Пуассона не позволяют воспользоваться известными методами исследования характера регулярности решения задачи Коши (см. [1, с. 441; 3; 4; 6]). Поэтому предлагаемый нами метод отличается от известных до сих пор и существенно опирается на свойства фундаментальных матриц решений параболических систем.

Работа состоит из трёх пунктов: в п. 1 приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения и формулируется основная теорема, в п. 2 доказываются вспомогательные утверждения, касающиеся характера гладкости фундаментальных матриц решений, п. 3 посвящён доказательству основной теоремы.

**1. Предварительные сведения и формулировка основного результата.** Через  $C^2(\mathbb{R})$  обозначим пространство (вектор-) функций  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , непрерывных и ограниченных вместе со своими первой и второй производными, с нормой

$$\|h; \mathbb{R}\|^2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |h'(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |h''(x)|.$$

Пусть  $T > 0$  фиксировано. На плоскости  $\mathbb{R}^2$  переменных  $x$  и  $t$  рассматриваем полосу

$$D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, 0 < t \leq T\}.$$

Следуя [1, с. 16], через  $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})$ ,  $0 < \alpha < 1$ , обозначим пространство (вектор-) функций  $u$ , непрерывных вместе со своими первыми по  $x$ ,  $t$  и второй по  $x$  производными в  $\overline{D}$ , для которых конечно выражение

$$\begin{aligned} \|u\|_D^{(2+\alpha)} = & \sum_{2r+s \leq 2} \sup_{(x,t) \in D} \left| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t) \right| + \sum_{2r+s=2} \left( \sup_{\substack{(x,t), (x+\Delta x, t) \in D \\ |\Delta x| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta x|^\alpha} \left| \Delta_x \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t) \right| + \right. \\ & \left. + \sup_{\substack{(x,t), (x, t+\Delta t) \in D \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{\alpha/2}} \left| \Delta_t \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t) \right| \right) + \sup_{\substack{(x,t), (x, t+\Delta t) \in D \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}} \left| \Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_x f(x, t) = f(x + \Delta x, t) - f(x, t), \quad \Delta_t f(x, t) = f(x, t + \Delta t) - f(x, t)$$

для любой функции  $f$ .

Через  $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$  обозначим пространство (вектор-) функций  $u$ , непрерывных и ограниченных вместе со своими первыми по  $x$ ,  $t$  и второй по  $x$  производными в  $\overline{D}$ , для которых конечно выражение

$$\|u; D\|^{(2)} = \sum_{2r+s \leq 2} \sup_{(x,t) \in D} \left| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t) \right| + \sup_{\substack{(x,t), (x, t+\Delta t) \in D \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{1/2}} \left| \Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|. \quad (1)$$

Заметим, что пространство  $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$  совпадает с пространством  $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})$  при подстановке в определение последнего  $\alpha = 0$ .

Под значениями (вектор-) функций и их производных на границе области понимаем их предельные значения “изнутри” области.

Для любой матрицы  $B$  (или вектора  $b$ ) под  $|B|$  (соответственно  $|b|$ ) понимаем максимум из модулей элементов  $B$  (компонент  $b$ ).

Модулем непрерывности, согласно [7, с. 150–151], называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию  $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  такую, что  $\omega(0) = 0$ .

Пусть  $\omega_0$  – модуль непрерывности, удовлетворяющий двойному условию Дини:

$$\widetilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < \infty, \quad z > 0,$$

и такой, что для некоторого  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  функция  $\nu(z) = \omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$ ,  $z > 0$ , почти убывает.

В полосе  $D$  рассмотрим равномерно параболический по Петровскому (см. [8]) оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=0}^2 A_k(x, t) \frac{\partial^k u}{\partial x^k},$$

где  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$  и  $A_k = \|a_{ijk}\|_{i,j=1}^m$ ,  $k = 0, 1, 2$ , –  $m \times m$ -матрицы, элементы которых суть вещественнозначные функции, определённые в  $\overline{D}$  и удовлетворяющие условиям:

(а) для собственных чисел  $\mu_r$  матрицы  $A_2$  выполнено  $\operatorname{Re} \mu_r(x, t) \geq \delta$  для некоторого  $\delta > 0$  и всех  $(x, t) \in \overline{D}$ ,  $r = \overline{1, m}$ ;

(б) функции  $a_{ijk}$  ограничены в  $\overline{D}$  и справедливы оценки

$$|a_{ijk}(x + \Delta x, t + \Delta t) - a_{ijk}(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2}),$$

$$(x, t), (x + \Delta x, t + \Delta t) \in \overline{D}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Пусть

$$Z(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \exp(-A_2(\xi, \tau)\sigma^2 t) d\sigma, \quad t > 0, \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad x, \xi \in \mathbb{R}.$$

Справедливы неравенства (см. [9, с. 296–297]):

$$\left| \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(l, k) t^{-(2l+k+1)/2} \exp(-cx^2/t), \quad (2)$$

$$\left| \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi + \Delta\xi, \tau) - \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(l, k) t^{-(2l+k+1)/2} \omega_0(|\Delta\xi|) \exp(-cx^2/t), \quad (3)$$

где  $t > 0$ ,  $0 \leq \tau \leq T$ ,  $x, \xi, \xi + \Delta\xi \in \mathbb{R}$ ,  $k, l \geq 0$ .

Положим  $D^* = \{(x, t; \xi, \tau) \in \overline{D} \times \overline{D} : t > \tau\}$ . Матрицу  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ ,  $(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ , называем *фундаментальной матрицей решений* (далее – ф.м.р.) системы  $Lu = 0$ , если:

- 1) функции  $\Gamma$ ,  $\partial\Gamma/\partial t$ ,  $\partial\Gamma/\partial x$ ,  $\partial^2\Gamma/\partial x^2$  непрерывны в  $D^*$ ;
- 2) для любой фиксированной пары  $(\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, T]$  столбцы матрицы  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$  являются решениями системы  $Lu = 0$  по переменным  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (\tau, T]$ ;
- 3) для любой финитной и непрерывной (вектор-) функции  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T$ , и любого фиксированного  $\tau \in [0, T]$  потенциал Пуассона

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) h(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [\tau, T],$$

является классическим ограниченным решением задачи Коши

$$Lu = 0 \quad \text{в } \mathbb{R} \times (\tau, T], \quad u(x, \tau) = h(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и в случае  $m \geq 2$  удовлетворяет условию: для любого  $t_1 \in (\tau, T)$  существует постоянная  $C_1 = C_1(t_1)$  такая, что

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq C_1, \quad k = 1, 2, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [t_1, T].$$

Из теорем единственности для решения задачи Коши (см. [1, с. 29], если  $m = 1$ , и [2], если  $m \geq 2$ ) следует единственность ф.м.р. для системы  $Lu = 0$ .

Известно (см. [10], если  $m = 1$ , и [11, 12], если  $m \geq 2$ ), что при условиях (а), (б) существует ф.м.р.  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$  системы  $Lu = 0$ , для неё выполнены оценки

$$\left| \frac{\partial^{l+k} \Gamma}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{-(2l+k+1)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad 0 \leq 2l + k \leq 2, \quad (4)$$

и, кроме того, для функции

$$W(x, t; \xi, \tau) \equiv \Gamma(x, t; \xi, \tau) - Z(x - \xi, t - \tau; \xi, \tau)$$

справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^{l+k} W}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C\tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-(2l+k+1)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad 0 \leq 2l + k \leq 2, \quad (5)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial W}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{|\Delta t|^{1/2} \tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left( -c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad (6)$$

$(x, t; \xi, \tau), (x, t + \Delta t; \xi, \tau) \in D^*, \quad 0 < \Delta t \leq t - \tau.$

Здесь и далее через  $C$  и  $c$  обозначаем положительные постоянные, зависящие от  $T, \delta, m$  и коэффициентов оператора  $L$ , конкретный вид которых для нас не важен.

Рассмотрим задачу Коши:

$$Lu = 0 \text{ в } D, \quad u(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Из свойств ф.м.р. следует, что для любой непрерывной и ограниченной (вектор-) функции  $h$  классическим решением задачи (7) является потенциал Пуассона

$$Ph(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T, \quad (8)$$

и имеет место оценка

$$|Ph(x, t)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|, \quad (x, t) \in \overline{D}.$$

Если  $m = 1$ , то (8) является единственным классическим решением задачи (7) в классе непрерывных и ограниченных функций (см. [1, с. 29]). Если  $m \geq 2$ , то (8) является единственным классическим решением задачи (7) в пространстве непрерывных и ограниченных функций, пространственные производные первого и второго порядков которых непрерывны и ограничены в каждом слое  $\mathbb{R} \times [t_1, T]$ ,  $t_1 \in (0, T]$  (см. [2]). Поэтому исследование решения задачи Коши (7) сводится к изучению свойств потенциала Пуассона (8).

Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** Пусть выполнены условия (a), (b). Тогда для любой функции  $h \in C^2(\mathbb{R})$  потенциал Пуассона (8) принадлежит пространству  $\hat{C}^{2,1}(\overline{D})$  и справедлива оценка

$$\|Ph; D\|^{(2)} \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2,$$

при этом

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,t) \in D}} \frac{\partial^k Ph}{\partial x^k}(x, t) = h^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \quad (9)$$

причём стремление к пределу равномерно по  $x_0 \in \mathbb{R}$ , если  $k = 0, 1$ , и стремление к пределу равномерно по  $x_0 \in [-d, d]$  для любого  $d > 0$ , если  $k = 2$ .

**2. Фундаментальные матрицы решений.** Для операторов

$$L_0 u = \frac{\partial u}{\partial t} - A_2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad L_1 u = \frac{\partial u}{\partial t} - A_2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_1(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}$$

соответствующие ф.м.р.  $\Gamma_i(x, t; \xi, \tau)$ ,  $i = 0, 1$ , имеют вид

$$\Gamma_i(x, t; \xi, \tau) = Z(x - \xi, t - \tau; \xi, \tau) + W_i(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*. \quad (10)$$

Слагаемые  $W_i$  в (10) удовлетворяют оценкам (5), (6).

Из единственности решения задачи Коши для параболических систем (см. [2]) следует, что справедливы равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - z) \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) d\xi = (x - z) E, \quad x, z \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad (11)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; \xi, \tau) d\xi = E, \quad (x, t) \in \overline{D}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad (12)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Ф.м.р.  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$  и  $\Gamma_1(x, t; \xi, \tau)$  систем  $Lu = 0$  и  $L_1u = 0$ , соответственно, могут быть представлены в виде

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_1(x, t; \xi, \tau) + W_2(x, t; \xi, \tau), \quad (13)$$

$$\Gamma_1(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) + W_3(x, t; \xi, \tau), \quad (14)$$

где

$$W_2(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (15)$$

$$W_3(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (16)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ .

Установим свойства функций  $W_2$ ,  $W_3$ , которые будем использовать в дальнейшем.

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия (a), (b). Тогда имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^k W_2}{\partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{(1-k)/2} \exp \left( -c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad k = 0, 1, \quad (17)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{(\Delta t)^{1/2}}{(t - \tau)^{1/2}} \exp \left( -c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad (18)$$

$(x, t; \xi, \tau), (x, t + \Delta t; \xi, \tau) \in D^*$ ,  $0 < \Delta t \leq t - \tau$ ;

$$\left| \frac{\partial^k W_3}{\partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{-k/2} \exp \left( -c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad k = 0, 1, \quad (19)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial W_3}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{(\Delta t)^{1/2}}{t - \tau} \exp \left( -c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad (20)$$

$(x, t; \xi, \tau), (x, t + \Delta t; \xi, \tau) \in D^*$ ,  $0 < 2\Delta t \leq t - \tau$ .

**Доказательство.** Из определения (15) сразу получаем оценку (17):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k W_2}{\partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| &\leq C(t - \tau)^{-1/2} \exp \left( -c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right) \int_{\tau}^t (t - \eta)^{-k/2} d\eta \leq \\ &\leq C(t - \tau)^{(1-k)/2} \exp \left( -c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

Докажем неравенство (18). Пусть  $0 < \Delta t \leq t - \tau$ . Положим

$$\Delta_t \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t + \Delta t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-\Delta t}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\
& + \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy \equiv \\
& \equiv I_1(x, t, \Delta t, \tau) - I_2(x, t, \Delta t, \tau) + I_3(x, t, \Delta t, \tau).
\end{aligned}$$

Интегралы  $I_1$  и  $I_2$  оцениваются аналогичным образом. Оценим, например,  $I_2$ :

$$\begin{aligned}
|I_2(x, t, \Delta t, \tau)| & \leq C(t - \tau)^{-1/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right) \int_{t-\Delta t}^t \frac{d\eta}{(t - \eta)^{1/2}} \leq \\
& \leq C(\Delta t)^{1/2} (t - \tau)^{-1/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right).
\end{aligned}$$

Оценим  $I_3$ . Из представления

$$\begin{aligned}
I_3(x, t, \Delta t, \tau) & = \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial Z}{\partial x}(x - y, t - \eta; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\
& + \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial W}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy
\end{aligned}$$

и оценок (2), (6) следует неравенство

$$\begin{aligned}
|I_3(x, t, \Delta t, \tau)| & \leq C \frac{(\Delta t)^{1/2}}{(t - \tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right) \int_{\tau}^{t-\Delta t} \left( \frac{(\Delta t)^{1/2}}{(t - \eta)^{3/2}} + \frac{\tilde{\omega}_0((t - \eta)^{1/2})}{t - \eta} \right) d\eta \leq \\
& \leq C \left( 1 + \tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2}) \right) (\Delta t)^{1/2} (t - \tau)^{-1/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right).
\end{aligned}$$

Оценку (19) сразу получаем из определения (16):

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^k W_3}{\partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| & \leq C(t - \tau)^{-1/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right) \int_{\tau}^t (t - \eta)^{-k/2} (\eta - \tau)^{-1/2} d\eta \leq \\
& \leq C(t - \tau)^{-k/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad k = 0, 1.
\end{aligned}$$

Наконец, докажем неравенство (20). Пусть  $0 < 2\Delta t \leq t - \tau$ . Положим

$$\begin{aligned}
\Delta_t \frac{\partial W_3}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) & = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x, t + \Delta t; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy - \\
& - \int_{t-\Delta t}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy \equiv \\
& \equiv J_1(x, t, \Delta t, \tau) - J_2(x, t, \Delta t, \tau) + J_3(x, t, \Delta t, \tau).
\end{aligned}$$

Оценим интеграл  $J_2$  (интеграл  $J_1$  оценивается аналогично):

$$|J_2(x, t, \Delta t, \tau)| \leq \frac{C}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{t-\Delta t}^t \frac{d\eta}{(t-\eta)^{1/2}} \leq \frac{C(\Delta t)^{1/2}}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right).$$

Из представления

$$\begin{aligned}
J_3(x, t, \Delta t, \tau) = & \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial Z}{\partial x}(x-y, t-\eta; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\
& + \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial W_1}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy
\end{aligned}$$

и оценок (2), (6) следует неравенство для интеграла  $J_3$ :

$$\begin{aligned}
|J_3(x, t, \Delta t, \tau)| \leq & C \frac{(\Delta t)^{1/2}}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \left( \int_{(t+\tau)/2}^t + \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} \right) \left( \frac{(\Delta t)^{1/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}} + \right. \\
& \left. + \frac{\tilde{\omega}_0((t-\eta)^{1/2})}{(t-\eta)(\eta-\tau)^{1/2}} \right) d\eta \leq C \left( 1 + \tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2}) \right) \frac{(\Delta t)^{1/2}}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия (a), (b). Тогда имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq \frac{C}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad (21)$$

$$\left| \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq \frac{C}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad (22)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$ , и предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \tau+0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) d\xi = 0, \quad (23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \tau+0} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) d\xi = 0, \quad (24)$$

$x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \in [0, T)$ , причём сходимость равномерна по  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \in [0, T)$ .

**Доказательство.** Докажем оценку (21). Имеет место представление

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x-y, t-\eta; x, \eta) [A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) -$$

$$\begin{aligned}
& -A_0(x, \eta)\Gamma_1(x, \eta; \xi, \tau)] dy + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x-y, t-\eta; y, \eta) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x-y, t-\eta; x, \eta) \right] A_0(y, \eta)\Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\
& + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta)\Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy \equiv I_1(x, t; \xi, \tau) + I_2(x, t; \xi, \tau) + I_3(x, t; \xi, \tau).
\end{aligned}$$

Рассмотрим  $I_1$ :

$$\begin{aligned}
I_1(x, t; \xi, \tau) &= \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x-y, t-\eta; x, \eta)[A_0(y, \eta) - A_0(x, \eta)]\Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\
&+ \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x-y, t-\eta; x, \eta)A_0(x, \eta)[\Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) - \Gamma_1(x, \eta; \xi, \tau)] dy \equiv \\
&\equiv I_{11}(x, t; \xi, \tau) + I_{12}(x, t; \xi, \tau).
\end{aligned}$$

Оценим  $I_{11}$ . Из условия (b) получаем

$$\begin{aligned}
|I_{11}(x, t; \xi, \tau)| &\leq C(t-\tau)^{-1/2} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t \frac{\omega_0((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} d\eta \leq \\
&\leq C\frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right).
\end{aligned} \tag{25}$$

Оценим  $I_{12}$ . Из представления

$$I_{12}(x, t; \xi, \tau) = - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Z}{\partial y}(x-y, t-\eta; x, \eta)A_0(x, \eta)\frac{\partial \Gamma_1}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy \tag{26}$$

следует неравенство

$$|I_{12}(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t-\tau)^{-1/2} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right).$$

Рассмотрим  $I_2$ . Из оценки (3) имеем

$$\begin{aligned}
|I_2(x, t; \xi, \tau)| &\leq C(t-\tau)^{-1/2} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t \frac{\omega_0((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} d\eta \leq \\
&\leq C\frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

Из оценки (5) следует неравенство для интеграла  $I_3$ :

$$|I_3(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t-\tau)^{-1/2} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t \frac{\tilde{\omega}_0((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} d\eta \leq$$



$$\leq C \frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right). \quad (28)$$

Из оценок для интегралов  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  получаем неравенство (21).

Докажем предельное соотношение (23). Рассмотрим  $I_{12}$ . Из представления (26), теоремы Фубини (см., например, [13, с. 453–455; 14, с. 160–161]) и равенства (12) имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{12}(x, t; \xi, \tau) d\xi = - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Z}{\partial y}(x-y, t-\eta; x, \eta) A_0(x, \eta) dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) d\xi = 0,$$

$x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \tau < t \leq T$ . Отсюда и из оценок (25), (27), (28) следует соотношение (23).

Далее докажем оценку (22). В силу равенства (12) имеет место представление

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) &= \int_{(t+\tau)/2}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) \right) A_1(x, \eta) \left[ \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial x}(x, \eta; \xi, \tau) \right] dy + \\ &+ \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) \right) A_1(x, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\ &+ \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) \right) [A_1(y, \eta) - A_1(x, \eta)] \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy \equiv \\ &\equiv J_1(x, t; \xi, \tau) + J_2(x, t; \xi, \tau) + J_3(x, t; \xi, \tau). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} |J_1(x, t; \xi, \tau)| &\leq C(t-\tau)^{-3/2} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t \frac{d\eta}{(t-\eta)^{1/2}} \leq \frac{C}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \\ |J_2(x, t; \xi, \tau)| &\leq C(t-\tau)^{-3/2} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t \frac{d\eta}{(\eta-\tau)^{1/2}} \leq \frac{C}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \\ |J_3(x, t; \xi, \tau)| &\leq \frac{C}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t \frac{\omega_0((t-\eta)^{1/2})}{(t-\eta)(\eta-\tau)^{1/2}} d\eta \leq \\ &\leq C \frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Из оценок для интегралов  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  получаем неравенство (22).

Наконец, докажем предельное соотношение (24). Из теоремы Фубини и равенств (11), (12) заключаем, что

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) J_1(x, t; \xi, \tau) d\xi = \\ &= \int_{(t+\tau)/2}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) A_1(x, \eta) dy \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \left[ \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial x}(x, \eta; \xi, \tau) \right] d\xi = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) J_2(x, t; \xi, \tau) d\xi &= \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) A_1(x, \eta) dy \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) d\xi = \\ &= \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) A_1(x, \eta) dy = 0, \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \tau < t \leq T$ . Отсюда и из оценки (29) следует соотношение (24). Лемма доказана.

**3. Доказательство теоремы.** Достаточно установить следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial^k Ph}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \quad (30)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t) \right| \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2 |\Delta t|^{1/2}, \quad (31)$$

где  $(x, t), (x, t + \Delta t) \in D$ , и, в силу непрерывности  $h, h', h''$ , предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial^k Ph}{\partial x^k}(x, t) = h^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \quad (32)$$

в которых сходимость равномерна по  $x \in \mathbb{R}$ , если  $k = 0, 1$ , и равномерна по  $x \in [-d, d]$  для любого  $d > 0$ , если  $k = 2$ .

Из представления (см. (12), (13))

$$Ph(x, t) = h(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; \xi, 0) (h(\xi) - h(x)) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi$$

и оценок (4), (17) сразу следуют неравенство (30) и предельное соотношение (32) при  $k = 0$ .

Из представления (см. (11)–(14))

$$\begin{aligned} \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t; \xi, 0) \right) (h(\xi) - h(x) - h'(x)(\xi - x)) d\xi + \\ &+ \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, 0) d\xi \right) h(x) + h'(x) + \\ &+ \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \left( \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, 0) + \frac{\partial W_3}{\partial x}(x, t; \xi, 0) \right) d\xi \right) h'(x), \end{aligned} \quad (33)$$

неравенства

$$|h(\xi) - h(x) - h'(x)(\xi - x)| \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2 |\xi - x|^2$$

и оценок (4), (17), (19) следуют неравенство (30) и предельное соотношение (32) при  $k = 1$ .

Далее докажем (30) и (32) для  $k = 2$ . Имеет место представление (см. (11)–(14))

$$\frac{\partial^2 Ph}{\partial x^2}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) \right) (h(\xi) - h(x) - h'(x)(\xi - x)) d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) d\xi \right) h(x) + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \left( \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) \right) d\xi \right) h'(x) \equiv I_1(x, t) + I_2(x, t) + I_3(x, t), \quad (x, t) \in D.
\end{aligned}$$

Из неравенства

$$|I_1(x, t)| \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\xi - x|^2}{t^{3/2}} \exp \left( -c \frac{(x - \xi)^2}{t} \right) d\xi \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2$$

и оценок (21), (22) следует (30) при  $k = 2$ .

Докажем (32) для  $k = 2$ . Из оценки (21) и предельных соотношений (23), (24) получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} I_k(x, t) = 0, \quad k = 2, 3, \quad (34)$$

причём стремление к пределу равномерно по  $x \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим  $I_1$ . Пользуясь равенством

$$\begin{aligned}
h(\xi) - h(x) - h'(x)(\xi - x) &= \frac{h''(x + \Theta(\xi - x))}{2} (\xi - x)^2, \\
\Theta &= \Theta(x, \xi) \in (0, 1),
\end{aligned} \quad (35)$$

перепишем  $I_1$  в виде

$$\begin{aligned}
I_1(x, t) &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) d\xi \right) \frac{h''(x)}{2} + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) (h''(x + \Theta(\xi - x)) - h''(x)) d\xi \equiv I_{11}(x, t) + I_{12}(x, t).
\end{aligned}$$

Рассмотрим  $I_{11}$ :

$$\begin{aligned}
I_{11}(x, t) &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2}(x - \xi, t; A_2(x, 0)) d\xi \right) \frac{h''(x)}{2} + \\
&+ \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^2 \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x - \xi, t; A_2(\xi, 0)) - \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2}(x - \xi, t; A_2(x, 0)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) \right) d\xi \right) \frac{h''(x)}{2} = h''(x) + \hat{I}_{11}(x, t).
\end{aligned}$$

Из оценок (3), (5) следует неравенство  $|\hat{I}_{11}(x, t)| \leq C \tilde{\omega}_0(t^{1/2})$ , из которого имеем

$$\lim_{t \rightarrow +0} \hat{I}_{11}(x, t) = 0,$$

причём стремление к пределу равномерно по  $x \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим  $I_{12}$ . Зафиксируем произвольно  $d > 0$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно. Обозначим модуль непрерывности функции  $h''$  на отрезке  $[-2d, 2d]$  через  $\omega_{h'', 2d}$ , а именно, полагаем

$$\omega_{h'', 2d}(z) = \sup_{\substack{|\Delta x| \leq z \\ x, x+\Delta x \in [-2d, 2d]}} |h''(x + \Delta x) - h''(x)|.$$

Тогда выполняется неравенство (см. (35))

$$|h''(x + \Theta(\xi - x)) - h''(x)| \leq \omega_{h'', 2d}(\delta), \quad \text{если } x \in [-d, d], \quad |\xi - x| \leq \delta < d.$$

Отсюда, из представления

$$I_{12}(x, t) = \frac{1}{2} \left( \int_{|\xi-x| \leq \delta} + \int_{|\xi-x| > \delta} \right) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) (h''(x + \Theta(\xi - x)) - h''(x)) (\xi - x)^2 d\xi$$

и оценки (4) следует неравенство

$$|I_{12}(x, t)| \leq C(\omega_{h'', 2d}(\delta) + \exp(-c\delta^2/t)),$$

из которого, выбирая последовательно достаточно малое  $\delta = \delta(\varepsilon, d) > 0$  и затем достаточно малое  $t = t(\delta) > 0$ , получаем

$$|I_{12}(x, t)| \leq \varepsilon.$$

Таким образом,  $\lim_{t \rightarrow +0} I_{12}(x, t) = 0$  и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow +0} I_1(x, t) = h''(x),$$

причём сходимость равномерна на  $[-d, d]$ . Отсюда и из (34) следует равенство (32) при  $k = 2$ .

Наконец, докажем оценку (31). Не ограничивая общности, считаем  $\Delta t > 0$ . В случае  $2\Delta t \geq t > 0$  неравенство (31) следует из представления (33) и оценок (4), (17), (19):

$$\begin{aligned} \left| \Delta_t \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t) \right| &\leq \left| \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t + \Delta t) - h'(x) \right| + \left| \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t) - h'(x) \right| \leq \\ &\leq C \|h; \mathbb{R}\|^2 (|t + \Delta t|^{1/2} + |t|^{1/2}) \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2 |\Delta t|^{1/2}. \end{aligned}$$

В случае  $0 < 2\Delta t \leq t$  неравенство (31) следует из представления (см. (33))

$$\begin{aligned} \Delta_t \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \left( \frac{\partial Z}{\partial x}(x - \xi, t; A_2(\xi, 0)) \right) (h(\xi) - h(x) - h'(x)(\xi - x)) d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \left( \frac{\partial W}{\partial x}(x, t; \xi, 0) \right) (h(\xi) - h(x) - h'(x)(\xi - x)) d\xi + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, 0) d\xi \right) h(x) + \\ &+ \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \left( \Delta_t \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, 0) + \Delta_t \frac{\partial W_3}{\partial x}(x, t; \xi, 0) \right) d\xi \right) h'(x) \end{aligned}$$

и оценок (2), (6), (18), (20). Теорема доказана.

**Замечание.** Из доказательства теоремы следует, что если функция  $h''$  ограничена и равномерно непрерывна, то сходимость в предельном соотношении (9) равномерна по  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.
3. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
4. *Камынин Л.И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.
5. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333–1343.
6. *Arnese G.* Su alcune proprietà dell'integrale di Poisson relativo ad una equazione parabolica di ordine  $2m$  a coefficienti non costanti // Ann. di Mat. Pura ed Appl. 1971. V. 91. № 1. P. 1–16.
7. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
8. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секция А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
9. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
10. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для  $2p$ -параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
11. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНТИ РАН. 16.04.92. № 1294-B92.
12. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1992.
13. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. М., 2008.
14. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.; Ижевск, 2020.

Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова,  
Московский центр фундаментальной  
и прикладной математики

Поступила в редакцию 16.09.2023 г.  
После доработки 16.09.2023 г.  
Принята к публикации 11.10.2023 г.