ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 12, с. 1641–1653

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ И УСЛОВИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

© 2023 г. С. И. Сахаров

Рассмотрены начально-краевые задачи для однородных параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, с нулевыми начальными условиями в полуограниченной плоской области с негладкой боковой границей. Методом граничных интегральных уравнений доказана теорема об однозначной классической разрешимости таких задач в пространстве функций, непрерывных вместе со своей пространственной производной первого порядка в замыкании области. Дано интегральное представление полученных решений. Показано, что рассматриваемое в работе условие разрешимости поставленных задач эквивалентно известному условию дополнительности.

DOI: 10.31857/S0374064123120051, EDN: NVAUBL

Введение. Теория однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем общего вида с гёльдеровскими коэффициентами в пространствах $H^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$, $k \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$, в областях с гладкими боковыми границами построена в работе [1] (см. также [2, с. 705]). Особый интерес указанные задачи представляют в случае областей с негладкими боковыми границами, допускающими, в частности, “клювы”. В случае параболических систем с гёльдеровскими коэффициентами первая и вторая начально-краевые задачи в плоских областях с негладкими боковыми границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$ рассматривались в статьях [3–8]. В случае параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в [9–14] доказаны теоремы о существовании и единственности решений из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ первой, второй и смешанной начально-краевых задач в областях с боковыми границами из класса $H^{1/2+\omega}$, где ω удовлетворяет условию Дини.

Естественно возникает вопрос об исследовании начально-краевых задач для параболических систем в областях с негладкими боковыми границами, на которых задаются граничные условия общего вида. В настоящей работе доказана однозначная классическая разрешимость в пространстве $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ начально-краевых задач общего вида для однородных параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, с нулевыми начальными условиями в полуограниченной области с боковой границей из класса Дини–Гёльдера $H^{1/2+\omega}$, где ω удовлетворяет условию Дини. Коэффициенты в граничных условиях являются постоянными. Показано, что рассматриваемое в данной статье условие разрешимости поставленных задач эквивалентно известному условию дополнительности (см. [2, с. 700; 15, с. 360]). Построен пример, иллюстрирующий тот факт, что в общем случае это условие может не выполняться. Приведён алгоритм вычислений, связанный с проверкой выполнения указанного условия разрешимости.

Работа состоит из четырёх пунктов. В п. 1 приводятся необходимые определения и формулируются основные результаты. В п. 2 доказывается теорема об однозначной разрешимости в пространстве $C[0,T]$ систем граничных интегральных уравнений, которые индуцируются граничными условиями поставленных задач. Доказательству основной теоремы об однозначной разрешимости рассматриваемых задач посвящён п. 3. В п. 4 доказывается эквивалентность условия разрешимости из основной теоремы и известного условия дополнительности, кроме того, строится пример, показывающий, что в общем случае это условие может не выполняться, а также приводится алгоритм вычислений, связанный с проверкой выполнения указанного условия.

1. Необходимые сведения и формулировка основного результата. Следуя [16, с. 151], *модулем непрерывности* называем непрерывную неубывающую полуаддитивную функцию $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, для которой $\omega(0) = 0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\widetilde{\omega}(z) = \int\limits_0^z y^{-1}\omega(y)\,dy < +\infty, \quad z > 0. \tag{1}$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим множество модулей непрерывности, удовлетворяющих условию Дини (1).

Пусть $T > 0$ – фиксированное число. Через $C[0,T]$ обозначим пространство непрерывных на отрезке $[0,T]$ вектор-функций с нормой $\|\psi;[0,T]\|^0 = \max\limits_{t\in[0,T]}|\psi(t)|$. Положим $\underset{0}{C}[0,T] = \{\psi \in C[0,T] : \psi(0) = 0\}$.

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Пусть ω – некоторый модуль непрерывности. Введём пространства

$$H^{q+\omega}[0,T] = \left\{\psi \in C[0,T] : \|\psi;[0,T]\|^{q+\omega} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \sup_{\substack{t,t+\Delta t\in(0,T)\\ \Delta t\neq 0}} \frac{|\Delta_t\psi(t)|}{|\Delta t|^q\omega(|\Delta t|^{1/2})} < \infty\right\},$$

$$\underset{0}{H}^{q+\omega}[0,T] = \{\psi \in H^{q+\omega}[0,T] : \psi(0) = 0\}, \quad q = 0, 1/2,$$

где $\Delta_t\psi(t) = \psi(t+\Delta t) - \psi(t)$.

Пусть

$$\partial^{1/2}\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\varphi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка 1/2. Следуя [3, 4], введём пространство

$$\underset{0}{C}^{1/2}[0,T] = \{\psi \in \underset{0}{C}[0,T] : \partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T], \ \ \|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^0 < \infty\}.$$

Функция $\nu(z)$, $z \geqslant 0$, называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $\nu(z_1) \leqslant C\nu(z_2)$, $z_1 \geqslant z_2 \geqslant 0$.

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T)\}$ выделим область $\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$, где g удовлетворяет условию

$$g \in H^{1/2+\omega_1}[0,T], \quad \omega_1 \in \mathcal{D}, \tag{2}$$

причём для некоторого $\varepsilon_1 \in (0,1)$ функция $z^{-\varepsilon_1}\omega_1(z)$, $z > 0$, почти убывает.

Через $C^0(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных в $\overline{\Omega}$ вектор-функций u с нормой $\|u;\Omega\|^0 = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega}|u(x,t)|$.

Под значениями функций и их производных на границе произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ понимаем их предельные значения "изнутри" Ω.

Положим $C^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : \partial_x u \in C^0(\overline{\Omega})\}$, $\|u;\Omega\|^{1,0} = \sum_{l=0}^1 \|\partial_x^l u;\Omega\|^0$, $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}) : \partial_x^l u(x,0) = 0,\ l = 0,1\}$.

Пусть число $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, зафиксировано. Рассмотрим в полосе D равномерно параболический по Петровскому (см. [17]) оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{l=0}^2 A_l(x,t)\partial_x^l u, \quad u = (u_1,\ldots,u_m)^{\mathrm{т}},$$

где $A_l = \|a_{jkl}\|$ – $m \times m$-матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определённые и ограниченные в $\overline{D}$, и выполнены условия:

(a) собственные числа μ_r, $r = \overline{1,m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}$;

(b) $|a_{jkl}(x+\Delta x, t+\Delta t) - a_{jkl}(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, $(x+\Delta x, t+\Delta t), (x,t) \in \overline{D}$, где ω_0 – модуль непрерывности, удовлетворяющий двойному условию Дини

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int\limits_0^z y^{-1}\,dy \int\limits_0^y x^{-1}\omega_0(x)dx < +\infty, \quad z > 0,$$

причём для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ функция $z^{-\varepsilon_0}\omega_0(z)$, $z > 0$, почти убывает.

Пусть

$$Z(x,t;A_2(\xi,\tau)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\exp\{-y^2A_2(\xi,\tau)t\}\,dy, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty), \quad (\xi,\tau) \in \overline{D}. \tag{3}$$

Обозначим $D^* = \{(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}\times\overline{D} : t > \tau\}$. Известно (см. [18]), что при выполнении условий (a) и (b) у системы $Lu = 0$ существует фундаментальная матрица решений $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, справедливы оценки

$$|\partial_t^k\partial_x^l\Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \quad 2k+l \leqslant 2,$$

и, кроме того, для разности

$$W(x,t;\xi,\tau) \equiv \Gamma(x,t;\xi,\tau) - Z(x-\xi,t-\tau;A_2(\xi,\tau)), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \tag{4}$$

выполнены оценки

$$|\partial_t^k\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \quad 2k+l \leqslant 2,$$

$$|\Delta_t\partial_x W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\Delta t)^{1/2}(t-\tau)^{-3/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},$$

$(x,t;\xi,\tau), (x,t+\Delta t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 < \Delta t \leqslant t-\tau$.

Пусть $m_j \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $j = 0,1$, и $m_0 + m_1 = m$, и пусть заданы $m_0 \times m$-матрица $B_0 = \|b_{jk0}\|$ и $m_1 \times m$-матрицы $B_1 = \|b_{jk1}\|$, $\hat{B}_1 = \|\hat{b}_{jk1}\|$, где b_{jk0}, b_{jk1}, $\hat{b}_{jk1}$ – вещественные числа.

Рассмотрим задачу о нахождении вектор-функции $u \in \underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$, являющейся классическим решением системы

$$Lu(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{5}$$

удовлетворяющей начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0), \tag{6}$$

и граничным условиям

$$B_0u(g(t),t) = \psi_0(t), \tag{7}$$

$$B_1\partial_x u(g(t),t) + \hat{B}_1u(g(t),t) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Положим

$$A(t) = A_2(g(t),t), \quad M(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-y^2A(t)\}\,dy, \tag{9}$$

$$G(t) = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 M(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T]. \tag{10}$$

Заметим, что из равенства (см. [19]) $M^2(t) = (A(t))^{-1}$, $t \in [0, T]$, следует, что

$$\det M(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]. \tag{11}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (a), (b), (2) и, кроме того,*

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]. \tag{12}$$

Тогда для любых вектор-функций $\psi_0 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0, T]$ *и* $\psi_1 \in \underset{0}{C}[0, T]$ *существует единственное классическое решение* $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи (5)–(8) и справедлива оценка*

$$\|u; \Omega\|^{1,0} \leqslant C\{\|\psi_0; [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_1; [0, T]\|^0\}. \tag{13}$$

При этом для решения $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи (5)–(8) справедливо интегральное представление в виде векторного параболического потенциала простого слоя*

$$u(x, t) = \int\limits_0^t \Gamma(x, t; g(\tau), \tau)\varphi(\tau)\, d\tau, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}, \tag{14}$$

где $\varphi \in \underset{0}{C}[0, T]$ *– единственное в пространстве* $C[0, T]$ *решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода*

$$B_0 \int\limits_0^t \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau)\varphi(\tau)\, d\tau = \psi_0(t), \tag{15}$$

$$-\frac{1}{2}B_1(A(t))^{-1}\varphi(t) + \int\limits_0^t [B_1 \partial_x \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) +$$
$$+ \hat{B}_1 \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau)]\varphi(\tau)\, d\tau = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]. \tag{16}$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T, m, коэффициентов оператора L, элементов матриц B_j, $j = 0, 1$, $\hat{B}_1$ и модуля непрерывности ω_1.

Замечание 1. Пусть E – единичная $m \times m$-матрица. Для первой начально-краевой задачи $(m_0 = m,\ B_0 = E)$ и второй начально-краевой задачи $(m_1 = m,\ B_1 = E,\ \hat{B}_1 = 0)$ теорема 1 следует из [9, 10, 13].

В настоящей работе также проверяется, что условие (12) эквивалентно известному (см. [2, с. 700; 15, с. 360]) условию дополнительности: для произвольно фиксированных чисел $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$, и $t \in [0, T]$

$$\det \begin{pmatrix} B_0 \int\limits_{\gamma^+(p,t)} (pE + y^2 A(t))^{-1}\, dy \\ B_1 \int\limits_{\gamma^+(p,t)} y(pE + y^2 A(t))^{-1}\, dy \end{pmatrix} \neq 0, \tag{17}$$

где $\gamma^+(p, t)$ – произвольный простой замкнутый контур, содержащийся в полуплоскости $\{\operatorname{Im} y > 0\}$ и охватывающий корни уравнения $\det(pE + y^2 A(t)) = 0$, имеющие положительную мнимую часть (здесь и далее обход кривых, по которым ведётся интегрирование, предполагается направленным против часовой стрелки). А именно, доказывается следующая

Теорема 2. *Если выполняется условие (a), то условие (12) имеет место тогда и только тогда, когда выполняется условие (17).*

Из теоремы 2 следует, в частности, что для первой и второй начально-краевых задач условие (17) выполнено. Для первой начально-краевой задачи это было ранее показано в монографии [2, с. 715], для второй – в работах [10, 13].

В общем случае условие (12) может не выполняться. Соответствующий пример приводится ниже в п. 4.

Заметим, что если известна такая матрица $F(t)$, $t \in [0,T]$, что $\overline{A}(t) = F^{-1}(t)A(t)F(t)$, $t \in [0,T]$, где $\overline{A}$ – жорданова форма матрицы A, то элементы матрицы G из условия (12) могут быть легко вычислены. Алгоритм такого вычисления приводится в п. 4. В некоторых случаях вычисление элементов матрицы G можно провести даже если матрица F неизвестна (см. п. 4).

2. Система граничных интегральных уравнений. Приведём сведения, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 1 [20]. *Пусть* $\omega \in \mathcal{D}$. *Тогда* $\partial^{1/2}$ *является ограниченным оператором из пространства* $\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$ *в пространство* $\underset{0}{H}^{\widetilde{\omega}}[0,T]$.

Следуя А.Н. Тихонову (см. [21]), назовём оператор $K : C[0,T] \to C[0,T]$ *вольтерровым*, если для любого $t \in [0,T]$ из равенства $\varphi_1 = \varphi_2$ на $[0,t]$ следует, что $K\varphi_1 = K\varphi_2$ на $[0,t]$.

Лемма 2 [22]. *Пусть* ω *– некоторый модуль непрерывности и* $K : C[0,T] \to \underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$ *– линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда для любой вектор-функции* $\psi \in C[0,T]$ *уравнение* $\varphi + K\varphi = \psi$ *имеет единственное решение* $\varphi \in C[0,T]$ *и справедлива оценка*

$$\|\varphi; [0,T]\|^0 \leqslant C\|\psi; [0,T]\|^0.$$

Докажем, что справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (a), (b), (2) и (12). Тогда для любых вектор-функций* $\psi_0 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ *и* $\psi_1 \in \underset{0}{C}[0,T]$ *система (15), (16) имеет единственное в пространстве* $C[0,T]$ *решение* $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ *и справедлива оценка*

$$\|\varphi; [0,T]\|^0 \leqslant C\{\|\psi_0; [0,T]\|^{1/2} + \|\psi_1; [0,T]\|^0\}. \tag{18}$$

Замечание 2. Для первой и второй начально-краевых задач теорема 3 доказана в работах [9] и [10] соответственно.

Доказательство теоремы 3. Полагая (см. (4))

$$N_0(t,\tau) = B_0[Z(g(t)-g(\tau), t-\tau; A(\tau)) - Z(0, t-\tau; A(\tau)) + W(g(t), t; g(\tau), \tau)],$$

$$N_1(t,\tau) = B_1\partial_x\Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) + \hat{B}_1\Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T,$$

систему (15), (16) можно записать в виде

$$\int\limits_0^t B_0 Z(0, t-\tau; A(\tau))\varphi(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t N_0(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \psi_0(t), \tag{19}$$

$$-\frac{1}{2}B_1(A(t))^{-1}\varphi(t) + \int\limits_0^t N_1(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \psi_1(t), \quad t \in [0,T]. \tag{20}$$

Пусть оператор дробного интегрирования действует на функцию $\varphi \in C[0,T]$ по формуле

$$I^{1/2}\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\varphi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T].$$

В силу (3) и (9)

$$Z(0,t-\tau;A(\tau)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}M(\tau), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T,$$

поэтому уравнение (19) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}B_0 I^{1/2}(M\varphi)(t) + \int\limits_0^t N_0(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \psi_0(t), \quad t \in [0,T]. \tag{21}$$

Введём операторы H_l, $l = 0,1$, действующие на функцию $\varphi \in C[0,T]$, по формулам

$$(H_l\varphi)(t) = \int\limits_0^t N_l(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T],$$

и запишем систему (21), (20) в операторном виде

$$\frac{1}{2}B_0 I^{1/2}(M\varphi) + H_0\varphi = \psi_0, \tag{22}$$

$$-\frac{1}{2}B_1 A^{-1}\varphi + H_1\varphi = \psi_1. \tag{23}$$

Положим $\omega_2(z) = \widetilde{\omega}_0(z) + \omega_1(z)$, $z \geqslant 0$. Из [9, 10] следует, что H_0 – ограниченный оператор из $C[0,T]$ в $\underset{0}{H}{}^{1/2+\omega_2}[0,T]$ и H_1 – ограниченный оператор из $C[0,T]$ в $\underset{0}{H}{}^{\widetilde{\omega}_2}[0,T]$.

Применив к обеим частям уравнения (22) оператор дробного дифференцирования $\partial^{1/2}$, в силу приведённых свойств операторов H_l, $l = 0,1$, леммы 1 и справедливых для $\chi \in C[0,T]$, $\psi \in C^{1/2}[0,T]$ равенств $\partial^{1/2}I^{1/2}\chi = \chi$, $I^{1/2}\partial^{1/2}\psi = \psi$, получим систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода, эквивалентную (22), (23) для $\varphi \in C[0,T]$:

$$B_0 M\varphi + K_0\varphi = 2\partial^{1/2}\psi_0, \tag{24}$$

$$B_1 A^{-1}\varphi + K_1\varphi = -2\psi_1, \tag{25}$$

где $K_0 = 2\partial^{1/2}H_0$, $K_1 = -2H_1$.

Положим

$$K = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 2\partial^{1/2}\psi_0 \\ -2\psi_1 \end{pmatrix}.$$

В силу (11) и (12) систему (24), (25) можно записать как

$$\varphi + \hat{K}\varphi = \hat{\psi}, \tag{26}$$

где $\hat{K} = (GM)^{-1}K$, $\hat{\psi} = (GM)^{-1}\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$. Из свойств операторов H_l, $l = 0,1$, и леммы 1 следует, что $\hat{K} : C[0,T] \to \underset{0}{H}{}^{\widetilde{\omega}_2}[0,T]$ – линейный ограниченный вольтерров оператор, тогда по лемме 2 уравнение (26) имеет единственное в $C[0,T]$ решение φ, причём выполнено неравенство $\|\varphi;[0,T]\|^0 \leqslant C\|\psi;[0,T]\|^0$. Отсюда получаем оценку (18). Кроме того, из вида уравнения (26) следует, что $\varphi(0) = 0$. Теорема 3 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Сначала докажем *существование* решения задачи (5)–(8). Это решение будем искать в виде потенциала простого слоя (14) с плотностью $\varphi \in C[0,T]$, подлежащей определению. Для любой $\varphi \in C[0,T]$ потенциал (14) является решением системы (5) и удовлетворяет начальному условию (6). Подставив (14) в граничные условия (7) и (8), получим систему интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода (15) и (16). Из теоремы 3 следует, что система (15), (16) имеет единственное в пространстве $C[0,T]$ решение $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$, подставив которое в потенциал (14), получим решение задачи (5)–(8). Из оценки (18) и свойств потенциала простого слоя (см. [18]) делаем вывод, что найденное решение принадлежит пространству $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ и выполнено неравенство (13).

Далее докажем *единственность* решения задачи (5)–(8). Пусть $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ – классическое решение задачи (5)–(8) при $\psi_j(t) = 0$, $t \in [0,T]$, $j = 0,1$. Тогда вектор-функция u является единственным (см. [13]) в пространстве $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ классическим решением второй начально-краевой задачи

$$Lu(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega, \quad u(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0),$$
$$\partial_x u(g(t),t) = \psi(t), \quad t \in [0,T],$$

где $\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$, и для неё справедливо интегральное представление (см. [10])

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{27}$$

где $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$. Подставив выражение (27) в граничные условия (7) и (8) с нулевыми правыми частями, получим, что $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ одновременно является решением однородной системы уравнений (15), (16) и, следовательно, в силу теоремы 3 $\varphi(t) = 0$, $t \in [0,T]$. Возвращаясь к представлению (27), получаем, что $u(x,t) = 0$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Следуя [23, с. 139], приведём определение показательной функции матрицы и её свойства. *Показательной функцией* $e^H \equiv \exp\{H\}$ квадратной матрицы H называется сумма ряда $\sum_{j=0}^{+\infty} H^j/j!$. Она обладает следующими свойствами:

$$\exp\{H^{\mathrm{т}}\} = (\exp\{H\})^{\mathrm{т}}, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}e^{tH} = He^{tH}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

$$e^{R+H} = e^R e^H, \quad \text{если} \quad RH = HR. \tag{30}$$

Пусть $\overline{H}$ – жорданова форма матрицы H, s – количество жордановых клеток K_j в $\overline{H}$, k_j – размеры этих клеток, ν_j – соответствующие им собственные числа. Пусть F – такая матрица, что $\overline{H} = F^{-1}HF$. Имеют место равенства

$$e^{tH} = Fe^{t\overline{H}}F^{-1}, \tag{31}$$

$$e^{t\overline{H}} = \mathrm{diag}\,[e^{tK_1}, \ldots, e^{tK_s}], \tag{32}$$

$$e^{tK_j} = e^{t\nu_j}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ 0 & 1 & \dfrac{t}{1!} & \cdots & \dfrac{t^{k_j-2}}{(k_j-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{t^{k_j-3}}{(k_j-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1,s}. \tag{33}$$

Из (32) и (33) следует, в частности, что

$$e^{yE} = e^{y}E, \quad y \in \mathbb{C}. \tag{34}$$

Пусть $P(y)$, $y \geqslant 0$, – $m \times m$-матрица, элементами которой являются полиномы, $\nu_j(y)$, $j = \overline{1,m}$, – собственные числа $P(y)$. Имеют место оценки (см. [24, с. 171])

$$|\exp\{\tau P(y)\}| \leqslant C(1 + \tau^{1/2} + \tau^{1/2}y)^{2(m-1)} \exp\{\tau \max_{j\in\{1,\ldots,m\}} \operatorname{Re}\nu_j(y)\}, \quad y \geqslant 0, \quad \tau \geqslant 0. \tag{35}$$

Далее обозначим через $\mathcal{K}_m$ пространство (кольцо) $m\times m$-матриц над полем $\mathbb{C}$. Следуя [25, с. 7], *нормой* на $\mathcal{K}_m$ назовём функционал $\|\cdot\| : \mathcal{K}_m \to [0, +\infty)$, удовлетворяющий следующим условиям для всех $H, R \in \mathcal{K}_m$:

1) $\|H\| = 0$ тогда и только тогда, когда $H = 0$;
2) $\|\lambda H\| = |\lambda|\|H\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
3) $\|H + R\| \leqslant \|H\| + \|R\|$;
4) $\|HR\| \leqslant \|H\|\|R\|$.

Известно [26, с. 354], что функционал $H \mapsto m|H|$, $H \in \mathcal{K}_m$, является нормой на $\mathcal{K}_m$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно $t_0 \in [0, T]$, $p_0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(p_0) > 0$, и положим $M = M(t_0)$, $A = A(t_0)$, $\gamma^+ = \gamma^+(p_0, t_0)$. Достаточно доказать справедливость равенств

$$M = \frac{1}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0} \int\limits_{\gamma^+} (p_0E + y^2A)^{-1}\, dy, \tag{36}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma^+} y(p_0E + y^2A)^{-1}\, dy, \tag{37}$$

где

$$\hat{p}_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{|p_0|^{1/2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right), \quad \alpha = \operatorname{Arg}(p_0) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Докажем (36). Из равенств (см. [27, с. 27])

$$\int\limits_0^{+\infty} \tau^{-1/2}\cos(|p_0|\tau\sin\alpha)\exp\{-|p_0|\tau\cos\alpha\}\, d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{|p_0|^{1/2}}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \tau^{-1/2}\sin(|p_0|\tau\sin\alpha)\exp\{-|p_0|\tau\cos\alpha\}\, d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{|p_0|^{1/2}}\sin\frac{\alpha}{2},$$

где $\alpha = \operatorname{Arg}(p_0)$, следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \tau^{-1/2}e^{-p_0\tau}\, d\tau = \int\limits_0^{+\infty} \tau^{-1/2}\exp\{-|p_0|\tau(\cos\alpha + i\sin\alpha)\}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\tau^{-1/2}\cos(|p_0|\tau\sin\alpha)\exp\{-|p_0|\tau\cos\alpha\}\, d\tau - i\int\limits_0^{+\infty}\tau^{-1/2}\sin(|p_0|\tau\sin\alpha)\exp\{-|p_0|\tau\cos\alpha\}\, d\tau = \hat{p}_0.$$

Отсюда, учитывая (30) и (34), получаем

$$M = \frac{1}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0}\int\limits_0^{+\infty} \tau^{-1/2}e^{-p_0\tau}\, d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-y^2A\}\, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0}\int\limits_0^{+\infty} e^{-p_0\tau}\, d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\tau y^2A\}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0} \int\limits_0^{+\infty} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\tau(p_0 E + y^2 A)\}\, dy = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0 \\ b\to+\infty}} \frac{2}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0} \int\limits_\varepsilon^{b} d\tau \int\limits_0^{+\infty} \exp\{-\tau(p_0 E + y^2 A)\}\, dy.$$

Известно (см. [2, с. 699]), что уравнение

$$\det(p_0 E + y^2 A) = 0 \tag{38}$$

имеет m корней с положительной мнимой частью и m корней с отрицательной мнимой частью. Следовательно, $\det(p_0 E + y^2 A)$ – полином степени $2m$, причём

$$\det(p_0 E + y^2 A) \neq 0, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

и

$$(p_0 E + y^2 A)^{-1} = \left\| \frac{A_{jk}(y)}{\det(p_0 E + y^2 A)} \right\|, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{40}$$

где A_{jk}, $j,k = \overline{1,m}$, – полиномы степени не выше $2(m-1)$.

Зафиксируем произвольные ε, b, $0 < \varepsilon < b$. Используя равенство (30), оценку (35) и свойство 4) нормы $m|\cdot|$, с учётом условия (a) получаем

$$|\exp\{-\tau(p_0 E + y^2 A)\}| = \frac{1}{m} m|\exp\{-\tau(p_0 E + y^2 A)\}| \leqslant m|\exp\{-\tau p_0 E\}||\exp\{-\tau y^2 A\}| \leqslant$$

$$\leqslant C(1 + b^{1/2} + b^{1/2} y)^{2(m-1)} \exp\{-c\varepsilon(1+y^2)\}, \quad y \geqslant 0, \quad \tau \in [\varepsilon, b].$$

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp\{-\tau(p_0 E + y^2 A)\}\, dy$$

сходится равномерно по $\tau \in [\varepsilon, b]$. Отсюда, учитывая (29) и (39), имеем

$$M = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0 \\ b\to+\infty}} \frac{2}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0} \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_\varepsilon^{b} \exp\{-\tau(p_0 E + y^2 A)\}\, d\tau =$$

$$= -\lim_{\substack{\varepsilon\to+0 \\ b\to+\infty}} \frac{2}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0} \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_\varepsilon^{b} (p_0 E + y^2 A)^{-1} \frac{\partial}{\partial\tau} \exp\{-\tau(p_0 E + y^2 A)\}\, d\tau =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0 \\ b\to+\infty}} \frac{2}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0} \int\limits_0^{+\infty} (p_0 E + y^2 A)^{-1} [\exp\{-\varepsilon(p_0 E + y^2 A)\} - \exp\{-b(p_0 E + y^2 A)\}]\, dy. \tag{41}$$

Зафиксируем произвольно $y_0 > 0$. Используя оценку (35), получаем

$$|\exp\{-b(p_0 E + y^2 A)\}| \leqslant C(1 + b^{1/2} + b^{1/2} y_0)^{2(m-1)} e^{-cb}, \quad y \in [0, y_0]. \tag{42}$$

Кроме того, в силу (40) отображение $y \mapsto (p_0 E + y^2 A)^{-1}$ непрерывно на $[0, y_0]$. Отсюда и из (39), (42) следует, что

$$\lim_{b\to+\infty} (p_0 E + y^2 A)^{-1} \exp\{-b(p_0 E + y^2 A)\} = 0, \tag{43}$$

причём стремление к пределу равномерно по $y \in [0, y_0]$.

Далее положим

$$\mathcal{B} = \{(y,\varepsilon) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, y_0], \quad \varepsilon \in [0,1]\}, \quad Q(y,\varepsilon) = \exp\{-\varepsilon(p_0E + y^2A)\}, \quad (y,\varepsilon) \in \mathcal{B}.$$

В силу равномерной непрерывности отображения Q на множестве $\mathcal{B}$ для любого $\varkappa > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при $0 \leqslant \varepsilon < \delta$

$$|Q(y,\varepsilon) - Q(y,0)| = |Q(y,\varepsilon) - E| < \varkappa, \quad y \in [0, y_0],$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(p_0E + y^2A)^{-1}\exp\{-\varepsilon(p_0E + y^2A)\} = (p_0E + y^2A)^{-1}, \tag{44}$$

причём стремление к пределу равномерно по $y \in [0, y_0]$.

Из (43) и (44) вытекает равенство

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}} \int\limits_0^d (p_0E{+}y^2A)^{-1}[\exp\{-\varepsilon(p_0E{+}y^2A)\}-\exp\{-b(p_0E{+}y^2A)\}]\,dy = \int\limits_0^d (p_0E{+}y^2A)^{-1}\,dy, \tag{45}$$

где $d = 2\max\{1, |a_1|, \ldots, |a_{2m}|\}$, a_j, $j = \overline{1, 2m}$, – корни уравнения (38).

Далее докажем, что интеграл

$$\int\limits_d^{+\infty} (p_0E + y^2A)^{-1}[\exp\{-\varepsilon(p_0E + y^2A)\} - \exp\{-b(p_0E + y^2A)\}]\,dy \tag{46}$$

сходится равномерно по $\varepsilon, b > 0$. Пусть F такая матрица, что $\overline{A} = F^{-1}AF$, где $\overline{A}$ – жорданова форма матрицы A. Обозначим через s количество жордановых клеток K_j в $\overline{A}$, через k_j – размеры этих клеток, а через μ_j – соответствующие им собственные числа матрицы A. Тогда, учитывая (31)–(33),

$$\exp\{-\tau y^2 A\} = F\,\mathrm{diag}\,[\exp\{-\tau y^2 K_1\}, \ldots, \exp\{-\tau y^2 K_m\}]F^{-1}, \quad y \geqslant d, \quad \tau \geqslant 0,$$

причём

$$\exp\{-\tau y^2 K_j\} = \exp\{-\tau y^2 \mu_j\} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-\tau y^2}{1!} & \dfrac{(-\tau y^2)^2}{2!} & \cdots & \dfrac{(-\tau y^2)^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ 0 & 1 & \dfrac{-\tau y^2}{1!} & \cdots & \dfrac{(-\tau y^2)^{k_j-2}}{(k_j-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{(-\tau y^2)^{k_j-3}}{(k_j-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, s}. \tag{47}$$

Положим

$$R_{jl}(y,\tau) = \exp\{-\tau y^2 \mu_l\}\frac{(-\tau y^2)^j}{j!}, \quad y \geqslant 0, \quad \tau \geqslant 0, \quad j = \overline{0, k_l - 1}, \quad l = \overline{1, s}.$$

В силу условий (a) справедливы оценки

$$|R_{jl}(y,\tau)| \leqslant C, \quad y \geqslant 0, \quad \tau \geqslant 0, \quad j = \overline{1, k_l - 1}, \quad l = \overline{1, s}.$$

Отсюда, используя равенства (30), (34), (47) и свойство 4) нормы $m|\cdot|$, получаем

$$|\exp\{-\tau(p_0E+y^2A)\}|\leqslant m|\exp\{-\tau pE\}||\exp\{-\tau y^2A\}|\leqslant C,\quad y\geqslant 0,\quad \tau\geqslant 0. \tag{48}$$

Кроме того, из равенства (40) следует, что

$$|(p_0E+y^2A)^{-1}|\leqslant C\frac{1}{y^2},\quad y\geqslant d.$$

Поэтому в силу (48) интеграл (46) сходится равномерно по $\varepsilon, b>0$. Отсюда и из (43)–(45), переходя к пределу в (41) при $\varepsilon\to+0$, $b\to+\infty$ и учитывая (40), получаем (см. [28, с. 219])

$$M=\frac{1}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(p_0E+y^2A)^{-1}\,dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0}\int\limits_{\gamma^+}(p_0E+y^2A)^{-1}\,dy.$$

Следовательно, выполняется равенство (36).

Докажем равенство (37). Известно (см. [15, с. 357]), что

$$A^{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}y(p_0E+y^2A)^{-1}\,dy, \tag{49}$$

где $C_R=\{z\in\mathbb{C}:|z|=R\}$ – окружность достаточно большого радиуса $R>0$, охватывающая корни уравнения (38). Заметим, что

$$\int\limits_{-R}^{R}y(p_0E+y^2A)^{-1}\,dy=0$$

и, следовательно, справедливы равенства

$$\int\limits_{C_R^+}y(p_0E+y^2A)^{-1}\,dy=\int\limits_{\gamma^+}y(p_0E+y^2A)^{-1}\,dy, \tag{50}$$

где $C_R^+=\{z\in C_R:\operatorname{Im}z\geqslant 0\}$. Далее имеем

$$\int\limits_{C_R^+}y(p_0E+y^2A)^{-1}\,dy=i\int\limits_{0}^{\pi}R^2e^{2i\varphi}(p_0E+R^2e^{2i\varphi}A)^{-1}d\varphi=\int\limits_{C_R^-}y(p_0E+y^2A)^{-1}\,dy,$$

где $C_R^-=\{z\in C_R:\operatorname{Im}z\leqslant 0\}$. Отсюда и из (49), (50) вытекает равенство (37). Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Условие (12) может не выполняться.

Например, если $m_0=m_1$ и для некоторого $t_0\in[0,T]$ имеет место равенство $B_0=$ $=B_1M(t_0)$, то $\det G(t_0)=0$. В частности, если

$$A(t)\equiv A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\quad t\in[0,T],\quad B_0=\begin{pmatrix}1&-1/2&1&0\\0&1&-1/2&1\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},$$

то, применив (28), (32), (33), равенства

$$\int\limits_{0}^{\infty}y^{2k}e^{-ay^2}\,dy=\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}a^k}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad k\in\mathbb{N},\quad a>0, \tag{51}$$

и формулы (9), (10), последовательно найдём

$$M(t)\equiv M=\begin{pmatrix}1&-1/2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1/2&1\end{pmatrix},\quad G(t)\equiv G=\begin{pmatrix}1&-1/2&1&0\\0&1&-1/2&1\\1&-1/2&1&0\\0&1&-1/2&1\end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает равенство $\det G=0$.

Заметим, что можно описать конкретный алгоритм вычисления элементов матрицы $G(t)$ в том случае, если известна такая матрица $F(t)$, что

$$\overline{A}(t)=F^{-1}(t)A(t)F(t),\quad t\in[0,T], \tag{52}$$

где $\overline{A}$ – жорданова форма матрицы A. Для этого зафиксируем произвольно $t_0\in[0,T]$ и положим $A=A(t_0)$, $\overline{A}=\overline{A}(t_0)$, $M=M(t_0)$, $F=F(t_0)$, $G=G(t_0)$. Обозначим через s количество жордановых клеток K_j в составе $\overline{A}$, через k_j – размеры этих клеток, а через μ_j – соответствующие этим клеткам собственные числа матрицы A. Используя (31)–(33), получаем

$$e^{-y^2A}=F\operatorname{diag}[e^{-y^2K_1},\ldots,e^{-y^2K_s}]F^{-1}, \tag{53}$$

$$e^{-y^2K_j}=e^{-y^2\mu_j}\begin{pmatrix}1&\dfrac{-y^2}{1!}&\dfrac{y^4}{2!}&\cdots&\dfrac{(-y)^{2k_j-2}}{(k_j-1)!}\\0&1&\dfrac{-y^2}{1!}&\cdots&\dfrac{(-y)^{2k_j-4}}{(k_j-2)!}\\0&0&1&\cdots&\dfrac{(-y)^{2k_j-6}}{(k_j-3)!}\\\multicolumn{5}{c}{\dotfill}\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},\quad y\in\mathbb{R},\quad j=\overline{1,s}. \tag{54}$$

Используя (9), (51)–(54) и учитывая условие (а), можно вычислить элементы матрицы M, а затем по формуле (10) – элементы матрицы G.

Заметим, что приведённый выше пример показывает, что вычисление элементов матрицы G в отдельных случаях возможно без предварительного нахождения матрицы F из (52).

Автор выражает благодарность профессору Е.А. Бадерко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
3. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
4. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
5. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Uniqueness of a solution in a Holder class to the first initial-boundary value problem for a parabolic system in a bounded nonsmooth domain in the plane // J. of Math. Sci. 2020. V. 251. № 5. P. 557–572.
6. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2020. Т. 494. № 5. С. 5–8.
7. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.

8. *Коненков А.Н.* Существование и единственность классического решения первой краевой задачи для параболических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 7. С. 904–913.
9. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Anal. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
10. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1992.
11. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. 2022. Т. 502. № 2. С. 26–29.
12. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333–1343.
13. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Журн. вычислит. математики. 2023. Т. 63. № 4. С. 584–595.
14. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Об однозначаной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 5. С. 608–618.
15. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.
16. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
17. *Петровский И.Г.* О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
18. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294-В92.
19. *Семаан Х.Д.* О решении второй краевой задачи для параболических систем на плоскости: дис. ... канд. физ-мат. наук. М., 1999.
20. *Камынин Л.И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
21. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 8. С. 1–25.
22. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Bitsadze–Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 753–765.
23. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2015.
24. *Friedman A.* Generalized Functions and Partial Differential Equations. New Jersey, 1963.
25. *Богачев К.Ю.* Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М., 1998.
26. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., 1989.
27. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1965.
28. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М., 1974.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 12.09.2023 г.
После доработки 12.09.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.