

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.951

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ НА ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЯХ
НАД МНОГООБРАЗИЕМ

© 2023 г. М. С. Смирнов

Установлено необходимое и достаточное условие для замкнутости образа или сюръективности дифференциального оператора, действующего на гладких сечениях векторных расслоений. Для связных некомпактных многообразий показано, что эти условия выводятся из условий регулярности и свойства единственности продолжения решений. Приведено приложение этих результатов к эллиптическим операторам (точнее, к операторам с сюръективным главным символом) с аналитическими коэффициентами, к эллиптическим операторам второго порядка на линейных расслоениях с вещественной старшей частью и к оператору Ходжа–Лапласа–де Рама. Показано, что старшая группа когомологий де Рама (соответственно Дольбо) на связном некомпактном гладком (соответственно комплексно-аналитическом) многообразии обнуляется. Для эллиптических операторов доказано, что разрешимость в гладких сечениях влечёт за собой разрешимость в обобщённых сечениях.

DOI: 10.31857/S0374064123120063, EDN: NXYOPV

Введение. Имеется большое количество исследований разрешимости (или, что равносильно, сюръективности) скалярных линейных дифференциальных операторов в пространстве гладких функций. Для операторов с гладкими коэффициентами на открытом подмножестве в пространстве $\mathbb{R}^n$ были получены окончательные результаты, содержащие необходимые и достаточные условия разрешимости в гладких функциях. Точные формулировки и обзор результатов по данному вопросу можно найти в работе [1] (для случая операторов с постоянными коэффициентами см. также [2, гл. 10]). Для скалярных дифференциальных (и даже псевдодифференциальных) операторов на произвольных многообразиях существует подход, основанный на теории распространения особенностей (см. [3, 4]). Данный подход применялся в различных контекстах, включая операторы первого порядка (см. [3, 5]) и инвариантные операторы на однородных пространствах групп Ли (см. [6, 7]). Цель данной статьи – найти удобные для применения условия замкнутости образа или разрешимости линейные дифференциальные операторы, действующие на гладких сечениях векторных расслоений, аналогичные установленным в [1] для скалярных операторов. По-видимому, такие результаты встречаются в литературе довольно редко. В [8] разрешимость исследовалась для операторов, действующих в пространствах сечений векторных расслоений над аналитическим многообразием, принадлежащих классу Жевре. В работе [9] утверждается (без доказательства), что эллиптический оператор с аналитическими коэффициентами на связном некомпактном аналитическом многообразии разрешим в гладких сечениях (мы доказываем это утверждение в п. 5). В [10] утверждается, что эллиптический оператор второго порядка, действующий на гладких сечениях векторного расслоения над связным некомпактным многообразием, разрешим. Это утверждение в приведённой общности, по всей видимости, неверно, так как эллиптический оператор второго порядка с непостоянными коэффициентами (в случае когда расслоение имеет размерность больше единицы) может иметь нетривиальные функции с компактным носителем в ядре (см. [11, пример 1.11]). Тем не менее можно доказать разрешимость оператора Ходжа–Лапласа–де Рама (для связных некомпактных многообразий), который в [10] приведён как основной мотивирующий пример.

Статья организована следующим образом. В п. 1 приводится вся необходимая предварительная информация и фиксируются основные обозначения. В п. 2 доказывается главный

результат по аналогии с теоремой 3.14 из [1], дающий критерий замкнутости образа дифференциального оператора, а также доказывается, что если оператор обладает дополнительными свойствами регулярности, то условия основной теоремы несколько упрощаются. Распространение результатов о разрешимости в гладких сечениях на обобщённые сечения для эллиптических операторов рассматривается в п. 3. В п. 4 описывается случай когда многообразие связно и некомпактно, показывается, что условия разрешимости могут быть получены из условия регулярности и свойства единственности продолжения решений. Наконец, в п. 5 собраны некоторые приложения полученных результатов для операторов с аналитическими коэффициентами, эллиптических операторов второго порядка с вещественной главной частью на линейных расслоениях и оператора Ходжа–Лапласа–де Рама.

1. Предварительные сведения. Мы используем слово “гладкий” исключительно как синоним “класса C^∞ ”. На протяжении данной статьи все многообразия по умолчанию считаются гладкими и без края, а векторные расслоения – гладкими и комплексными. Для расширения многих результатов этой статьи на случай вещественных расслоений достаточно рассмотреть комплексификации.

Целью этого пункта является фиксация обозначений и необходимых результатов из теории обобщённых функций (сечений расслоений) и дифференциальных операторов на многообразиях, поскольку единого подхода к этим понятиям в литературе на данный момент не существует. Приведённое ниже определение обобщённого сечения векторного расслоения широко известно и может быть найдено в книге [12, гл. 3] (см. также [13, гл. 8] для случая тривиальных расслоений). Чтобы удобно и бескоординатно определять топологии на пространствах обобщённых сечений векторных расслоений над многообразиями, мы будем свободно использовать понятия проективной и индуктивной локально выпуклых топологий (см. [14, II.5–6]). Определения линейного дифференциального оператора на векторных расслоениях и его главного символа можно найти в [15, гл. IV] или [16, гл. 4]. Тем не менее, в отличие от авторов этих источников, будем отталкиваться от понятия транспонированного оператора (а не сопряжённого), чтобы избежать необходимости фиксировать плотности и эрмитовы структуры. Книжки [14] и [16] будут использоваться как основные источники по теории многообразий и функциональному анализу соответственно. Все необходимые сведения из теории пучков содержатся в [16, гл. 2]. Наконец, для краткости будем называть топологию $\sigma(T', T)$ на сопряжённом пространстве T' к локально выпуклому пространству T **-слабой топологией*.

1.1. Обобщённые сечения векторных расслоений. Пусть M – многообразие, а E – векторное расслоение над M . Через $C^\infty(M, E)$ и $\mathcal{D}(M, E)$ обозначаем пространства гладких сечений и гладких сечений с компактным носителем расслоения E соответственно. Эти пространства наделяются стандартными топологиями пространства Фреше и LF-пространства соответственно. Очевидно, что $\mathcal{D}(M, E)$ плотно в $C^\infty(M, E)$.

Если M – гладкое многообразие, то через Vol_M обозначается (комплексное) расслоение плотностей на M (определение и основные свойства расслоения Vol_M можно найти в [12, разд. 3.1.2]). Отметим, что Vol_M тривиально, и ненулевое сечение этого расслоения можно построить, выбрав риманову метрику на M . Для непрерывного сечения ϕ расслоения Vol_M с компактным носителем канонически определяется число $\int_M \phi$. Для векторного расслоения E над M положим $E^\bullet = E^* \otimes \text{Vol}_M$ (как обычно, E^* обозначает сопряжённое расслоение к E , т.е. $\text{Hom}(E, \mathbb{C})$), так что имеется канонический морфизм $\mathbf{c}_E : E \otimes E^\bullet \rightarrow \text{Vol}_M$. Для таких непрерывных сечений ϕ и ψ векторных расслоений E и $E^\bullet$, что $\text{supp } \phi \cap \text{supp } \psi \subset M$ компактно, положим $\langle \phi, \psi \rangle_E = \int_M \mathbf{c}_E(\phi \otimes \psi)$. Билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ определяет двойственность между $C^\infty(M, E)$ и $\mathcal{D}(M, E^\bullet)$, а также между $\mathcal{D}(M, E)$ и $C^\infty(M, E^\bullet)$. Обозначим через $\mathcal{D}'(M, E)$ сопряжённое пространство к $\mathcal{D}(M, E^\bullet)$ (наделённое топологией сильного сопряжённого). Элементы этого пространства называются *обобщёнными сечениями расслоения E* . Пространство $C^\infty(M, E)$ канонически вложено в $\mathcal{D}'(M, E)$, и с этого момента мы будем отождествлять $C^\infty(M, E)$ с его образом вложения в $\mathcal{D}'(M, E)$. Пространство обобщённых сечений расслоения E может быть определено над любым открытым $U \subset M$, и совокупность таких пространств образует пучок (ограничения определяются стандартным способом). Определим *носитель обобщённого сечения*, как это принято в теории пучков, как множество таких $x \in M$, что росток данного сечения в точке x отличен от нуля. Как обычно, обобщённое

сечение $\phi \in \mathcal{D}'(M, E)$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда ϕ непрерывен на $\mathcal{D}(M, E^\bullet)$ по отношению к топологии, индуцированной из $C^\infty(M, E^\bullet)$. Таким образом, пространство $\mathcal{E}'(M, E)$, состоящее из обобщённых сечений расслоения E с компактным носителем, канонически изоморфно сопряжённому пространству к $C^\infty(M, E^\bullet)$. Также отметим, что $(E^\bullet)^\bullet$ канонически изоморфно E , поскольку $\text{Vol}_M^* \otimes \text{Vol}_M$ канонически изоморфно расслоению $M \times \mathbb{C}$ (ввиду того, что Vol_M одномерно), а E^{**} канонически изоморфно E . Отсюда получаем канонические изоморфизмы

$$(C^\infty(M, E))' \cong \mathcal{E}'(M, E^\bullet) \quad \text{и} \quad (\mathcal{D}(M, E))' \cong \mathcal{D}'(M, E^\bullet).$$

Пространство тех обобщённых сечений расслоения E , что локально принадлежат (принадлежит ограничение на каждую относительно компактную карту, над которой расслоение E тривиально) пространству Соболева H^s , обозначается через $H_{\text{loc}}^s(M, E)$ (см. [17, § I.7]). На этом пространстве есть естественная топология пространства Фреше: она определяется стандартным образом если M является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n$, а E тривиально, в то время как для общего случая она определяется как проективная топология по отношению к ограничениям на относительно компактные карты, над которыми E тривиализуется. Пространство элементов $H_{\text{loc}}^s(M, E)$, имеющих носитель в компакте $K \subset M$, обозначается через $H^s(K, M, E)$. Это пространство замкнуто в $H_{\text{loc}}^s(M, E)$, а его топология нормируема (т.е. порождается некоторой нормой). Отметим, что теорема вложения Соболева (см., например, [17, теорема I.7.6]) влечёт за собой, что $C^\infty(M, E) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H_{\text{loc}}^s(M, E)$, причём топология на $C^\infty(M, E)$ совпадает с топологией проективного предела. Наконец, определим $H_c^s(M, E) = H_{\text{loc}}^s(M, E) \cap \mathcal{E}'(M, E)$. Очевидно, что $H_c^s(M, E)$ совпадает с объединением пространств $H^s(K, M, E)$ по всем компактам $K \subset M$. Мы наделяем $H_c^s(M, E)$ топологией индуктивного предела, т.е.

$$H_c^s(M, E) = \varinjlim H^s(K, M, E).$$

Следующие свойства описанных выше пространств выделим в отдельное предложение.

Предложение 1. Пусть M – многообразие, а E – векторное расслоение над M . Тогда выполнены следующие утверждения:

(i) пусть $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$ и $K \subset M$ – компакт, тогда оператор вложения $H^t(K, M, E) \rightarrow H^s(K, M, E)$ компактен;

(ii) двойственный оператор к оператору вложения $C^\infty(M, E^\bullet) \rightarrow H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet)$ задаёт топологический изоморфизм пространства $(H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet))'$ на $H_c^{-s}(M, E)$;

(iii) множество $B \subset \mathcal{E}'(M, E)$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда найдутся такие $s \in \mathbb{R}$ и компакт $K \subset M$, что B содержится и ограничено в $H^s(K, M, E)$.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение (i), достаточно воспользоваться теоремой Реллиха (см. [2, теорема 10.1.10]) для открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$ и очевидным рассуждением, использующим разбиение единицы (см. также [17, теорема I.7.4], где в случае тривиального расслоения используется другой подход).

Теперь докажем (ii). Доказательство локальной версии этого утверждения (т.е. случая открытого подмножества в $\mathbb{R}^n$ и тривиального расслоения) можно найти в работах [18] или [17, теорема I.7.7]. Приводимое далее рассуждение является прямым обобщением доказательства из [18, разд. 3], поэтому опустим детали. Очевидно, что $C^\infty(M, E^\bullet)$ плотно в $H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet)$, а потому каноническое отображение $(H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet))' \rightarrow \mathcal{E}'(M, E)$ инъективно. Из локальной версии утверждения (ii) и рассуждения, использующего разбиение единицы, легко вытекает, что образ вложения равен $H_c^{-s}(M, E)$. Также легко видеть, что обратное отображение к нему непрерывно. Остаётся показать, что топология на $H_c^{-s}(M, E)$ слабее сильной топологии пространства, сопряжённого к $H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet)$. Заметим, что сопряжённое к $H_c^{-s}(M, E)$ пространство канонически отождествляется с $H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet)$, так что топология на $H_c^{-s}(M, E)$ согласована с двойственностью между $H_{\text{loc}}^s(M, E)$ и его сопряжённым пространством. Таким образом, из теоремы Макки–Аренса (см. [14, теорема IV.3.2]) следует, что топология на $H_c^{-s}(M, E)$ слабее топологии Макки, которая, в свою очередь, слабее сильной топологии.

Наконец, утверждение (iii) напрямую выводится из (ii). Действительно, раз $C^\infty(M, E^\bullet)$ является проективным пределом пространств $H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet)$, получаем, что $B \subset \mathcal{E}'(M, E) =$

$= (C^\infty(M, E^\bullet))'$ равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда найдётся такое $s \in \mathbb{R}$, что B содержится в $(H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet))'$ и ограничено там по отношению к сильной топологии. Иначе говоря, $B \subset \mathcal{E}'(M, E)$ равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда B содержится и ограничено в $H_c^s(M, E)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$. Доказательство завершается применением результатов [14, II.6.5], поскольку $H_c^s(M, E)$ является строгим индуктивным пределом последовательности $H^s(K_1, M, E) \subset H^s(K_2, M, E) \subset \dots$ для произвольной последовательности $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, если $\bigcup_n K_n = M$ и $K_n \subset \text{Int } K_{n+1}$ для всех n (Int обозначает внутренность). Предложение доказано.

1.2. Дифференциальные операторы на векторных расслоениях. Пусть M – многообразие, а E и F – векторные расслоения над M . Будем обозначать через $\text{Diff}_k(M, E, F)$ пространство линейных дифференциальных операторов из E в F , имеющих порядок не выше k (и гладкие коэффициенты). В дальнейшем все операторы предполагаются линейными без явного указания на это. Для $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ будем обозначать той же буквой L действие этого оператора из $C^\infty(U, E)$ в $C^\infty(U, F)$ для любого открытого $U \subset M$. Указанный оператор непрерывен. Отметим, что для расслоений E, F и G над M и дифференциальных операторов $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ и $N \in \text{Diff}_m(M, F, G)$ композиция NL также является дифференциальным оператором порядка не выше $m + k$, т.е. $NL \in \text{Diff}_{m+k}(M, E, G)$.

Ключевую роль в дальнейшем будет играть *транспонированный оператор* tL дифференциального оператора $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. По определению tL – это единственный такой оператор из $\text{Diff}_k(M, F^\bullet, E^\bullet)$, что $\langle L\phi, \psi \rangle_F = \langle \phi, {}^tL\psi \rangle_E$ для всех таких $\phi \in C^\infty(M, E)$ и $\psi \in C^\infty(M, F^\bullet)$, что $\text{supp } \phi \cap \text{supp } \psi \subset M$ – компакт. Единственность tL очевидна. Также существование тривиально доказывается в случае, когда M – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, а E и F тривиальны. Для доказательства существования в общем случае достаточно склеить (в смысле теории пучков) транспонированные операторы к ограничениям L на карты, над которыми E и F тривиальны.

Существование транспонированного оператора позволяет определить действие дифференциальных операторов на обобщённые сечения. Действительно, для $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ существует единственный непрерывный оператор из $\mathcal{D}'(M, E)$ в $\mathcal{D}'(M, F)$, продолжающий действие L с пространства $C^\infty(M, E)$, и, кроме того, этот оператор совпадает с двойственным оператором к ${}^tL : \mathcal{D}(M, F^\bullet) \rightarrow \mathcal{D}(M, E^\bullet)$. Этот расширенный оператор мы также будем обозначать через L . Отметим, что $L(\mathcal{D}(M, E)) \subset \mathcal{D}(M, F)$, $L(C^\infty(M, E)) \subset C^\infty(M, F)$, $L(\mathcal{E}'(M, E)) \subset \mathcal{E}'(M, F)$, $L(H_{\text{loc}}^s(M, E)) \subset H_{\text{loc}}^{s-k}(M, F)$ и $L(H_c^s(M, E)) \subset H_c^{s-k}(M, F)$ для всех $s \in \mathbb{R}$; $L(H^s(K, M, E)) \subset H^{s-k}(K, M, E)$ для $s \in \mathbb{R}$ и компактных $K \subset M$. Во всех перечисленных включениях оператор L непрерывен по отношению к естественным топологиям на этих пространствах.

Пусть $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Обозначим *главный символ* оператора L через $\sigma_k(L)$, так что $\sigma_k(L)$ – это морфизм расслоений $\pi^*E \rightarrow \pi^*F$, где $\pi : T_0^*M \rightarrow M$ – каноническая проекция, T_0^*M – кокасательное расслоение над M без нулевого сечения, а π^* – обратный образ. Известно, что $\sigma_{k+m}(NL) = \sigma_m(N)\sigma_k(L)$ для произвольных $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ и $N \in \text{Diff}_m(M, F, G)$. Напомним, что оператор L называется *эллиптическим*, если $\sigma_k(L)$ – изоморфизм. Перейдём к вычислению главного символа оператора tL . Для начала заметим, что $\pi^*F^\bullet$ канонически изоморфно $(\pi^*F)^* \otimes \pi^*\text{Vol}_M$. Из прямого вычисления tL в картах легко показать, что $\sigma_k({}^tL)$ совпадает с $(-1)^k \sigma_k(L)^* \otimes \text{Id}_{\pi^*\text{Vol}_M}$, или, точнее, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi^*F^\bullet & \xrightarrow{\sigma_k({}^tL)} & \pi^*E^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\pi^*F)^* \otimes \pi^*\text{Vol}_M & \xrightarrow{(-1)^k \sigma_k(L)^* \otimes \text{Id}_{\pi^*\text{Vol}_M}} & (\pi^*E)^* \otimes \pi^*\text{Vol}_M \end{array}$$

коммутативна, где вертикальные стрелки – упомянутые канонические изоморфизмы. Теперь очевидно, что сюръективность (соответственно инъективность) главного символа оператора L влечёт за собой инъективность (соответственно сюръективность) главного символа tL . В частности, из эллиптичности L следует эллиптичность оператора tL .

В дальнейшем будем пользоваться коммутативностью диаграмм

$$\begin{array}{ccccccc}
 (C^\infty(M, F))' & \xrightarrow{L'} & (C^\infty(M, E))' & & (\mathcal{D}(M, F))' & \xrightarrow{L'} & (\mathcal{D}(M, E))' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{E}'(M, F^\bullet) & \xrightarrow{{}^tL} & \mathcal{E}'(M, E^\bullet) & & \mathcal{D}'(M, F^\bullet) & \xrightarrow{{}^tL} & \mathcal{D}'(M, E^\bullet)
 \end{array} \quad (1)$$

для произвольных векторных расслоений E и F и произвольного дифференциального оператора $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ (вертикальные стрелки в (1) – канонические изоморфизмы, индуцированные изоморфизмами расслоений $(E^\bullet)^\bullet \cong E$ и $(F^\bullet)^\bullet \cong F$).

Предположим, что зафиксирована всюду положительная плотность $\mu \in C^\infty(M, \text{Vol}_M)$ и эрмитовы структуры на расслоениях E и F . В этом случае понятие транспонированного оператора для $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ может быть заменено понятием *сопряжённого оператора*. Говоря точнее, определим $\langle \phi, \psi \rangle_{E, \mu} = \int (\phi, \psi)_E \mu$, где ϕ и ψ – такие непрерывные сечения E , что $\text{supp } \phi \cap \text{supp } \psi \subset M$ компактно, а $(\phi, \psi)_E$ – поточечное скалярное произведение. Тогда сопряжённый оператор L^* к оператору $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ определяется как единственный оператор из $\text{Diff}_k(M, F, E)$, удовлетворяющий условию $\langle L\phi, \psi \rangle_{F, \mu} = \langle \phi, L^*\psi \rangle_{E, \mu}$ для всех таких $\phi \in C^\infty(M, E)$ и $\psi \in C^\infty(M, F)$, что $\text{supp } \phi \cap \text{supp } \psi \subset M$ компактно. Очевидно, имеется тесная связь между операторами tL и L^* . Именно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(M, F^\bullet) & \xrightarrow{{}^tL} & C^\infty(M, E^\bullet) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C^\infty(M, F) & \xrightarrow{L^*} & C^\infty(M, E)
 \end{array} \quad (2)$$

коммутативна (вертикальные стрелки индуцированы каноническими сопряжённо-линейными изоморфизмами $E^\bullet \cong E$ и $F^\bullet \cong F$, порождаемыми эрмитовыми структурами и тривиализацией Vol_M сечением μ). Наконец отметим, что $\sigma_k(L^*) = (-1)^k \sigma_k(L)^* : \pi^*F \rightarrow \pi^*E$ (здесь сопряжённый морфизм к $\sigma_k(L)$ понимается в смысле канонических эрмитовых структур на π^*E и π^*F , индуцированных эрмитовыми структурами на E и F соответственно).

Оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ называется *гипоэллиптическим*, если из условий $\phi \in \mathcal{D}'(U, E)$ и $L\phi \in C^\infty(U, F)$ следует, что $\phi \in C^\infty(U, E)$ для произвольного открытого $U \subset M$. В дальнейшем нам понадобятся более тонкие условия регулярности для оператора L . Будем говорить, что оператор L является *r -гипоэллиптическим* для $r \in \mathbb{R}$, если условия $\phi \in \mathcal{D}'(U, E)$ и $L\phi \in H_{\text{loc}}^{s+r}(U, F)$ влекут $\phi \in H_{\text{loc}}^{s+r}(U, E)$ на произвольном открытом $U \subset M$. Очевидно, что r -гипоэллиптичность (для некоторого $r \in \mathbb{R}$) влечёт за собой гипоэллиптичность. Напомним теорему регулярности для эллиптических операторов, утверждающую, что эллиптический оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ является k -гипоэллиптическим (для доказательства достаточно заметить, что r -гипоэллиптичность – локальное свойство, а потому теорему достаточно доказать для открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, см., например, [13, следствие 7.20]). Наконец, отметим, что оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$, главный символ которого инъективен, также является k -гипоэллиптическим. Действительно, зафиксируем положительную плотность на M и эрмитовы структуры на E и F и рассмотрим оператор $N = L^*L$. Этот оператор эллиптичен и имеет порядок $2k$, так что он $2k$ -гипоэллиптический. Значит, если $L\phi \in H^s(U, F)$, то $L^*L\phi \in H^{s-k}(U, E)$, откуда $\phi \in H^{s+k}(M, E)$.

2. Основные теоремы о замкнутости образа.

Лемма 1 (ср. с теоремой 1.3 из [1]). Пусть T_1 и T_2 – пространства Фреше, а $u : T_1 \rightarrow T_2$ – непрерывный линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $u(T_1)$ замкнуто в T_2 ;
- (ii) для любого равностепенно непрерывного $A \subset T_1'$ найдётся такое равностепенно непрерывное $B \subset T_2'$, что $A \cap u'(T_2') \subset u'(B)$;
- (iii) для любого равностепенно непрерывного $A \subset T_1'$ найдётся такое подпространство $R \subset T_2$, что $(u')^{-1}(A) \subset R^\circ$, и для всех $y \in \overline{u(T_1)}$ найдётся такое $x \in T_1$, что $u(x) - y \in R$.

Доказательство. Покажем сначала, что из (ii) следует утверждение (i). Достаточно доказать, что $u'(T'_2) \subset T'_1$ *-слабо замкнуто (см. [14, IV.7.7]). Поскольку пространства Фреше В-полны (см. [14, IV.8]), остаётся показать, что $A \cap u'(T'_2)$ *-слабо замкнуто в A для любого равномерно непрерывного $A \subset T'_1$. Пусть $B \subset T'_2$ равномерно непрерывно и $u'(B) \supset \supset A \cap u'(T'_2)$. Заметим, что $A \cap u'(T'_2) = A \cap u'(\overline{B})$, где замыкание понимается в *-слабой топологии. Действительно, раз $u'(\overline{B}) \subset u'(T'_2)$, имеем

$$A \cap u'(\overline{B}) \subset A \cap u'(T'_2).$$

С другой стороны, $A \cap u'(T'_2) \subset u'(B) \subset u'(\overline{B})$. Теперь, так как B равномерно непрерывно, а $\overline{B}$ *-слабо компактно, получаем, что $A \cap u'(\overline{B}) = A \cap u'(T'_2)$ *-слабо замкнуто в A .

Поскольку импликация (i) $\Rightarrow$ (iii) очевидна (достаточно взять $R = \{0\}$), завершим доказательство, показав, что (iii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $A \subset T'_1$ равномерно непрерывно, а $R \subset T_2$ – линейное подпространство, удовлетворяющее условиям (iii) по отношению к A . Обозначим через $\theta : T'_2 \rightarrow (\overline{u(T_1)})'$ двойственный оператор к оператору вложения $\overline{u(T_1)} \rightarrow T_2$, а через $w : (\overline{u(T_1)})' \rightarrow T'_1$ – двойственный оператор к оператору $u : T_1 \rightarrow \overline{u(T_1)}$, так что $w\theta = u'$. Утверждаем, что множество $\theta((u')^{-1}(A))$ равномерно непрерывно как подмножество в $(\overline{u(T_1)})'$. Достаточно проверить, что оно *-слабо ограничено, так как пространство $\overline{u(T_1)}$ бочечно (см. [14, IV.5.2]). Рассмотрим $y \in \overline{u(T_1)}$ и возьмём такой $x \in T_1$, что $u(x) - y \in R$. Тогда для любого $g \in \theta((u')^{-1}(A))$ выполнено $g(y) = g(u(x)) = w'(g)(x)$, где $w'(g) \in A$, так как $w'(g) \in w(\theta((u')^{-1}(A))) = u'((u')^{-1}(A)) \subset A$. Таким образом, множество $\{g(y) : g \in \theta((u')^{-1}(A))\} \subset \mathbb{C}$ ограничено для любого $y \in \overline{u(T_1)}$, что влечёт за собой *-слабую ограниченность $\theta((u')^{-1}(A))$. Значит, найдётся такая выпуклая закругленная окрестность нуля $U \subset T_2$, что $\theta((u')^{-1}(A)) \subset (U \cap \overline{u(T_1)})^\circ$. Из теоремы Хана–Банаха (см. [14, II.3.2]) следует, что $(U \cap \overline{u(T_1)})^\circ \subset \theta(U^\circ)$. Наконец,

$$u'(U^\circ) = w(\theta(U^\circ)) \supset w(\theta((u')^{-1}(A))) = u'((u')^{-1}(A)) = A \cap u'(T'_2).$$

Таким образом, утверждение (ii) доказано. Лемма доказана.

Определение 1. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Будем говорить, что M является L -выпуклым, если для любого компакта $K \subset M$ и любого $s \in \mathbb{R}$ найдётся такой компакт $K' \subset M$, что условия $\phi \in \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$ и ${}^tL\phi \in H^s(K, M, E^\bullet)$ влекут $\text{supp } \phi \subset K'$.

Определение 2. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Оператор L называется *полуглобально нормально разрешимым*, если для любого относительно компактного открытого $U \subset M$ и любого $\phi \in \overline{L(C^\infty(M, E))}$ найдётся такое $\psi \in C^\infty(M, E)$, что $L\psi$ совпадает с ϕ на U . Если описанное выше условие выполняется для произвольного $\phi \in C^\infty(M, F)$, то оператор L называется *полуглобально разрешимым*.

В доказательстве следующей теоремы будем неоднократно использовать первую диаграмму из (1), чтобы заменить двойственный оператор на транспонированный и применить лемму 1.

Теорема 1. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$;
- (ii) для любого $s \in \mathbb{R}$ и любого компакта $K \subset M$ найдутся такие $t \in \mathbb{R}$ и компакт $K' \subset M$, что выполнены условия:
 - a) если $\phi \in \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$ и ${}^tL\phi \in H^s(K, M, E^\bullet)$, то $\phi \in H^t(K', M, F^\bullet)$,
 - b) если $U \subset H^t(K', M, F^\bullet)$ – окрестность нуля, то множество ${}^tL(U) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$ является окрестностью нуля в ${}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$ по отношению к топологии, индуцированной из пространства $H^s(K, M, E^\bullet)$;
- (iii) многообразие M является L -выпуклым, а оператор L полуглобально нормально разрешим.

Доказательство. Докажем, что из (i) следует утверждение (ii). Рассмотрим произвольное $s \in \mathbb{R}$ и компакт $K \subset M$. Пусть V – ограниченная окрестность нуля в $H^s(K, M, E^\bullet)$.

Поскольку V равностепенно непрерывное подмножество в $\mathcal{E}'(M, E^\bullet)$, из леммы 1 вытекает, что найдётся такое равностепенно непрерывное множество $B \subset \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$, что

$$V \cap {}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \subset {}^tL(B).$$

Пусть $t \in \mathbb{R}$ и компакт $K' \subset M$ выбраны так, что B содержится и ограничено в $H^t(K', M, F^\bullet)$ (см. предложение 1 (iii)). Очевидно, что t и K' удовлетворяют условию а) из (ii), поскольку V поглощает каждую точку пространства $H^s(K, M, E^\bullet)$. Наконец, пусть $U \subset H^t(K', M, F^\bullet)$ – окрестность нуля. Тогда U поглощает B , а значит, ${}^tL(U)$ поглощает $V \cap {}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet))$. Таким образом, множество ${}^tL(U) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$ поглощает окрестность нуля в пространстве ${}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$, откуда следует, что оно само является окрестностью нуля.

Покажем, что из (ii) следует утверждение (i). Пусть $A \subset \mathcal{E}'(M, E^\bullet)$ равностепенно непрерывно. Рассмотрим такие $s \in \mathbb{R}$ и компакт $K \subset M$, что A содержится и ограничено в $H^s(K, M, E^\bullet)$. Пусть t и K' удовлетворяют условиям а) и б) из (ii). Выберем ограниченную окрестность нуля $U \subset H^t(K, M, F^\bullet)$, так что ${}^tL(U) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$ – окрестность нуля в ${}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$. Поскольку A ограничено, ${}^tL(U)$ поглощает ${}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap A$. Значит, найдётся такая постоянная $C > 0$, что $A \cap {}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \subset {}^tL(CU)$. Поскольку U ограничено в $H^t(K, M, F^\bullet)$, множество CU равностепенно непрерывно в $\mathcal{E}'(M, F^\bullet)$. Таким образом, оператор L удовлетворяет условиям (ii) леммы 1, что доказывает замкнутость образа оператора L .

Импликация (i) $\Rightarrow$ (iii) очевидна (заметим, что L -выпуклость следует из условия а) в (ii)), так что остаётся доказать импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i). Рассмотрим равностепенно непрерывное $A \subset \mathcal{E}'(M, E^\bullet)$ и выберем такие $s \in \mathbb{R}$ и компакт $K \subset M$, что $A \subset H^s(K, M, E^\bullet)$. Пусть $K' \subset \subset M$ – такой компакт, что $\text{supp } \phi \subset K'$ для всех таких $\phi \in \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$, что ${}^tL\phi \in H^s(K, M, E^\bullet)$. Наконец, пусть $U \subset M$ – произвольное относительно компактное открытое множество, содержащее K' . Мы утверждаем, что линейное пространство $R = \{\phi \in C^\infty(M, F) : \phi|_U = 0\}$ удовлетворяет условию (iii) леммы 1 для A . Действительно, если ${}^tL(\phi) \in A$, то $\text{supp } \phi \subset K'$ и $\phi \in R^\circ$. Второе условие на R (iii) из леммы 1 является прямым следствием полуглобальной нормальной разрешимости L . Так что утверждение (i) вытекает из леммы 1. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. $L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F)$ тогда и только тогда, когда многообразие M является L -выпуклым, а оператор L полуглобально разрешим.

Обычно полуглобальную (нормальную) разрешимость достаточно трудно проверить для данного оператора (исключение составляют операторы с постоянными коэффициентами на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$, для которых полуглобальная разрешимость вытекает из теоремы Мальгранжа–Эренпрейса, см. [2, теорема 7.3.10]). Поэтому в дальнейшем мы не будем пользоваться условием (iii) из теоремы 1, а сосредоточим внимание на условии (ii).

Упростим условия теоремы 1 для операторов, удовлетворяющих условиям регулярности (а именно, для операторов с r -гипоэллиптическим транспонированным). Пусть оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ гипоэллиптичен. Тогда для компакта $K \subset M$ введём обозначение $\ker_K L$ для пространства таких $\phi \in \mathcal{D}'(M, E)$, что $L\phi = 0$ и $\text{supp } \phi \subset K$. Гипоэллиптичность L влечёт за собой гладкость сечений из $\ker_K L$. Отметим, что $\ker_K L$ – замкнутое подпространство в $H^s(K, M, E)$ для любого $s \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M , а $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ r -гипоэллиптичен. Тогда выполнены следующие утверждения:

(i) пусть $K \subset M$ компактен, а s и t – такие вещественные числа, что $t < s + r$, пространство $T(t, s, K) = \{\phi \in H^t(K, M, E) : L\phi \in H^s(K, M, F)\}$ полно и нормируемо относительно проективной топологии, порождённой оператором вложения $T(t, s, K) \rightarrow H^t(K, M, E)$ и оператором $L : T(t, s, K) \rightarrow H^s(K, M, F)$;

(ii) пусть K , s , t такие же как в (i), тогда $T(t, s, K) \subset H^{s+r}(K, M, E)$ и оператор вложения непрерывен;

(iii) если $K \subset M$ компактен, $s \in \mathbb{R}$, а $\phi_n \in H^{s+r}(K, M, E)$ – такая последовательность, что $L\phi_n$ лежит в $H^s(K, M, F)$ и сходится там к нулю, то канонический образ ϕ_n в пространстве $H^{s+r}(K, M, E)/\ker_K L$ сходится к нулю (относительно фактор-топологии).

Доказательство. Пространство $T(t, s, K)$, очевидно, хаусдорфово, так как оператор вложения $T(t, s, K) \rightarrow H^t(K, M, E)$ инъективен и пространство $H^t(K, M, E)$ хаусдорфово. Пространство $T(t, s, K)$ также нормируемо, поскольку его топология проективна по отношению к конечному набору операторов в нормируемые пространства. Остаётся показать, что $T(t, s, K)$ полно. Пусть $\phi_n \in T(t, s, K)$ – последовательность Коши. Тогда ϕ_n и $L\phi_n$ – последовательности Коши в пространствах $H^t(K, M, E)$ и $H^s(K, M, F)$ соответственно, а значит, они сходятся там к $\phi \in H^t(K, M, E)$ и $\psi \in H^s(K, M, F)$ соответственно. Легко показать, что $L\phi = \psi$, так как оператор $L : \mathcal{E}'(M, E) \rightarrow \mathcal{E}'(M, F)$ непрерывен, а сходимости $\phi_n \rightarrow \phi$, $L\phi_n \rightarrow \psi$ имеют место в пространствах обобщённых сечений с компактным носителем. Значит, $\phi \in T(t, s, K)$ и очевидно, что $\phi_n \rightarrow \phi$ в топологии пространства $T(t, s, K)$. Таким образом, $T(t, s, K)$ полно и утверждение (i) доказано.

Вложение $T(t, s, K) \subset H^{s+r}(K, M, E)$ следует из r -гипоэллиптичности оператора L . Непрерывность оператора вложения элементарно следует из теоремы о замкнутом графике [14, теорема IV.8.5]. Таким образом, доказали (ii).

Зафиксируем $s \in \mathbb{R}$, обозначим через P пространство $H^{s+r}(K, M, E)/\ker_K L$, и пусть θ обозначает фактор-отображение из $H^{s+r}(K, M, E)$ в P . Заметим, что пространство P нормируемо, а значит, там есть ограниченная окрестность U нуля. Предположим, что утверждение (iii) не выполнено. Тогда найдётся такая последовательность $\psi_n \in H^{s+r}(K, M, E)$, что $\theta(\psi_n) \in P$ не сходится к нулю, а $L\psi_n$ лежит в $H^s(K, M, F)$ и сходится там к нулю. Очевидно, что можно найти такое число $\varepsilon > 0$, что некоторая подпоследовательность последовательности $\theta(\psi_n)$ лежит целиком вне εU . Не ограничивая общности, можем считать, что $\theta(\psi_n) \notin \varepsilon U$ для всех $n \in \mathbb{N}$, переходя к этой подпоследовательности. Наконец, найдутся такие числа $C_n > \varepsilon$, что $\theta(\psi_n)/C_n \in 2U \setminus U$. Получаем, что последовательность $\phi_n = \psi_n/C_n$ обладает следующими свойствами: $L\phi_n$ лежит в $H^s(K, M, F)$ и сходится там к нулю, притом что $\theta(\phi_n)$ – ограниченная последовательность в P , лежащая за пределами U . В частности, ни одна подпоследовательность в $\theta(\phi_n)$ не сходится к нулю в P . Поскольку $\theta(\phi_n)$ ограничена, а $H^s(K, M, E)$ нормируемо, найдётся такая ограниченная последовательность $\phi'_n \in H^s(K, M, E)$, что $\theta(\phi_n) = \theta(\phi'_n)$ для всех n . Пусть t – такое число, что $t < s + r$. Тогда найдётся подпоследовательность последовательности ϕ'_n , сходящаяся в $H^t(K, M, E)$ (см. предложение 1 (i)). Меняя обозначения, можем считать, что ϕ'_n сама сходится в $H^t(K, M, E)$ к некоторому элементу, который мы обозначим через ϕ . Поскольку последовательности ϕ'_n и $L\phi_n = L\phi'_n$ сходятся к ϕ и к нулю соответственно в топологии пространств $\mathcal{D}'$, а оператор $L : \mathcal{D}'(M, E) \rightarrow \mathcal{D}'(M, F)$ непрерывен, имеем

$$L\phi = \lim L\phi'_n = \lim L\phi_n = 0.$$

Таким образом, ϕ'_n сходится к ϕ в $H^t(K, M, E)$, а $L\phi'_n = L\phi_n$ сходится к $L\phi = 0$ в $H^s(K, M, F)$. По определению проективной топологии на $T(t, s, K)$ получаем, что ϕ'_n сходится к ϕ в этом пространстве. Отсюда, по утверждению (ii), сходимость имеет место в $H^{s+r}(K, M, E)$. Непрерывность оператора θ влечёт за собой

$$\theta(\phi_n) = \theta(\phi'_n) \rightarrow \theta(\phi) = 0,$$

так как $\phi \in \ker_K L$. Мы пришли к противоречию, поскольку $\theta(\phi_n)$ содержится в $P \setminus U$, где U – окрестность нуля. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Если оператор tL r -гипоэллиптичен для некоторого $r \in \mathbb{R}$, а многообразие M L -выпукло, то $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$.

Доказательство. Покажем, что L удовлетворяет условию (ii) из теоремы 1. Пусть $K \subset M$ компактно, а $s \in \mathbb{R}$. Поскольку M является L -выпуклым, найдётся такой компакт $K' \subset M$, что условия $\phi \in \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$ и ${}^tL\phi \in H^s(K, M, E^\bullet)$ влекут $\text{supp } \phi \subset K'$. Отсюда очевидно, что $t = r + s$ и K' удовлетворяют условию (ii), а) теоремы 1. Рассмотрим окрестность нуля $U \subset H^t(K', M, F^\bullet)$ и предположим, что ${}^tL(U) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$ не является окрестностью нуля в ${}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$. Тогда найдётся последовательность $\phi_n \in {}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$, сходящаяся к нулю и не лежащая в ${}^tL(U)$ для всех n .

Выберем произвольные $\psi_n \in H^t(K', M, F^\bullet)$ так, что ${}^tL\psi_n = \phi_n$ для всех n . Из леммы 2 (iii) следует, что образ ψ_n в пространстве $H^t(K', M, F^\bullet)/\ker_{{}^tL}$ сходится к нулю. Значит, найдётся такое n , что $\psi_n \in U + \ker_{{}^tL}$. Отсюда имеем

$$\phi_n = {}^tL\psi_n \in {}^tL(U + \ker_{{}^tL}) = {}^tL(U).$$

Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Стоит отметить, что компактное многообразие M L -выпукло для любого оператора L . Значит если tL r -гипоэллиптичен, то L имеет замкнутый образ, а предложение 1 (i) влечёт за собой конечномерность $\ker_M {}^tL$. Отсюда нетрудно вывести фредгольмовость таких операторов $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$, что L и tL оба r -гипоэллиптичны для некоторого $r \in \mathbb{R}$. По-видимому, более точной информации с помощью описанных выше методов в случае компактного многообразия получить невозможно. Изучение фредгольмовых дифференциальных операторов на компактных многообразиях (чаще всего эллиптических операторов) обычно основывается на методах алгебраической топологии и К-теории (детальное изложение см., например, в [15; 16, гл. 4, 5; 2, гл. 19, 20]).

3. Достаточное условие разрешимости в обобщённых сечениях. Далее покажем, что для гипоэллиптических операторов порядка k с k -гипоэллиптическим транспонированным оператором разрешимость в гладких сечениях влечёт за собой разрешимость в обобщённых сечениях. В частности, этот результат применим к эллиптическим операторам. Начнём со следующего простого результата о замкнутости образа в пространствах Соболева.

Предложение 2. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Предположим, что оператор tL k -гипоэллиптичен и пространство $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$. Тогда $L(H_{\text{loc}}^s(M, E))$ замкнуто в $H_{\text{loc}}^{s-k}(M, F)$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Поскольку $H_{\text{loc}}^s(M, E)$ и $H_{\text{loc}}^{s-k}(M, F)$ являются пространствами Фреше, а L действует там непрерывно, достаточно показать, что двойственный оператор имеет $*$ -слабо замкнутый образ (см. [14, IV.7.7]). Ввиду предложения 1 (ii) очевидно, что двойственный оператор отождествляется с ${}^tL : H_c^{-s+k}(M, F^\bullet) \rightarrow H_c^{-s}(M, E^\bullet)$. Пусть ϕ лежит в замыкании пространства ${}^tL(H_c^{-s+k}(M, F^\bullet))$ в $*$ -слабой топологии на $H_c^{-s}(M, E^\bullet)$. Очевидно, что $\phi \in {}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet))$, так как последнее пространство $*$ -слабо замкнуто в $\mathcal{E}'(M, E^\bullet)$ и вложение $H_c^{-s}(M, E^\bullet) \rightarrow \mathcal{E}'(M, E^\bullet)$ непрерывно в $*$ -слабых топологиях. Так что найдётся такое $\psi \in \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$, что $\phi = {}^tL\psi$. Из k -гипоэллиптичности оператора tL следует, что $\psi \in H_c^{-s+k}(M, F^\bullet)$, откуда получается, что ${}^tL(H_c^{-s+k}(M, F^\bullet))$ $*$ -слабо замкнуто. Предложение доказано.

Следствие 2. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Предположим, что оператор tL k -гипоэллиптичен и $L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F)$. Тогда $L(H_{\text{loc}}^s(M, E)) = H_{\text{loc}}^{s-k}(M, F)$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Введём некоторые обозначения. Если M – многообразие, а E – векторное расслоение над M , то через $C^\infty(E)$ (соответственно $\mathcal{D}'(E)$) обозначаем пучок гладких (соответственно обобщённых) сечений E , т.е. пучок, который сопоставляет пространство $C^\infty(U, E)$ (соответственно $\mathcal{D}'(U, E)$) открытому множеству $U \subset M$ со стандартными операторами ограничения. Для $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ обозначим той же буквой L морфизмы пучков $L : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ и $L : \mathcal{D}'(E) \rightarrow \mathcal{D}'(F)$, заданные оператором L . Отметим, что описанные выше пучки тонкие, а значит, и мягкие (см. [16, предложение 3.5]).

Теорема 3. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M , а оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ гипоэллиптичен. Предположим, что tL k -гипоэллиптичен и $L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F)$. Тогда $L(\mathcal{D}'(M, E)) = \mathcal{D}'(M, F)$.

Доказательство. Пусть $\ker L$ обозначает ядро морфизма пучков $L : \mathcal{D}'(E) \rightarrow \mathcal{D}'(F)$. Поскольку L гипоэллиптичен, очевидно, что $\ker L$ также является ядром морфизма $L : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$. Мы утверждаем, что морфизмы $L : \mathcal{D}'(E) \rightarrow \mathcal{D}'(F)$ и $L : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ являются эпиморфизмами (в смысле теории пучков). Действительно, эпиморфность L на пучках гладких сечений следует из сюръективности на глобальных сечениях и мягкости пучков. Эпиморфность морфизма на обобщённых сечениях вытекает из следствия 2, поскольку

L получается сюръективным на ростках обобщённых сечений в каждой точке многообразия M (каждое обобщённое сечение локально лежит в некотором пространстве Соболева). Таким образом, доказана точность последовательностей

$$0 \rightarrow \ker L \rightarrow C^\infty(E) \xrightarrow{L} C^\infty(F) \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \ker L \rightarrow \mathcal{D}'(E) \xrightarrow{L} \mathcal{D}'(F) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Первая из последовательностей в (3) приводит к длинной точной последовательности (см. [16, теорема II.3.11 (c)])

$$0 \rightarrow \ker L(M) \rightarrow C^\infty(M, E) \xrightarrow{L} C^\infty(M, F) \rightarrow H^1(\ker L) \rightarrow H^1(C^\infty(E)) \rightarrow \dots,$$

где оператор $L : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ сюръективен, а $H^1(C^\infty(E)) = 0$ (так как $C^\infty(E)$ мягкий, см. [16, теорема II.3.11 (a)]). Таким образом, $H^1(\ker L) = 0$. Наконец, вторая точная последовательность в (3) приводит к точности последовательности

$$0 \rightarrow \ker L(M) \rightarrow \mathcal{D}'(M, E) \xrightarrow{L} \mathcal{D}'(M, F) \rightarrow H^1(\ker L) = 0,$$

что доказывает сюръективность оператора $L : \mathcal{D}'(M, E) \rightarrow \mathcal{D}'(M, F)$. Теорема доказана.

4. Роль свойства единственности продолжения решений.

Определение 3. Пусть M – многообразие, а E и F – векторные расслоения над M . Дифференциальный оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ удовлетворяет свойству единственности продолжения решений, если для любого связного открытого множества $U \subset M$ и условий $L\phi = 0$ и $\text{supp } \phi \neq U$ следует, что $\phi = 0$ для $\phi \in C^\infty(U, E)$.

Отметим, что свойство единственности продолжения решений является локальным. Говоря точнее, если $\mathcal{U}$ это открытое покрытие M и ограничение L на каждый элемент $\mathcal{U}$ удовлетворяет этому свойству, то L удовлетворяет ему на многообразии M . Благодаря локальности мы можем применять известные результаты о единственности продолжения для операторов на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$ (таких как в [19] или [2, § 17.2]) к операторам на произвольных многообразиях.

Напомним, что топологическое пространство X называется *локально связным*, если для любого $x \in X$ найдётся базис связных окрестностей точки x . *Компонентой* пространства X называется непустое связное открыто-замкнутое подмножество X . Две различные компоненты пространства X не могут пересекаться. В дальнейшем будем использовать следующие свойства локально связных пространств: открытое подмножество локально связного пространства само локально связно, локально связное пространство совпадает с объединением своих компонент (см., например, [20, гл. 3]). Следующая лемма была доказана в работе [10], но для полноты изложения мы приведём её доказательство здесь.

Лемма 3. Пусть X – связное, локально связное, локально компактное, хаусдорфово топологическое пространство. Тогда если $K \subset X$ компактно, то объединение K и всех относительно компактных компонент пространства $X \setminus K$ является компактным подмножеством в X .

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ обозначает множество всех компонент пространства $X \setminus K$. Пусть $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ – подмножество относительно компактных элементов в $\mathcal{V}$. Рассмотрим произвольное относительно компактное открытое множество U , содержащее K . Поскольку $\partial U = \overline{U} \setminus U$ компактно, а $\mathcal{V}$ – дизъюнктное открытое покрытие ∂U , получаем, что ∂U пересекает только конечное число элементов $\mathcal{V}$ и, в частности, $\mathcal{V}_0$. Мы утверждаем, что если $V \in \mathcal{V}$ и $V \cap \partial U = \emptyset$, то $V \subset U$. Действительно, если $V \cap \partial U = \emptyset$, то $V = (V \cap U) \cup (V \setminus \overline{U})$. Так как V связно, то либо $V \cap U = \emptyset$, либо $V \setminus \overline{U} = \emptyset$. Значит, остаётся понять, что $V \cap U \neq \emptyset$. Заметим, что если $V \cap U = \emptyset$, то V замкнуто в X , поскольку $\overline{V} \cap K = \emptyset$. Но, кроме того, V открыто в X , что противоречит связности X . Значит, если $V \in \mathcal{V}$ и $V \cap \partial U = \emptyset$, то $V \subset U$. Таким образом, объединение K' множества K и всех элементов $\mathcal{V}_0$ содержится в объединении U и тех элементов $\mathcal{V}_0$, что пересекают ∂U . Следовательно, K' относительно компактно. Остаётся заметить, что K' замкнуто, так как $X \setminus K' = \bigcup_{V \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0} V$ открыто. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть M – связное некомпактное многообразие, E и F – векторные расслоения над M , а $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ гипоеллиптичен. Тогда выполнены следующие утверждения:

(i) если имеет место свойство единственности продолжения решений оператора L , то $L : \mathcal{E}'(M, E) \rightarrow \mathcal{E}'(M, F)$ инъективен;

(ii) предположим, что L удовлетворяет свойству единственности продолжения решений вне компакта $Q \subset M$ и пусть $K \subset M$ – компакт, тогда условия $\phi \in \mathcal{E}'(M, E)$ и $\text{supp } L\phi \subset K$ влекут $\text{supp } \phi \subset K'$, где K' – объединение $K \cup Q$ и всех относительно компактных компонент пространства $M \setminus (K \cup Q)$.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение (i) рассмотрим такое $\phi \in \mathcal{E}'(M, E)$, что $L\phi = 0$. Гипоеллиптичность L влечёт за собой $\phi \in C^\infty(M, E)$. Раз M связно и $\text{supp } \phi \neq M$, из свойства единственности продолжения решений следует, что $\phi = 0$.

Теперь докажем (ii). Пусть U – компонента $M \setminus (K \cup Q)$, не являющаяся относительно компактной. Поскольку $L\phi = 0$ всюду на U , из гипоеллиптичности следует, что $\phi \in C^\infty(U, E)$. Поскольку ϕ имеет компактный носитель и U не является относительно компактным, получаем, что $\phi = 0$ всюду на U из свойства единственности продолжения решений. Таким образом, $\text{supp } \phi \subset K'$. Лемма доказана.

Прямым следствием лемм 3 и 4, а также теоремы 2 является

Теорема 4. Пусть M – связное некомпактное многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Предположим, что оператор tL r -гипоеллиптичен для некоторого $r \in \mathbb{R}$. Если tL удовлетворяет свойству единственности продолжения решений вне некоторого компакта, то $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$. Если tL удовлетворяет свойству единственности продолжения решений всюду на M , то $L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F)$.

5. Примеры и приложения.

5.1. Операторы с аналитическими коэффициентами. На протяжении этого пункта будем использовать слово “аналитический” как синоним термина “вещественно аналитический”. В качестве источника по теории аналитических многообразий мы следуем книге [21].

Пусть M – аналитическое многообразие, а E и F – аналитические векторные расслоения над M . Определим подпространство $\text{Diff}_k^A(M, E, F) \subset \text{Diff}_k(M, E, F)$, состоящее из операторов с аналитическими коэффициентами. Отметим, что расслоение Vol_M также аналитично, и если $L \in \text{Diff}_k^A(M, E, F)$, то ${}^tL \in \text{Diff}_k^A(M, F^\bullet, E^\bullet)$ (это можно проверить прямым вычислением в картах). Будем использовать очевидное следствие из теоремы Петровского (см. [22]), а именно, если $L \in \text{Diff}_k^A(M, E, F)$ эллиптичен, $\phi \in \mathcal{D}'(M, E)$ и $L\phi = 0$, то ϕ – аналитическое сечение E . Отметим, что данное утверждение элементарно распространяется на операторы с аналитическими коэффициентами и инъективным главным символом. Как следствие, получаем свойство единственности продолжения решений для таких операторов.

Предложение 3. Пусть M – некомпактное связное аналитическое многообразие, E и F – аналитические векторные расслоения над M , а оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ имеет сюръективный главный символ. Тогда выполнены следующие утверждения:

(i) если L имеет аналитические коэффициенты за пределами компактного множества, то $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$;

(ii) если $L \in \text{Diff}_k^A(M, E, F)$, то $L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F)$;

(iii) если L эллиптичен и $L \in \text{Diff}_k^A(M, E, F)$, то $L(\mathcal{D}'(M, E)) = \mathcal{D}'(M, F)$.

Доказательство. Действительно, tL имеет инъективный главный символ, а потому он k -гипоеллиптичен, а также удовлетворяет свойству единственности продолжения решений всюду, где его коэффициенты аналитичны. Таким образом, все утверждения следуют из теорем 4 и 3. Предложение доказано.

Можно применить предложение 3 к оператору Коши–Римана

$$\bar{\partial}_{q,p}^E \in \text{Diff}_1^A(M, E \otimes \Lambda^{q,p} T^*M, E \otimes \Lambda^{q,p+1} T^*M),$$

где M – комплексно-аналитическое многообразие, а E – голоморфное векторное расслоение над M (определения см. в [16, § II.3]). Отметим, что при $p = \dim_{\mathbb{C}} M - 1$ этот оператор имеет

сюръективный символ (см. [16, пример IV.2.7]). Таким образом, мы можем доказать обнуление старшей группы когомологий Дольбо на связном некомпактном комплексно-аналитическом многообразии.

Следствие 3. Пусть M – некомпактное связное комплексно-аналитическое многообразие, а E – голоморфное векторное расслоение над M . Тогда группа когомологий Дольбо $H^{q,n}(M, E)$ равна нулю при $q \geq 0$ и $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

Частные случаи следствия 3 имеют полезные применения. В качестве примера можно привести простое доказательство классической теоремы Бенке–Штейна [23, § 26] о том, что некомпактные римановы поверхности являются многообразиями Штейна. Действительно, если X – некомпактная риманова поверхность, то по следствию 3 $H^{0,1}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, откуда элементарно выводятся теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Лёффлера для X (см. [23, § 26]). После этих замечаний завершение доказательства теоремы Бенке–Штейна не представляет труда. Кроме того, тривиальность группы $H^n(U, \mathcal{O})$ для открытого $U \subset \mathbb{C}^n$ использовалась в статье [24] для анализа скорости аппроксимации аналитических функций полиномами.

5.2. Эллиптические операторы второго порядка с вещественной главной частью на линейных расслоениях. Пусть M – многообразие, а E – вещественное векторное расслоение над M . Тогда на сечениях комплексификации $\mathbb{C}E = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ канонически определены операции взятия вещественной и мнимой частей, а также сопряжение. Морфизм $u : \mathbb{C}E \rightarrow \mathbb{C}F$ называется *вещественным*, если $u(\bar{\phi}) = \overline{u(\phi)}$ для любого сечения ϕ из E (или, что эквивалентно, u является комплексификацией морфизма вещественных расслоений $E \rightarrow F$). Более обобщённо, оператор $L \in \text{Diff}_k(M, \mathbb{C}E, \mathbb{C}F)$ имеет *вещественные коэффициенты*, если оператор $L\bar{\phi} = \overline{L\phi}$ для всех $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{C}E)$. Легко проверить, что данное определение эквивалентно тому, что L имеет вещественные коэффициенты в каждой карте, над которой E и F тривиализуются. Мы также будем говорить, что $L \in \text{Diff}_k(M, \mathbb{C}E, \mathbb{C}F)$ имеет *вещественную главную часть*, если главный символ $\sigma_k(L) : \pi^*\mathbb{C}E \rightarrow \pi^*\mathbb{C}F$ является вещественным морфизмом. Очевидно, что оператор с вещественными коэффициентами имеет вещественную главную часть. Также отметим, что если L имеет вещественные коэффициенты (или вещественную главную часть), то tL обладает тем же свойством (тут важно уточнить, что расслоение плотностей есть комплексификация расслоения вещественных плотностей $\text{Vol}_M^{\mathbb{R}}$, а значит $(\mathbb{C}E)^{\bullet}$ является комплексификацией расслоения $E^* \otimes_{\mathbb{R}} \text{Vol}_M^{\mathbb{R}}$).

Для скалярных эллиптических операторов с вещественной главной частью на открытых подмножествах в пространстве $\mathbb{R}^n$ известно свойство единственности продолжения решений (см., например, [19] или [2, теорема 17.2.6]). Отсюда получаем, что эллиптический оператор $L \in \text{Diff}_2(M, \mathbb{C}E, \mathbb{C}F)$ с вещественной главной частью удовлетворяет свойству единственности продолжения решений, если E и F одномерны (иначе говоря, являются линейными расслоениями). Поскольку tL наследует все необходимые свойства от оператора L , получаем следующий факт.

Предложение 4. Пусть M – связное некомпактное многообразие, E и F – вещественные линейные расслоения над M , $L \in \text{Diff}_2(M, \mathbb{C}E, \mathbb{C}F)$ – эллиптический оператор. Если L имеет вещественную главную часть за пределами некоторого компакта, то $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$. Если L всюду имеет вещественную главную часть, то

$$L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F) \quad \text{и} \quad L(\mathcal{D}'(M, E)) = \mathcal{D}'(M, F).$$

5.3. Оператор Ходжа–Лапласа–де Рама. Пусть M – риманово многообразие. Риманова метрика определяет положительную плотность на M . Пусть Ω_M^p обозначает векторное расслоение $\mathbb{S}L^p(T^*M)$, так что сечения Ω_M^p являются комплекснозначными p -формами на M (для удобства мы считаем Ω_M^p нулевым расслоением, если $p < 0$ или $p > \dim M$). Риманова метрика на M индуцирует эрмитову структуру на Ω_M^p . Через $d_p \in \text{Diff}_1(M, \Omega_M^p, \Omega_M^{p+1})$ обозначим дифференциал де Рама (для $p < 0$ или $p \geq n$ положим $d_p = 0$) и пусть $\delta_p = d_p^* \in \text{Diff}_1(M, \Omega_M^{p+1}, \Omega_M^p)$. Оператором Ходжа–Лапласа–де Рама будем называть эллиптический оператор $\Delta_p \in \text{Diff}_2(M, \Omega_M^p, \Omega_M^p)$, равный по определению $-(\delta_p d_p + d_{p-1} \delta_{p-1})$. В работе [16, пример IV.5.4] можно найти доказательство эллиптичности оператора Δ_p . В [19, с. 248] было показано, что Δ_p удовлетворяет условию единственности продолжения решений.

Предложение 5. Пусть M – связное некомпактное риманово многообразие. В этом случае $\Delta_p(C^\infty(M, \Omega_M^p)) = C^\infty(M, \Omega_M^p)$ и $\Delta_p(\mathcal{D}'(M, \Omega_M^p)) = \mathcal{D}'(M, \Omega_M^p)$.

Доказательство. По теореме 4 достаточно показать, что ${}^t\Delta_p$ удовлетворяет условию единственности продолжения решений. Ввиду того что $\Delta_p^* = \Delta_p$, это нетрудно вывести из (2) и свойства единственности продолжения решений оператора Δ_p . Предложение доказано.

Из предложения 5 выведем существование разложения Гельмгольца и обнуление старшей группы когомологий де Рама.

Следствие 4. Пусть M – связное некомпактное риманово многообразие. Тогда для любого $\omega \in C^\infty(M, \Omega_M^p)$ найдутся такие $\phi \in C^\infty(M, \Omega_M^{p-1})$ и $\psi \in C^\infty(M, \Omega_M^{p+1})$, что $\omega = \delta_p\phi + d_{p-1}\psi$. То же утверждение верно, если заменить гладкие сечения на обобщённые. Наконец, если ω – вещественнозначное сечение, то ϕ и ψ можно выбрать такими же.

Доказательство. Пусть $\omega' \in C^\infty(M, \Omega_M^p)$ удовлетворяет равенству $\Delta_p\omega' = \omega$. Тогда $\omega = \delta_p\phi + d_{p-1}\psi$, где $\phi = -d_p\omega'$ и $\psi = -\delta_{p-1}\omega'$. Для случая обобщённых сечений доказательство аналогично. Если же ω вещественнозначно, то, поскольку Δ_k , d_k и δ_k имеют вещественные коэффициенты, мы можем заменить ω' на $\text{Re}(\omega')$, так что ϕ и ψ тоже вещественнозначны. Следствие доказано.

Следствие 5. Пусть M – связное некомпактное многообразие. Тогда группа когомологий де Рама $H_{\text{dR}}^n(M)$ равна нулю при $n = \dim M$.

Доказательство. Пусть $\omega \in C^\infty(M, \Omega_M^n)$ – вещественнозначная форма. Выберем произвольную риманову метрику на M и применим следствие 4. Получаем существование такой вещественнозначной формы $\psi \in C^\infty(M, \Omega_M^{n-1})$, что $\omega = d_{n-1}\psi$. Таким образом, ω – точная форма, а значит, $H_{\text{dR}}^n(M) = 0$. Следствие доказано.

Отметим, что следствие 5 можно установить, не обращаясь к вопросам разрешимости уравнений в частных производных (см., например, [25, теоремы 17.32, 17.34]).

Автор благодарит центр дополнительного профессионального образования “Университет Сириус” за приглашение на образовательный модуль “Матричные методы и моделирование в науках о жизни и Земле” в 2022 г., в ходе которого были получены некоторые из результатов данной статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-286.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sagrалoff B.* Normal solvability of linear partial differential operators in $C^\infty(\Omega)$ // Geometrical Approaches to Differential Equations. Lect. Not. in Math. 2006. V. 810. P. 290–305.
2. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов. М., 1986.
3. *Duistermaat J.J., Hörmander L.* Fourier integral operators. II // Acta Math. 1972. V. 128. № 3–4. P. 183–269.
4. *Hörmander L.* Propagation of singularities and semiglobal existence theorems for (pseudo)differential operators of principal type // Ann. of Math. 1978. V. 108 (3). № 2. P. 569–609.
5. *Hounie J.* A note on global solvability of vector fields // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 94. № 1. P. 61–64.
6. *Rauch J., Wigner D.* Global solvability of the Casimir operator // Ann. of Math. 1976. V. 103. № 2. P. 229–236.
7. *Helgason S.* Solvability of invariant differential operators on homogeneous manifolds // Centro Internaz. Mat. Estivo. 1975. P. 281–310.
8. *Araújo G.* Regularity and solvability of linear differential operators in Gevrey spaces // Math. Nachr. 2018. V. 291. № 5–6. P. 729–758.
9. *Bunke U., Olbrich M.* Gamma-cohomology and the Selberg zeta function // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 467. P. 199–219.
10. *Rinehart L.* Elliptic operators on non-compact manifolds have closed range // <https://arxiv.org/abs/2203.07534>.
11. *Kazdan J.L.* Unique continuation in geometry // Comm. Pure Appl. Math. 1988. V. 41. № 5. P. 667–681.
12. *Grosser M., Kunzinger M., Oberguggenberger M., Steinbauer R.* Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity. Dordrecht, 2001.

13. *Grubb G.* Distributions and Operators. New York, 2009.
14. *Шеффер Х.* Топологические векторные пространства. М., 1971.
15. *Palais R.S.* Seminar on the Atiyah–Singer Index Theorem. Princeton, 1965.
16. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М., 1976.
17. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М., 2005.
18. *Antonić N., Burazin K.* On certain properties of spaces of locally Sobolev functions // Proc. of the Conf. on Appl. Math. and Sci. Comp. Dordrecht, 2005. P. 109–120.
19. *Aronszajn N.* A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order // J. Math. Pures. Appl. 1957. V. 36. № 9. P. 235–249.
20. *Munkres J.R.* Topology. Upper Saddle River, 2000.
21. *Kriegl A., Michor P.W.* The Convenient Setting of Global Analysis. Providence, 1997.
22. *Petrowsky I.G.* Sur l’analyticité des solutions des systèmes d’équations différentielles // Rec. Math. N. S. 1939. V. 5. № 47. P. 3–70.
23. *Форстер О.* Римановы поверхности. М., 1980.
24. *Smirnov M.* On the rate of polynomial approximations of holomorphic functions on convex compact sets // Complex Anal. Oper. Theory. 2023. V. 17. Art. 129.
25. *Lee J.M.* Introduction to Smooth Manifolds. Graduate Texts in Math. V. 218. New York, 2013.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт вычислительной математики
имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 02.09.2023 г.
После доработки 03.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.