ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 12, с. 1668–1679

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.957

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. **А. Б. Хасанов, Т. Г. Хасанов**

К нахождению решения задачи Коши для нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций применён метод обратной спектральной задачи. Предложены простой алгоритм построения уравнения Кортевега–де Фриза высокого порядка с нагруженными членами и вывод аналога системы дифференциальных уравнений Дубровина. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда, построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формулы первого следа, действительно удовлетворяет нагруженному нелинейному уравнению Кортевега–де Фриза. Кроме того, доказано, что если начальная функция является действительной π-периодической аналитической функцией, то и решение задачи Коши тоже является действительной аналитической функцией по переменной x, а также что если число π/n, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, является периодом начальной функции, то число π/n является периодом для решения задачи Коши по переменной x.

DOI: 10.31857/S0374064123120075, EDN: NVRNLU

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для нагруженного нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$q_t=a(t)q(x_0,t)(q_{xxx}-6qq_x)+b(t)q(x_1,t)q_x, \tag{1}$$

$$q(x,t)|_{t=0}=q_0(x),\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{2}$$

в классе бесконечнозонных π-периодических по x функций

$$q(x+\pi,t)=q(x,t)\in C_x^3(t>0)\bigcap C_t^1(t>0)\bigcap C(t\geqslant 0). \tag{3}$$

В уравнении (1) коэффициенты $a(t),b(t)\in C[0,\infty)$ – ограниченные действительные функции, а $x_0,x_1\in\mathbb{R}$.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма построения решения $q(x,t)$, $x\in\in\mathbb{R}$, $t>0$, задачи (1)–(3) в рамках метода обратной спектральной задачи для оператора Хилла

$$L(t)y\equiv -y''+q(x,t)y=\lambda y,\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{4}$$

Метод обратной задачи берёт своё начало с работы [1], в которой удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза

$$q_t-6qq_x+q_{xxx}=0,\quad q(x,t)|_{t=0}=q_0(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

сведением её к обратной задаче рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля

$$Ly\equiv -y''+q(x)y=\lambda y,\quad |q(x)|(1+|x|)\in L^1(\mathbb{R}).$$

Эта обратная задача рассеяния впервые была решена в статье [2], а затем рассматривалась в работах [3, 4] и др. В статье [5] отмечена универсальность метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) и обобщено уравнение КдФ с помощью введённого понятия высшего уравнения КдФ.

С помощью МОЗР для оператора Хилла, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун, в работах [6, 7] была доказана полная интегрируемость уравнения КдФ в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Более подробно эта теория изложена в монографиях [3, 4, 8, 9].

Отметим, что в задаче

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad q(x,0) = 2a\cos(2x), \quad a \neq 0,$$

нам не удалось найти для решения $q(x,t)$ аналог формулы Итса–Матвеева [6].

Известно [10], что если $q(x) = 2a\cos(2x)$, $a \neq 0$, то открыты все лакуны в спектре оператора Хилла $Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y$, $x \in \mathbb{R}$, иначе говоря, $q(x)$ – бесконечнозонный π-периодический потенциал. В связи с этим мы изучаем задачу Коши (1)–(3) в классе периодических бесконечнозонных функций. К данной задаче можно применить метод из статьи [11], при этом её решение получится в виде равномерно сходящегося функционального ряда. Следует отметить, что решения в классе периодических функций для нелинейных эволюционных уравнений в различных постановках изучались в работах [12–17].

В связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления, применяемых в агроэкосистеме (например, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги), существенно вырос интерес к нагруженным уравнениям. *Нагруженными дифференциальными уравнениями* в литературе принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы от решения, в частности значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Исследование таких уравнений представляет интерес как с точки зрения построения общей теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений. Среди работ, посвящённых нагруженным уравнениям, следует особо отметить работы А.М. Нахушева [18, 19] и А.И. Кожанова [20].

Уравнения вида (1) без нагруженного члена встречаются также в прикладной механике. Например, в [21, 22] система уравнений, описывающая распространение одномерных нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде, сводится к одному уравнению вида

$$u_\tau + \alpha(\tau)uu_\eta + \beta(\tau)u_{\eta\eta\eta} - \mu(\tau)u_{\eta\eta} + \left(\frac{k}{2\tau} + \delta(\tau)\right)u = 0.$$

В частности, при $\mu = 0$, $k = 1$, $\delta = 0$ показано, что при определённых условиях цилиндрические волны могут существовать в виде солитонов.

В настоящей работе предлагаются простой алгоритм построения уравнения КдФ высокого порядка с нагруженными членами и вывод аналога системы дифференциальных уравнений Дубровина. Отметим, что существуют несколько методов построения высших уравнений КдФ. Важно также уточнить, что найденное нами высшее уравнение КдФ также включает в себя и уравнение КдФ с нагруженными членами.

2. Вывод уравнения КдФ высокого порядка с нагруженными членами. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$q_t = P[q], \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{5}$$

с начальным условием

$$q(x,0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Здесь $q = q(x,t)$ – достаточно гладкая π-периодическая по x функция, а $P[q]$ – многочлен от q и его производных по x.

Построим многочлен $P[q]$ таким образом, чтобы задача Коши (5), (6) интегрировалась при помощи обратной задачи для оператора Хилла с коэффициентом $q(x,t)$:

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Обозначим через $y_n = y_n(x,t)$, $n \geqslant 1$, ортонормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \geqslant 1$, задачи Дирихле $(y(0,t) = 0,\ y(\pi,t) = 0)$ для уравнения (7).

Продифференцировав по t тождество $\xi_n(t) = (L(t)y_n, y_n)$, $n \geqslant 1$, и использовав симметричность оператора $L(t)$, будем иметь

$$\dot{\xi}_n(t) = \int\limits_0^\pi q_t y_n^2\, dx. \tag{8}$$

Подставим выражение (5) в формулу (8) и получим равенство

$$\dot{\xi}_n(t) = \int\limits_0^\pi P[q] y_n^2\, dx.$$

Ищем далее первообразную подынтегральной функции в виде квадратичной формы от y_n и y_n', т.е. пусть

$$(ay_n^2 + by_n {y'}_n + c{y'}^2_n)' = P[q]y_n^2, \tag{9}$$

где функции $a = a(x,t,\xi_n)$, $b = b(x,t,\xi_n)$, $c = c(x,t,\xi_n)$ не зависят от y_n и y_n'. Используя равенство $y_n'' = (q-\xi_n)y_n$ и приравнивая соответствующие коэффициенты, из (9) найдём

$$b = -c', \quad a = \frac{1}{2}c'' - c(q-\xi_n), \quad P[q] = \frac{1}{2}c''' - 2c'(q-\xi_n) - cq_x. \tag{10}$$

Левые части равенств (10) не зависят от ξ_n, поэтому и правые части также не должны зависеть от ξ_n. Функцию $c(x,t,\xi_n)$ будем искать в виде многочлена от ξ_n:

$$c(x,t,\xi_n) = \sum_{k=0}^N c_k(x,t,)\xi_n^{N-k}. \tag{11}$$

Подставив выражение (11) в (10), будем иметь

$$P[q] = 2c_0'(x,t)\xi_n^{N+1} + \sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2}c_k'''(x,t) - 2qc_k'(x,t) - q_x c_k(x,t) + 2c_{k+1}'(x,t)\right]\xi_n^{N-k} +$$

$$+\frac{1}{2}c_N'''(x,t) - 2qc_N'(x,t) - q_x c_N(x,t),$$

откуда с учётом независимости многочлена $P[q]$ от ξ_n получаем

$$c_0'(x,t) = 0, \quad c_{k+1}'(x,t) = -\frac{1}{4}[c_k'''(x,t) - 4qc_k'(x,t) - 2q_x c_k(x,t)], \quad k = \overline{0, N-1},$$

$$P[q] = \frac{1}{2}c_N'''(x,t) - 2qc_N'(x,t) - q_x c_N(x,t).$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$q_t = \frac{1}{2}c_N''' - 2qc_N' - q_x c_N, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{12}$$

где функция $c_N = c_N(x,t)$ выражается через $q = q(x,t)$ следующим образом: по заданным непрерывным функциям $d_k = d_k(t)$, $k = \overline{0, N}$, строим последовательность функций

$$c_0(x,t) = d_0(t), \quad c_{k+1}(x,t) = -\frac{1}{4}c_k''(x,t) + qc_k(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x q_x c_k(x,t)\, dx + d_{k+1}(t), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Так, например,

$$c_1(x,t) = \frac{1}{2}d_0(t)[q + q(0,t)] + d_1(t),$$

$$c_2(x,t) = \frac{1}{8}d_0(t)[-q_{xx} + 3q^2 + 2qq(0,t) + 3q^2(0,t)] + \frac{1}{2}d_1(t)[q + q(0,t)] + d_2(t)$$

и т.д.

Нелинейное уравнение (12) называется *высшим уравнением Кортевега–де Фриза.* В случае $N = 1$ оно принимает вид

$$q_t = \frac{1}{4}d_0(t)(q_{xxx} - 6qq_x) - \frac{1}{2}[2d_1(t) + d_0(t)q(0,t)]q_x.$$

В частности, при $d_0(t) = 0$ и $d_1(t) = -1$ отсюда получаем уравнение

$$q_t = q_x,$$

а при $d_0(t) = 4$, $d_1(t) = -2q(0,t)$ – уравнение КдФ

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x.$$

При $d_0(t) = 4a(t)q(0,t)$, $d_1(t) = -2a(t)q^2(0,t)$ получаем нелинейное уравнение КдФ с нагруженным членом

$$q_t = a(t)q(0,t)(q_{xxx} - 6qq_x),$$

а при $d_0(t) = 4$, $d_1(t) = c(t)q(0,t)$ – уравнение

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x.$$

Точно также можно найти и другие уравнения Кортевега–де Фриза с нагруженными членами:

$$q_t = a(t)q(x_0,t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1,t)q_x, \quad q_t = a(t)q(x_0,t)(q_{xxx} - 6qq_x) + P_1[q(x_1,t)]q_x.$$

В случае $N = 2$ уравнение (12) принимает вид

$$q_t = -\frac{1}{16}d_0(t)(q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x) +$$

$$+\frac{1}{8}(d_0(t)q(0,t) + 2d_1(t))(q_{xxx} - 6qq_x) - \frac{1}{8}(3d_0(t)q^2(0,t) + 4d_1(t)q(0,t) + 8d_2(t))q_x. \tag{13}$$

В частности, из (13) при $d_0 = -16$, $d_1 = 8q(0,t)$, $d_2 = 2q^2(0,t)$ получаем нелинейное уравнение

$$q_t = q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x.$$

В случае $d_0(t) = -16$ уравнение (13) можно записать как

$$q_t = q_{xxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x + P_1[q(0,t)](q_{xxx} - 6qq_x) + P_2[q(0,t)]q_x,$$

где

$$P_1[y] = a_0(t)y + a_1(t), \quad P_2[y] = a_0(t)y^2 + a_1(t)y + a_2(t).$$

3. Предварительные сведения. Далее для полноты изложения представим некоторые из основных свойств оператора Хилла.

Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор Хилла

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

где $q(x) \in C^1(\mathbb{R})$ – действительная π-периодическая функция, $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексный параметр. Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (14), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda)=1,\ c'(0,\lambda)=0$ и $s(0,\lambda)=0,\ s'(0,\lambda)=1.$ Функция $\Delta(\lambda)=c(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)$ называется *функцией Ляпунова.* Функции

$$\psi_{\pm}=c(x,\lambda)+\frac{s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda)\mp\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s(\pi,\lambda)}\,s(x,\lambda)$$

называются *решениями Флоке* уравнения (14).

Спектр оператора L представляет собой следующее множество [23, 24]:

$$\sigma(L)\equiv E=\{\lambda\in\mathbb{R}:|\Delta(\lambda)|\leqslant 2\}=\mathbb{R}\bigg\backslash\bigg\{(-\infty,\lambda_0)\bigcup\bigcup_{n=1}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\bigg\},$$

при этом интервалы $(-\infty,\lambda_0),\ \ (\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}),\ \ n\geqslant 1,$ называются *лакунами,* где $\lambda_0,\ \ \lambda_{4k-1},$ λ_{4k} – собственные значения периодической задачи $(y(0)=y(\pi),\ \ y'(0)=y'(\pi)),$ а $\lambda_{4k+1},$ λ_{4k+2} – собственные значения антипериодической задачи $(y(0)=-y(\pi),\ \ y'(0)=-y'(\pi))$ для уравнения (14).

Через $\xi_n,\ \ n\geqslant 1,$ обозначим собственные значения задачи Дирихле $(y(0)=0,\ \ y(\pi)=0)$ для уравнения (14), при этом имеют место включения $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}],\ \ n\geqslant 1.$

Определение 1. Числа $\xi_n,\ \ n\geqslant 1,$ вместе со знаками $\sigma_n=\operatorname{sign}\{s'(\pi,\xi_n)-c(\pi,\xi_n)\}=\pm 1,$ $n\geqslant 1,$ называются *спектральными параметрами оператора* $L.$

Определение 2. Спектральные параметры $\xi_n,\ \ \sigma_n,\ \ n\geqslant 1,$ и границы $\lambda_n,\ \ n\geqslant 0,$ спектра называются *спектральными данными оператора* $L.$

Задача нахождения спектральных данных оператора L называется *прямой спектральной задачей,* а восстановление потенциала $q(x)$ по спектральным данным – *обратной спектральной задачей* для оператора $L.$

Потенциал $q(x)$ определяется единственным образом (см. [25]) по спектральным данным $\{\lambda_{n-1},\xi_n,\sigma_n,n\geqslant 1\}.$

Если в уравнении (14) вместо $q(x)$ использовать $q(x+\tau),$ то границы $\lambda_n(\tau),\ \ n\geqslant 0,$ спектра получаемого оператора $L(\tau)y\equiv -y''+q(x+\tau)y=\lambda y$ не будут зависеть от параметра $\tau:$ $\sigma(L(\tau))=\sigma(L),\ \ \lambda_n(\tau)\equiv\lambda_n,\ \ n\geqslant 0,$ а спектральные параметры – будут: $\xi_n=\xi_n(\tau),\ \ \sigma_n=$ $=\sigma_n(\tau),\ \ n\geqslant 1.$ Эти спектральные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина

$$\dot{\xi}_n(\tau)=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\,th_n(\xi),$$

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{k\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\quad n\geqslant 1, \tag{15}$$

где знак $\sigma_n(\tau)=\pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}].$

Система дифференциальных уравнений Дубровина и формула первого следа

$$q(\tau)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau)) \tag{16}$$

приводят к методу решения обратной задачи.

Обратные задачи для конечнозонных потенциалов впервые были рассмотрены в работе [26], поиск их решений был сведён к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов. В статье [6] найдена явная формула для конечнозонных потенциалов. В случае конечнозонных потенциалов система дифференциальных уравнений (15) впервые была получена в [11], в случае периодических потенциалов – в [27], а для почти периодических бесконечнозонных потенциалов – в работе [4].

Отметим, что впервые формула типа (16) была получена в [28] в случае, когда в спектре оператора L имеется конечное число лакун. Позже аналогичные формулы следов удалось получить и другим авторам [4, 14, 29, 30].

В процессе изучения обратной спектральной задачи для оператора L найдена связь между гладкостью потенциала $q(x)$ и длиной лакун (см., например, [3, 27, 31, 32]).

Теорема 1 [3]. *Если* $q(x) \in \tilde{W}_2^n[0,\pi]$ *и* $\operatorname{Im} q(x) = 0$, *то собственные значения периодической и антипериодической задач для оператора* L *удовлетворяют равенствам*

$$\sqrt{\lambda_{2k-1}}, \sqrt{\lambda_{2k}} = k + \sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n+2} \frac{a_{2j+1}}{(2k)^{2j+1}} \mp \frac{|l_n(2k)|}{(2k)^{n+1}} + \frac{\gamma_k^{\pm}}{k^{n+2}}, \tag{17}$$

где a_{2j+1}, b_{2j+1} *не зависят от* k *и*

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt, \quad l_n(p) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi q^{(n)}(x)e^{-ipx}\,dx, \quad \sum_{k=0}^\infty |\gamma_k^\pm|^2 < \infty.$$

Здесь $\tilde{W}_2^n[0,\pi]$ – подпространство пространства Соболева $W_2^n[0,\pi]$, состоящее из функций $f(x) \in \tilde{W}_2^n[0,\pi]$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi)$, $k = \overline{0, n-1}$. Заметим, что $W_2^0[0,\pi] = \tilde{W}_2^0[0,\pi] = L_2[0,\pi]$.

Из асимптотических формул (17) вытекает следующая оценка для длин лакун:

$$\gamma_k = \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{1}{2^{n-1}} k^{-n} |l_n(2k)| + \frac{\alpha_k}{k^{n+1}}, \quad \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 < \infty. \tag{18}$$

Теорема 2 [27]. *Для экспоненциального убывания длины лакун оператора* L *с* π*-периодическим действительным потенциалом* $q(x)$ *необходима и достаточна аналитичность* $q(x)$.

Теорема 3 [33]. *Для того чтобы число* π/n, $n \geqslant 2$, *было периодом потенциала* $q(x)$ *оператора* L, *необходимо и достаточно исчезновение всех лакун, номера которых не кратны* n.

Эта теорема была доказана в статье [34] для $n = 2$.

4. Эволюция спектральных данных. Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть* $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, *– решение задачи (1)–(3). Тогда границы спектра* $\lambda_n(t)$, $n \geqslant 0$, *оператора* $L(t)$ *не зависят от параметра* t, *т.е.* $\lambda_n(t) = \lambda_n$, $n \geqslant 0$, *а спектральные параметры* $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n \geqslant 1$, *удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi)[a(t)q(x_0,t)(2q(0,t) + 4\xi_n(t)) - b(t)q(x_1,t)], \quad n \geqslant 1, \tag{19}$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\, \bar{h}_n(\xi), \quad \bar{h}_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{k=1,\ k\neq n}^\infty \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Здесь знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \geqslant 1,$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \geqslant 1$, – спектральные параметры оператора $L(0)$.

Доказательство. Пусть $q(x,t)$ – π-периодическая по x функция, удовлетворяющая уравнению (1). Обозначим через $y_n = y_n(x,t)$, $n \geqslant 1$, ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0,t) = 0$, $y(\pi,t) = 0$) для уравнения (4), соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \geqslant 1$. Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n(t)$, $n \geqslant 1$, и используя симметричность оператора $L(t)$, будем иметь

$$\dot{\xi}_n(t) = \int\limits_0^\pi q_t(x,t) y_n^2(x,t)\,dx. \qquad (20)$$

Используя уравнение (1), из равенства (20) получаем

$$\dot{\xi}_n(t) = \int\limits_0^\pi \{a(t)q(x_0,t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)qq_x\} y_n^2\,dx = I_1. \qquad (21)$$

Ищем первообразную подынтегральной функции в виде квадратичной формы от y_n и y_n', т.е. пусть

$$(ay_n^2 + by_n y'_n + cy'^2_n)' = [a(t)q(x_0,t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1,t)q_x]y_n^2, \qquad (22)$$

где функции $a = a(x,t,\xi_n)$, $b = b(x,t,\xi_n)$ и $c = c(x,t,\xi_n)$ не зависят от y_n и y_n'. Используя равенство $y_n'' = (q(x,t) - \xi_n(t))y_n$ и приравнивая коэффициенты, из (22) найдём

$$b = -c', \quad a = \frac{1}{2}c'' - c(q - \xi_n),$$

$$\frac{1}{2}c''' - 2c'(q - \xi_n) - cq_x = a(t)q(x_0,t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1,t)q_x. \qquad (23)$$

Нетрудно заметить, что

$$c(x,t,\xi_n) = 2a(t)q(x_0,t)q(x,t) + \alpha(t),$$

где $\alpha(t) = 4a(t)q(x_0,t)\xi_n(t) - b(t)q(x_1,t)$ удовлетворяет равенству (23).

Таким образом, при

$$a(x,t,\xi_n) = a(t)q(x_0,t)q_{xx} - [2a(t)q(x_0,t)q + 4a(t)q(x_0,t)\xi_n - b(t)q(x_1,t)](q - \xi_n),$$

$$b(x,t,\xi_n) = -2a(t)q(x_0,t)q_x, \quad c(x,t,\xi_n) = a(t)q(x_0,t)q(x,t) + 4a(t)q(x_0,t)\xi_n - b(t)q(x_1,t)$$

выполняется соотношение (22). Значит,

$$I_1 = (ay_n^2 + by_n y'_n + cy'^2_n)|_0^\pi = c(x,t,\xi_n)y'^2_n(x,t)|_0^\pi =$$

$$= [a(t)q(x_0,t)(2q(0,t) + 4\xi_n(t)) - b(t)q(x_1,t)][y'^2_n(\pi,t) - y'^2_n(0,t)]. \qquad (24)$$

Подстановка формулы (24) в (21) даёт

$$\dot{\xi}_n(t) = [y'^2_n(\pi,t) - y'^2_n(0,t)][a(t)q(x_0,t)(2q(0,t) + 4\xi_n(t)) - b(t)q(x_1,t)]. \qquad (25)$$

Так как собственные значения $\xi_n(t)$ задачи Дирихле для уравнения (4) простые, то получим

$$y_n(x,t) = \frac{1}{\alpha_n(t)} s(x,\xi_n(t),t),$$

где

$$\alpha_n^2(t) = \int\limits_0^\pi s^2(x,\xi_n(t),t)\,dx = s'(\pi,\xi_n(t),t)\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda},$$

откуда будем иметь равенство

$$y'^2_n(\pi,t) - y'^2_n(0,t) = \left(\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}\left(s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}\right).$$

Подставив в него выражение

$$s'(\pi,\xi_n(t),t)-\frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}=\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t))-4},$$

получим

$$y'^2_n(\pi,t)-y'^2_n(0,t)=\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t))-4}\left(\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}.$$

Здесь

$$\sigma_n(t)=\operatorname{sign}\left(s'(\pi,\xi_n(t),t)-\frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}\right).$$

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda)-4=4\pi^2(\lambda_0-\lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\lambda)(\lambda_{2k}-\lambda)}{k^4},\quad s(\pi,\lambda,t)=\pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\lambda}{k^2}$$

следует, что

$$y'^2_n(\pi,t)-y'^2_n(0,t)=2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(t).$$

Если подставим это равенство в (25), то получим систему (19).

Теперь докажем независимость от t собственных значений $\lambda_n(t)$, $n\geqslant 0$, периодической и антипериодической задач для уравнения (4). Обозначим через $\nu_n(x,t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_n(t)$, $n\geqslant 0$, периодической и антипериодической задач для уравнения (4). Действуя приведённым выше образом, получим равенство

$$\dot\lambda_n(t)=[a(t)q(x_0,t)(2q(0,t)+4\lambda_n(t))-b(t)q(x_1,t)][v'^2_n(\pi,t)-v'^2_n(0,t)],$$

из которого следует, что $\dot\lambda_n(t)=0$, $n\geqslant 0$, так как $\nu_n(0,t)=\pm\nu_n(\pi,t)$, $\nu'_n(0,t)=\pm\nu'_n(\pi,t)$. Это и означает независимость границы спектра оператора $L(t)$ от параметра t.

Следствие 1. *Обозначим через* λ_n, $n\geqslant 0$, $\xi^0_n(\tau)$, $\sigma^0_n(\tau)$, $n\geqslant 1$, *спектральные данные оператора*

$$L(\tau)y\equiv -y''+q_0(x+\tau)y=\lambda y,\quad x\in\mathbb{R},\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Пусть $q(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, *– решение задачи (1)–(3). Тогда спектральные данные* $\lambda_n(\tau,t)$, $n\geqslant 0$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\geqslant 1$, *оператора*

$$L(\tau,t)y\equiv -y''+q(x+\tau,t)y=\lambda y,\quad x\in\mathbb{R},\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n,$$

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))[a(t)q(x_0,t)(2q(\tau,t)+4\xi_n(\tau,t))-b(t)q(x_1,t)]. \tag{26}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)$ *меняется на противоположный при каждом столкновении точки* $\xi_n(\tau,t)$ *с границами своей лакуны* $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. *Кроме того, выполняются следующие начальные условия:*

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi^0_n(\tau),\quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma^0_n(\tau),\quad n\geqslant 1. \tag{27}$$

Замечание 1. С помощью формулы первого следа

$$q(\tau,t)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)) \tag{28}$$

систему дифференциальных уравнений (26) можно записать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi)\Bigg[a(t)\bigg(\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(x_0,t))\bigg)\bigg(2\lambda_0 +$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t))+4\xi_n(\tau,t)\bigg)-b(t)\bigg(\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(x_1,t))\bigg)\Bigg], \quad n \geqslant 1. \quad (29)$$

В результате замены переменных по формуле

$$\xi_n(\tau,t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t), \quad n \in \mathbb{N},$$

систему дифференциальных уравнений Дубровина (29) и начальные условия (27) можно записать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt} = H(x(\tau,t)), \quad x(\tau,0) = x^0(\tau) \in K,$$

где

$$K = \bigg\{x(\tau,t) = (x_1(\tau,t), x_2(\tau,t), \ldots, x_n(\tau,t), \ldots) \|x(\tau,t)\| = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})x_n(\tau,t) < \infty\bigg\},$$

$$H(x) = (H_1(x), H_2(x), \ldots, H_n(x), \ldots),$$

$$H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(\ldots, \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t), \ldots) \times$$

$$\times f_n(\ldots, \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t), \ldots) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(x(\tau,t)) f_n(x(\tau,t)),$$

$$g_n(\xi(\tau,t)) = a(t)\bigg(\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}\lambda_{2k}-2\xi_k(x_0,t))\bigg)\bigg(4\xi_n(\tau,t)+2\lambda_0+2\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}-\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t))\bigg)-$$

$$-\,b(t)\bigg(\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}-\lambda_{2k}-2\xi_k(x,t))\bigg),$$

$$f_n(\xi(\tau,t)) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_0)\prod_{k=1,\ k\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$\xi = \xi(\tau,t) = (\xi_1(\tau,t), \xi_2(\tau,t), \ldots, \xi_n(\tau,t), \ldots),$$

$$\sigma = \sigma(\tau,t) = (\sigma_1(\tau,t), \sigma_2(\tau,t), \ldots, \sigma_n(\tau,t), \ldots),$$

$$x = x(\tau,t) = (x_1(\tau,t), x_2(\tau,t), \ldots, x_n(\tau,t), \ldots).$$

Лемма. *Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in \in C^4(\mathbb{R})$, то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве K, т.е. существует константа $L > 0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t), y(\tau,t) \in K$ выполняется следующее неравенство:*

$$\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\| \leqslant L\|x(\tau,t) - y(\tau,t)\|,$$

где

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \gamma_n < \infty.$$

Таким образом, условие Липшица выполняется. Поэтому решение задачи Коши (26), (27) для всех $t > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *существует и единственно.*

Следствие 2. *Лемма даёт метод решения задачи (1)–(3). Обозначим через* λ_n, $n \geqslant 0$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$, *спектральные данные оператора* $L(\tau,t)$. *Сначала найдём спектральные данные* λ_n, $n \geqslant 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geqslant 1$, *для оператора* $L(\tau)$. *После этого в уравнении (29) и в начальных условиях (27) последовательно положим* $\tau = x_0$ *и* $\tau = x_1$. *Решив полученные задачи Коши, найдём* $\xi_n(x_0,t)$ *и* $\xi_n(x_1,t)$. *Затем из формулы (28) определим функции* $q(x_0,t)$ *и* $q(x_1,t)$. *Далее, подставив эти данные в систему уравнений (26) и решив задачу Коши (26), (27) при произвольном значении* τ, *получим* $\xi_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$. *Из формулы следов (28) найдём* $q(\tau,t)$.

До сих пор мы предполагали, что задача Коши (1)–(3) имеет решение. От этого предположения нетрудно освободиться, непосредственно убедившись, что полученная таким способом функция $q(\tau,t)$ действительно удовлетворяет уравнению (1).

Замечание 2. Покажем, что найденная функция $q(\tau,t)$ действительно удовлетворяет уравнению (1). Для этого используем систему уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi), \quad n \geqslant 1, \tag{30}$$

и вторую формулу следов

$$q^2(\tau,t) - \frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t) = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau,t)). \tag{31}$$

Из систем (26) и (30) имеем

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = [-a(t)q(x_0,t)(2q(\tau,t) + 4\xi_n(\tau,t)) + b(t)q(x_1,t)]\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau}. \tag{32}$$

Продифференцировав формулу первого следа (28) по t, с учётом (32) найдём

$$q_t = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial t} = 2a(t)q(x_0,t)\left(2q(\tau,t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}\right) - 2b(t)q(x_1,t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}. \tag{33}$$

Далее продифференцировав по τ формулы следов (28) и (31), будем иметь

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = -q_\tau, \quad 4\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = \frac{1}{2}q_{\tau\tau\tau} - 2qq_\tau.$$

Используя эти равенства, из (33) выводим

$$q_t = a(t)q(x_0,t)(q_{\tau\tau\tau} - 6qq_\tau) + b(t)q(x_1,t)q_\tau.$$

Замечание 3. Равномерная сходимость рядов в указанных выше формулах следует из (18) и оценки (см. [4, 27])

$$c_1 n \leqslant |\bar{h}_n(\xi)| \leqslant c_2 n, \quad n \geqslant 1,$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ не зависят от n.

Теорема 5. *Пусть функция* $q_0(x)$ *удовлетворяет условию*

$$q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^4(\mathbb{R}).$$

Тогда существует решение $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, *задачи (1)–(3), однозначно определяемое по формуле (28) и принадлежащее классу*

$$C_x^3(t>0)\bigcap C_t^1(t>0)\bigcap C(t \geqslant 0).$$

Следствие 3. *Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной π-периодической аналитической функцией, то решение $q(x,t)$ задачи (1)–(3) тоже является действительной аналитической функцией по x.*

Это утверждение следует из теоремы Трубовица [27]. Так как длины лакун, соответствующие потенциалу $q_0(x)$, убывают экспоненциально, а потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, то $q(x,t)$ является действительной аналитической функцией по x.

Следствие 4. *Если число π/n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, является периодом начальной функции $q_0(x)$, то лакуны, номера которых не делятся на n, исчезают. Потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, значит, по теореме Хохштадта, число π/n является периодом и для функции $q(x,t)$ по переменной x. Здесь лакуна $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ имеет номер k.*

Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$q_t = a(t)q(x_0,t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1,t)q_x,$$

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x) \equiv 2\wp(x - \bar{x}_0) + \frac{c}{6},$$

где $\wp(z)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, т.е. однозонный потенциал, задаваемый спектром $E = [\lambda_0, \lambda_1] \bigcup [\lambda_2; \infty)$ и спектральными параметрами $\xi_0(0) \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $\sigma_0(0) = \pm 1$, а $c = +2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)$.

Нетрудно видеть, что решение этой задачи определяется по формуле

$$q(x,t) = 2\wp\left(x + \int_0^t b(\tau)q(x_1,\tau)\,d\tau + c\int_0^t a(\tau)q(x_0,\tau)\,d\tau - \bar{x}_0\right) + \frac{c}{6}.$$

Таким образом, при наличии нагруженного коэффициента или члена в уравнении КдФ скорость распространения периодической бегущей волны в зависимости от коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ увеличивается или уменьшается, а амплитуда не меняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R.* A method for solving the Korteveg–de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1098.
2. *Фаддеев Л.Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шрёдингера // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1964. Т. 73. С. 314–336.
3. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
4. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М., 1984.
5. *Lax P.D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure and Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467–490.
6. *Итс А.Р., Матвеев В.Б.* Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза // Журн. теор. и мат. физики. 1975. Т. 23. № 1. С. 51–68.
7. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза // Журн. эксп. и теор. физики. 1974. Т. 67. № 12. С. 2131–2143.
8. *Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев, 1987.
9. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М., 1980.
10. *Ince E.L.* A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathien functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1922. V. 21. P. 117–120.
11. *Дубровин Б.А.* Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. Вып. 3. С. 41–51.
12. *Grinevich P.G., Taimanov I.A.* Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2008. V. 224. P. 125–138.

13. *Khasanov A.B. Yakshimuratov A.B.* The almos-periodicity of infinite-gap potentials of the Dirac operator // Dokl. Math. 1996. V. 54. № 2. P. 767–769.
14. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Обратная задача на полуоси для оператора Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 1. С. 23–33.
15. *Смирнов А.О.* Эллиптические решения нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза // Мат. сб. 1994. Т. 185. № 8. С. 103–114.
16. *Lax P.* Almost periodic solutions of the KdF equation // SCAM Rev. 1976. V. 18. № 3. P. 351–575.
17. *Домрин А.В.* Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74. № 3. С. 23–44.
18. *Нахушеев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.
19. *Нахушеев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
20. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. С. 694–716.
21. *Луговцов А.А.* Распространение нелинейных волн в газожидкостной среде. Точные и приближённые аналитические решения волновых уравнений // Прикл. механика и техн. физика. 2010. Т. 51. № 1. С. 54–61.
22. *Луговцов А.А.* Распространение нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде. Вывод волновых уравнений в приближении Кортевега–де Фриза // Журн. теор. и мат. физики. 2009. Т. 50. № 2. С. 188–197.
23. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М., 1960.
24. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М., 1961.
25. *Станкевич И.В.* Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 1. С. 34–37.
26. *Ахиезер Н.И.* Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. № 2. С. 262–266.
27. *Trubowtz E.* The inverse problem for periodic potentials // Comm. Pure. Appl. Math. 1977. V. 30. P. 321–337.
28. *Hochstadt H.* On the determination of Hill's equation from its spectrum // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. V. 19. P. 353–362.
29. *Mckean H.P., Moerbeke P.* The spectrum of Hill's equation // Invent. Math. 1975. V. 30. № 3. P. 217–274.
30. *Flachka H.* On the inverse problem for Hill's operator // Arch. Rational Mech. Anal. 1975. V. 59. № 4. P. 293–309.
31. *Hochstadt H.* Estimates on the stability interval's for the Hill's equation // Proc. AMS. 1963. V. 14. P. 930–932.
32. *Левитан Б.М., Гусейнов Г.Ш.* Вычисление главного члена асимптотики длины лакуны периодической задачи Штурма–Лиувилля // Сердика Българско математическо списание. 1977. Т. 3. С. 273–280.
33. *Hochstadt H.* A generalization of Borg's inverse theorem for Hill's equations // J. Math. Anal. and Appl. 1984. V. 102. P. 599–605.
34. *Borg G.* Eine umkehrung der Sturm–Liouvillschen eigenwertaufgable. Bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwete // Acta Math. 1946. V. 78. P. 1–96.

Самаркандский государственный университет,
Узбекистан,
Ургенчский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 29.12.2020 г.
После доработки 23.10.2023 г.
Принята к публикации 13.11.2023 г.