

УДК 517.977

## ПОИСК ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ С НАИЛУЧШЕЙ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТЬЮ

© 2023 г. М. А. Велищанский, В. Н. Четвериков

Исследуется задача оптимального выбора параметров модели относительно какого-либо функционала. Рассматриваются локально управляемые аффинные системы и интегральные функционалы, зависящие от программного управления. Доказывается локальная управляемость аффинных систем с неотрицательными входами в случае, когда столбцы при управлениях образуют положительный базис. Для таких систем вводится коэффициент локальной управляемости и ставится задача его максимизации в зависимости от выбора параметров модели. В качестве примера рассматривается очень упрощённая модель подводного аппарата и исследуется задача такого расположения его управляющих винтомоторных агрегатов, при котором энергопотребление аппарата минимально.

DOI: 10.31857/S0374064123120099, EDN: NWKEBC

**Введение.** В настоящее время существует множество видов автономных необитаемых подводных аппаратов, отличающихся размерами, формой, областью применения, видами и расположением управляющих агрегатов и т.д. Задача выбора аппарата, оптимального в том или ином смысле, решается, как правило, из механических или технических соображений. Например, в работах [1, 2] задача снижения энергопотребления подводного аппарата решалась с использованием обтекаемой конструкции корпуса и разрабатываемой в этих работах системы управления солнечной энергией и энергией подводного аппарата.

Хорошо известно [3, с. 48], что движение подводного аппарата описывает динамическая система управления с параметрами. Выбор параметров определяет, в частности, вид и расположение управляющих агрегатов подводного аппарата. Энергия, потребляемая аппаратом, равна интегральному функционалу, зависящему от управления системы. Задача поиска модели подводного аппарата с минимальным потреблением энергии формулируется на математическом языке как задача поиска параметров системы, при которых указанный функционал минимален. Аналогичные задачи формулируются для летательных аппаратов и наземных транспортных средств, а также для других функционалов, например, характеризующих время движения. Задача сравнения однотипных роботов по тому или иному критерию с использованием математических методов актуальна ввиду бурного развития робототехники в настоящее время.

Отметим, что рассматриваемая в работе задача близка задаче оптимального управления по какому-либо критерию. Например, задачи оптимального управления по критерию быстрого действия решались для перехвата движущейся по предписанной траектории цели машиной Дубинса [4, 5] и для системы, состоящей из двух несинхронных осцилляторов [6].

Цель данной статьи – попытаться разработать математические методы для сравнения однотипных моделей по тому или иному критерию. Мы не используем методы теории оптимального управления ввиду сложности их применения к данной задаче. Наш подход основан на предположении, что в малой окрестности каждого допустимого состояния любая траектория системы возможна и равновероятна. Из этого следует, в частности, локальная управляемость системы. Кроме того, локальную траекторию системы можно считать случайной величиной. Тогда значение функционала также есть случайная величина, а поставленную задачу можно понимать как задачу минимизации математического ожидания значения функционала. Коэффициент локальной управляемости системы относительно заданного функционала, определяемый нами как величина обратно пропорциональная указанному математическому ожиданию, мы предлагаем использовать для сравнения систем с разными значениями параметров.

Для упрощения определений и вычислений далее будем рассматривать только аффинные системы с неотрицательными входами. Локальная управляемость таких систем исследуется с использованием понятия положительного базиса, введённого в работах [7, 8]. Докажем простой метод проверки положительного базиса, а также достаточное условие локальной управляемости систем указанного типа.

В качестве иллюстрации рассмотрен пример движения в вертикальной плоскости подводного аппарата, управляемого винтомоторными агрегатами (ВМА). Предполагаем, что тяга каждого ВМА может быть направлена только в одну сторону. Показано, что такое движение описывает аффинная система с неотрицательными управлениями, параметрами которой являются количество ВМА и их расположение. Доказано, что данная система локально управляема только в случае четырёх и более ВМА, расположенных определённым образом. В качестве функционала, используемого для сравнения систем с разным расположением ВМА, мы рассматриваем потребляемую энергию двигателями аппарата. Коэффициент локальной управляемости системы относительно этого функционала вычислен для разных значений параметров. Найдены несколько точек локального максимума и соответствующие значения функционала на четырёх выбранных траекториях.

Статья организована следующим образом. В п. 1 ставится задача и формулируется пример. Определения локально управляемой системы и положительного базиса, а также факты о них содержатся в п. 2. Алгоритм управления системами с положительным базисом формулируется в п. 3. В п. 4 определяется коэффициент управляемости и вычисляется для рассматриваемого примера, сравниваются системы с разными значениями параметров.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему

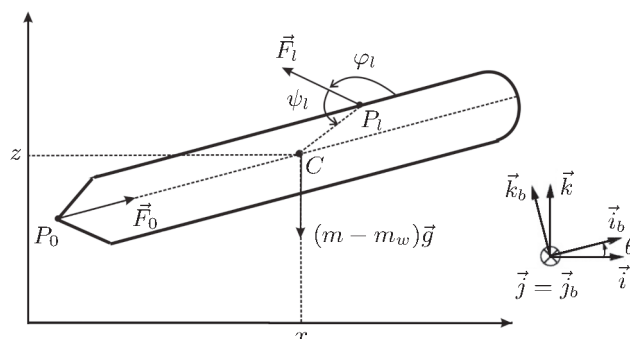
$$\dot{x} = f(x, u, \alpha), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – состояние системы,  $u = (u_1, \dots, u_m)$  – её управления,  $\mathcal{X}$  – область допустимых состояний,  $\mathcal{U}$  – область допустимых управлений,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  – набор параметров, а  $\dot{x} \equiv dx/dt$ .

Пусть для системы (1) ставится задача выбора таких параметров  $\alpha$ , для которых минимален следующий функционал. Рассмотрим гладкую неотрицательную при  $x \in \mathcal{X}$  и  $u \in \mathcal{U}$  функцию  $\Phi(x, u)$  и отображение, которое каждому решению  $(x(t), u(t))$  системы (1) ставит в соответствие интеграл по промежутку  $[0, T]$  функции  $\Phi(x(t), u(t))$ . Упомянутый функционал равен максимальному по решениям системы (1) значению этого отображения, т.е.

$$\max_{(x(t), u(t))} \int_0^T \Phi(x(t), u(t)) dt. \tag{2}$$

**Пример 1.** Рассмотрим упрощённую модель подводного аппарата, эволюция которого ограничена в вертикальной плоскости (рисунок). Пусть  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  – ортонормированный базис неподвижной системы координат, а  $(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$  – ортонормированный базис подвижной системы координат, прикрепленной к подводному аппарату. Обозначим через  $\theta$  угол между этими системами координат. Аппарат имеет один более мощный винтовой двигатель (с номером 0) для движения вперед и  $l_m$  винтовых двигателей малой мощности для разворота. Обозначим через  $P_0, P_1, \dots, P_{l_m}$  точки расположения винтов.



**Рисунок.** Упрощённая модель подводного аппарата.

На подводный аппарат действуют силы

$$\vec{F}_0 = F_0 \vec{i}_b, \quad \vec{F}_l = F_l (\cos \phi_l \vec{i}_b + \sin \phi_l \vec{k}_b), \quad l = \overline{1, l_m},$$

$$(m - m_w)\vec{g} = -(m - m_w)g\vec{k},$$

где  $m$  – масса подводного аппарата;  $m_w$  – масса воды, вытесненной подводным аппаратом;  $\phi_l$  – угол между  $\vec{i}_b$  и  $\vec{F}_l$ ,  $\psi_l$  – угол между  $\vec{F}_l$  и  $\vec{CP}_l$ . Вес  $m\vec{g}$  и выталкивающая сила  $-m_w\vec{g}$  прикладываются к центру масс  $C$ ; сила  $\vec{F}_l$  прикладывается к точке  $P_l$ ,  $l = \overline{0, l_m}$ , где

$$\vec{CP}_l = -|\vec{CP}_l|(\cos(\psi_l + \phi_l)\vec{i}_b + \sin(\psi_l + \phi_l)\vec{k}_b).$$

Уравнения движения, записанные в терминах центра масс  $C$ , имеют вид

$$m\dot{\vec{v}}_C = (m - m_w)\vec{g} + \sum_{l=0}^{l_m} \vec{F}_l, \quad \dot{\vec{L}}_C = \sum_{l=0}^{l_m} \vec{CP}_l \times \vec{F}_l,$$

где  $\vec{v}_C$  – скорость,  $\vec{L}_C$  – угловой момент относительно  $C$ . Спроецировав эти уравнения на неподвижные оси, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \cos\theta \left( u_0 + \sum_{l=1}^{l_m} u_l \cos\phi_l \right) - \sin\theta \sum_{l=1}^{l_m} u_l \sin\phi_l, \\ \ddot{z} &= \sin\theta \left( u_0 + \sum_{l=1}^{l_m} u_l \cos\phi_l \right) + \cos\theta \sum_{l=1}^{l_m} u_l \sin\phi_l - \kappa g, \quad \ddot{\theta} = \sum_{l=1}^{l_m} \kappa_l u_l \sin\psi_l, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$u_0 = \frac{F_0}{m}, \quad \kappa = \frac{m - m_w}{m}, \quad u_l = \frac{F_l}{m}, \quad \kappa_l = \frac{m|\vec{CP}_l|}{J}, \quad l = \overline{1, l_m},$$

$J$  – момент инерции подводного аппарата относительно оси  $Oy$ . Так как тяга каждого ВМА может быть направлена только в одну сторону, то  $u_l \geq 0$ ,  $l = \overline{0, l_m}$ .

Параметрами данной системы являются  $l_m$ ,  $\phi_l$ ,  $\psi_l$ ,  $|\vec{CP}_l|$ , т.е. количество винтов и их расположение. В качестве функции  $\Phi(x, \bar{u})$ , определяющей функционал (2), возьмём функцию  $\Phi = \sum_{i=0}^{l_m} u_i$ . Тогда функционал пропорционален потребляемой энергии всеми двигателями аппарата.

**2. Условия локальной управляемости.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m. \quad (4)$$

Напомним, что состояние  $x_f \in D \subset \mathcal{X}$  называют *достижимым из состояния*  $x_0 \in D \subset \mathcal{X}$  в области  $D$ , если существует решение  $(x(t), u(t))$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , системы (4), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad x(t_f) = x_f, \\ x(t) &\in D, \quad u(t) \in \mathcal{U} \quad \text{при } t \in [t_0, t_f]. \end{aligned} \quad (5)$$

Систему (4) называют *управляемой в области*  $D \subset \mathcal{X}$ , если любое состояние  $x_f \in D$  достижимо из любого состояния  $x_0 \in D$  в области  $D$ .

**Пример 2.** Запишем систему (3) как

$$\begin{aligned} u_0 + \sum_{l=1}^{l_m} u_l \cos\phi_l &= \cos\theta \ddot{x} + \sin\theta (\ddot{z} + \kappa g), \quad \sum_{l=1}^{l_m} u_l \sin\phi_l = -\sin\theta \ddot{x} + \cos\theta (\ddot{z} + \kappa g), \\ \sum_{l=1}^{l_m} \kappa_l u_l \sin\psi_l &= \ddot{\theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) имеет вид

$$\sum_{l=0}^{l_m} u_l a_l(\bar{x}) = \zeta(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(s)}), \quad \bar{x} \in \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n, \quad \bar{u} = (u_0, \dots, u_{l_m})^T \in \mathcal{U}, \quad u_l \geq 0, \quad l = \overline{0, l_m}. \quad (7)$$

А именно, для системы (6)  $n = 3$ ,  $s = 2$ ,  $\bar{x} = (x, z, \theta)^T$ ,  $a_0, \dots, a_{l_m}$  – столбцы высоты 3, зависящие только от параметров системы.

Для системы (7) обозначим через  $M$  матрицу, состоящую из столбцов  $a_0, a_1, \dots, a_{l_m}$ . Если  $\text{rang } M = n$ , то для любой векторной функции  $\bar{x}(t) \in D \subset \mathcal{X}_0$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , существует векторная функция  $\bar{u}(t) = (u_0(t), \dots, u_{l_m}(t))^T$ , удовлетворяющая вместе с  $\bar{x}(t)$  системе (7). Если при этом  $\bar{u}(t) \in \mathcal{U}$  и  $u_l(t) \geq 0$  для  $t \in [t_0, t_f]$  и  $l = \overline{0, l_m}$ , то пара векторных функций  $(\bar{x}, \bar{u}(t))$  удовлетворяет всем условиям (7).

Областью достижимости состояния  $x_f \in \mathcal{X}$  за время  $T > 0$  в области  $D \subset \mathcal{X}$  будем называть множество таких состояний  $x_0 \in \mathcal{X}$ , что существует решение  $(x(t), u(t))$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , системы (4), удовлетворяющее условиям (5) при  $t_f - t_0 < T$ .

Систему (4) будем называть локально управляемой в точке  $x_f \in \mathcal{X}$ , если для любого  $T > 0$  область достижимости состояния  $x_f$  за время  $T$  в области  $\mathcal{X}$  содержит окрестность точки  $x_f$  (см. [8]). Система (4) локально управляема в области  $\mathcal{X}$ , если она локально управляема в любой точке  $x_0 \in \mathcal{X}$ .

**Замечание.** В определении локальной управляемости рассматриваются траектории системы, которые начинаются в произвольной точке  $x_0 \in \mathcal{X}$  и заканчиваются в заданной точке  $x_f$ , а не наоборот. Такой выбор объясняется тем, что в начальный момент, как правило, определены значения  $u$ , а в конечный момент мы можем считать компоненты  $u$  произвольными.

Существуют системы, которые управляемы, но не локально управляемы.

**Пример 3.** Рассмотрим подводный аппарат с тремя винтами, т.е.  $l_m = 2$ . Пусть винты расположены так, что  $\phi_1 = \pi/2$ ,  $\psi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = 3\pi/4$ ,  $\psi_2 = \pi/2$ . Третье уравнение системы (3) имеет вид  $\ddot{\theta} = \kappa_2 u_2$ . Поскольку  $u_2 \geq 0$ , то угол  $\theta$  может только расти, т.е. аппарат может поворачиваться только против часовой стрелки. Чтобы повернуть аппарат на угол  $\theta_0 > 0$  по часовой стрелке, необходимо повернуть его на угол  $2\pi - \theta_0$  против часовой стрелки. Если угол  $\theta_0$  мал, то угол  $2\pi - \theta_0$  не является малым, и сколь угодно уменьшать время движения нельзя, потому что  $u_2$  ограничено сверху. Таким образом, система не локально управляема, хотя управляема, если нет ограничения на время движения. Например, при движении из начального состояния в конечное достаточно сначала развернуть аппарат, а потом двигаться по прямой.

Для формулировки условий локальной управляемости в случае  $u_l \geq 0$ ,  $l = \overline{0, l_m}$ , нам понадобятся следующие понятия и результаты из работ [7, 8]. Говорят, что векторы  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^N$  составляют *положительный базис* пространства  $\mathbb{R}^N$ , если для каждого  $a \in \mathbb{R}^N$  найдутся такие неотрицательные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , что  $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$ .

Сформулируем некоторые свойства положительного базиса, доказанные в [7, 8].

**Свойство 1.** Всегда существует положительный базис размерности  $N + 1$ , т.е.  $m = N + 1$ .

**Свойство 2.** Для любого положительного базиса имеем  $m \geq N + 1$ .

**Свойство 3.** Пусть векторы  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^N$  составляют положительный базис. Тогда найдутся такие положительные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , что  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ .

**Свойство 4.** Среди векторов, составляющих положительный базис, найдётся  $N$  линейно-независимых, а значит, образующих обычный базис пространства  $\mathbb{R}^N$ .

Учитывая свойство 1 положительного базиса, далее мы будем рассматривать только случай  $m = N + 1$ . Докажем для этого случая ещё два свойства и теорему, дающую простой метод проверки положительного базиса.

**Свойство 5.** В случае  $m = N + 1$  любые  $N$  векторов положительного базиса образуют обычный базис пространства  $\mathbb{R}^N$ .

**Доказательство.** Из соображений размерности вытекает, что если  $N$  векторов пространства  $\mathbb{R}^N$  линейно независимы, то они образуют обычный базис этого пространства. Предположим существование такого положительного базиса  $a_0, a_1, \dots, a_N$  пространства  $\mathbb{R}^N$ , что векторы  $a_1, \dots, a_N$  линейно зависимы. Из свойства 4 положительного базиса следует, что

среди векторов  $a_0, a_1, \dots, a_N$  найдётся обычный базис пространства  $\mathbb{R}^N$ . Этот базис содержит вектор  $a_0$ , пусть он состоит из векторов  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$ . Тогда векторы  $a_1, \dots, a_{N-1}$  линейно независимы. Из линейной зависимости векторов  $a_1, \dots, a_N$  следует, что вектор  $a_N$  линейно выражается через векторы  $a_1, \dots, a_{N-1}$ . Из определения положительного базиса следует представление

$$-a_0 = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_N a_N,$$

где  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = \overline{0, N}$ . Заменим в этом равенстве вектор  $a_N$  на линейную комбинацию векторов  $a_1, \dots, a_{N-1}$  и получим представление

$$-a_0 = \lambda_0 a_0 + \lambda'_1 a_1 + \dots + \lambda'_{N-1} a_{N-1}$$

с другими коэффициентами  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1}$ , но с тем же  $\lambda_0$ . Так как векторы  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$  образуют обычный базис пространства  $\mathbb{R}^N$ , то из полученного представления следует, что  $\lambda_0 = -1$ ,  $\lambda'_1 = 0, \dots, \lambda'_{N-1} = 0$ . Возникает противоречие с условием  $\lambda_0 \geq 0$ . Поэтому векторы  $a_1, \dots, a_N$  не могут быть линейно зависимыми, а значит, они также образуют обычный базис пространства  $\mathbb{R}^N$ . Свойство доказано.

**Свойство 6.** В случае  $m = N + 1$  векторы  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^N$  составляют положительный базис тогда и только тогда, когда найдутся такие положительные числа  $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ , что  $a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m = 0$ , причём числа  $\alpha_2, \dots, \alpha_m$  определяются однозначно.

**Доказательство.** Из свойства 3 положительного базиса находим такие положительные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , что  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ . Из свойства 5 следует линейная независимость векторов  $a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^N$ , а значит,  $\lambda_1 \neq 0$  и при  $\alpha_i = \lambda_i / \lambda_1$ ,  $i = \overline{2, m}$ , получаем равенство из свойства 6. Набор чисел  $\alpha_2, \dots, \alpha_m$  единственен, так как векторы  $a_2, \dots, a_m$  линейно независимы.

Рассмотрим какой-либо набор векторов  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  и матрицу  $M$  размерности  $n \times (n + 1)$ , столбцы которой состоят из координат этих векторов. Минор, полученный из  $M$  удалением  $i$ -го столбца, обозначим через  $M_i$ .

**Теорема 1.** Набор векторов  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  образует положительный базис пространства  $\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда  $M_0 \neq 0$ , а  $(-1)^i M_i / M_0 > 0$  для  $i = \overline{1, n}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $(n + 1) \times (n + 1)$ -матрицу, первая строка которой есть  $j$ -я строка матрицы  $M$  для некоторого  $j = \overline{1, n}$ , а остальная часть совпадает с матрицей  $M$ . Получим вырожденную матрицу. Разложив её определитель по первой строке, получим  $a_{0j} M_0 - a_{1j} M_1 + \dots + (-1)^n a_{nj} M_n = 0$ , где  $a_{ij}$  —  $j$ -я координата вектора  $a_i$ . Так как значение  $j$  произвольно, то получаем соотношение

$$M_0 a_0 - M_1 a_1 + \dots + (-1)^n M_n a_n = 0. \quad (8)$$

Пусть векторы  $a_0, a_1, \dots, a_n$  составляют положительный базис. Из свойства 6 следует, что  $M_0 \neq 0$ . Поэтому  $a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$ , где  $\lambda_i = (-1)^i M_i / M_0$ , причём это единственное такое соотношение на векторы  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ввиду линейной независимости векторов  $a_1, \dots, a_n$ . Из свойства 6 следует, что  $(-1)^i M_i / M_0 > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Обратное утверждение также следует из свойства 6 и соотношения (8). Теорема доказана.

Отметим, что разложение  $a = \alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n$  вектора  $a$  по положительному базису  $a_0, \dots, a_n$  неоднозначное, но всегда существует разложение, для которого хотя бы одно  $\alpha_i$  нулевое, а остальные неотрицательные. Для построения такого разложения достаточно найти какое-либо соотношение  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$  из свойства 3 и получить разложение

$$a = (\alpha_0 - \lambda_0 \alpha_{l_0} / \lambda_{l_0}) a_0 + \dots + (\alpha_n - \lambda_n \alpha_{l_0} / \lambda_{l_0}) a_n,$$

где  $\alpha_{l_0} / \lambda_{l_0}$  — минимальное из чисел  $\alpha_l / \lambda_l$ ,  $l = \overline{0, n}$ . Тогда коэффициент при  $a_{l_0}$  нулевой, а остальные неотрицательные. Назовём такое разложение вектора по положительному базису *минимальным*. Ввиду свойства 5 оно единственно.

**Теорема 2.** Пусть для системы (7) с  $l_m = n$  столбцы  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  в точке  $\bar{x}_f \in \mathcal{X}_0$  образуют положительный базис пространства  $\mathbb{R}^n$ , коэффициенты  $u_0, \dots, u_n$  минимального разложения вектора  $\zeta(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$  по этому базису составляют допустимое управление, функция  $\zeta$  непрерывна в точке  $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$ , а компоненты столбцов  $a_0, \dots, a_n$  непрерывны в окрестности  $\bar{x}_f$ . Тогда система (7) локально управляема в точке  $\bar{x}_f$ .

**Доказательство.** Если векторы  $a_0(\bar{x}_f), \dots, a_{l_m}(\bar{x}_f) \in \mathbb{R}^n$  образуют положительный базис пространства  $\mathbb{R}^n$ , то в силу теоремы 1 и непрерывности функций  $a_i(\bar{x})$  это свойство выполняется и в некоторой окрестности  $U$  точки  $\bar{x}_f$ . Докажем непрерывность в точке  $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$  отображения  $F$ , которое отображает точку  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(s)})$  в набор коэффициентов  $u_0, \dots, u_n$  минимального разложения вектора  $\zeta(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(s)})$  по положительному базису  $a_0(\bar{x}), \dots, a_n(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in U$ . Область определения этого отображения есть объединение множеств  $X_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , где  $X_j$  состоит из точек, для которых  $u_j = 0$ . Обозначим через  $A_i(\bar{x})$  квадратную матрицу, составленную из всех столбцов  $a_0(\bar{x}), \dots, a_n(\bar{x})$ , кроме  $a_i(\bar{x})$ . Ввиду теоремы 1 матрицы  $A_i(\bar{x})$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $\bar{x} \in U$ , невырождены. Так как каждая такая матрица состоит из непрерывных функций, то обратные им матрицы также состоят из непрерывных функций. Ограничение отображения  $F$  на  $X_j$  есть  $A_j(\bar{x})^{-1}\zeta(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(s)})$  и поэтому непрерывно в точке  $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$ , если эта точка лежит в  $X_j$ . Точка  $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$  может быть граничной точкой нескольких множеств  $X_j$ , но в силу единственности минимального разложения значение  $F(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$  не зависит от выбора  $X_j$ , а значит, отображение  $F$  непрерывно в точке  $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$ .

По условию теоремы точка  $F(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$  принадлежит области допустимых управлений  $\mathcal{U}$ . Поэтому существует окрестность  $V$  точки  $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$ , образ которой при отображении  $F$  лежит в  $\mathcal{U}$ . Выберем такие положительные числа  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , что декартово произведение  $\delta_1$ -окрестности точки  $\bar{x}_f$  и  $\delta_2$ -окрестности точки  $(0, \dots, 0)$  лежит в  $V$ , т.е.  $U_{\delta_1}(\bar{x}_f) \times U_{\delta_2}(0, \dots, 0) \subset V$ .

Пусть  $\xi$  – произвольный единичный вектор,  $\beta(t)$  – какая-либо  $s$  раз непрерывно дифференцируемая, убывающая на отрезке  $[0, T]$  функция,  $\beta(T) = 0$ ,

$$R = \max_{t \in [0, T]} \|(\dot{\beta}(t), \dots, \beta^{(s)}(t))\|.$$

Рассмотрим траекторию  $\bar{x}(t) = \bar{x}_f + (\delta_2/R)\beta(t)\xi$ . Тогда  $\bar{x}(T) = \bar{x}_f$ , и за счёт выбора  $\xi$  и  $t$  в качестве  $\bar{x}(t)$  мы можем получить произвольную точку из  $\delta$ -окрестности  $U_\delta(\bar{x}_f)$  точки  $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$ , где  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2\beta(0)/R)$ . Поэтому окрестность  $U_\delta(\bar{x}_f)$  лежит в области достижимости состояния  $x_f$  за время  $T > 0$  в  $U_\delta(\bar{x}_f)$ , а значит, система (7) локально управляема в точке  $x_f$ . Теорема доказана.

**Пример 4.** Из свойства 2 положительного базиса следует, что случай, описанный в теореме 2, возможен только при  $l_m \geq 3$ . Исследуем случай, когда в (3)  $l_m = 2$ . Запишем систему (3) в матричном виде  $\ddot{\bar{x}} = T_\theta M \bar{u} - B_0$ , где

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos \phi_2 \\ 0 & \sin \phi_1 & \sin \phi_2 \\ 0 & \kappa_1 \sin \psi_1 & \kappa_2 \sin \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \zeta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию  $h(t, \bar{x}) = C(\dot{\bar{x}} + tB_0)$ , где  $C$  – некоторая постоянная строка. Производная функции  $h$  в силу системы (3) равна  $\dot{h} = CT_\theta M \bar{u}$ . Пусть  $\theta_f$  –  $\theta$ -координата состояния  $\bar{x}_f$ . Если матрица  $M$  невырождена, то, положив  $C = (1 \ 1 \ 1)M^{-1}T_{\theta_f}^{-1}$ , где  $M^{-1}$  – обратная к  $M$  матрица, получим равенство

$$\dot{h} = (1 \ 1 \ 1)M^{-1}T_{\theta-\theta_f}M \bar{u} = u_1 + u_2 + u_3 + \alpha(\theta - \theta_f),$$

где  $\alpha(\theta - \theta_f) \rightarrow 0$  при  $\theta \rightarrow \theta_f$ . Поэтому если  $u_1 + u_2 + u_3 \neq 0$ , то  $\dot{h}(t, \bar{x}) > 0$  в некоторой окрестности точки  $\bar{x}_f$  (напомним, что  $u_l \geq 0$  для любого  $l$ ). Следовательно, значение функции  $h$  в окрестности точки  $\bar{x}_f$  может только расти, а значит, состояния  $\bar{x}$ , для которых  $h(t, \bar{x}) > h(t, \bar{x}_f)$ , не входят в область достижимости состояния  $\bar{x}_f$  за малое время и система (3) не является локально управляемой в точке  $\bar{x}_f$ .

Если  $u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0$ , то  $u_i \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и область достижимости состояния  $\bar{x}_f$  есть кривая (не является открытым множеством), и система (3) не является локально управляемой в точке  $\bar{x}_f$  и в этом случае.

Если матрица  $M$  вырождена, то существует такая строка  $C_0$ , что  $C_0M = 0$ . Рассмотрим функцию  $h(t, \bar{x}) = C_0T_{\theta_f}^{-1}(\dot{\bar{x}} + tB)$ , где  $\theta_f$  –  $\theta$ -координата состояния  $\bar{x}_f$ , а  $B$  – некоторый постоянный столбец. Производная функции  $h$  в силу системы (3) равна  $\dot{h} = C_0T_{\theta-\theta_f}M\bar{u} + C_0T_{\theta_f}^{-1}(B - B_0)$ , где первое слагаемое бесконечно малое при  $\theta \rightarrow \theta_f$ , а второе слагаемое можно сделать положительным за счёт выбора столбца  $B$ . При таком выборе  $B$  значение функции  $h$  в окрестности точки  $\bar{x}_f$  может только расти, а значит, система (3) не является локально управляемой в точке  $\bar{x}_f$ .

Таким образом, мы доказали, что система (3) может быть локально управляема только в случае  $l_m \geq 3$ .

**3. Алгоритм управления системами с положительным базисом.** Далее покажем как построить управления для движения по заданной траектории системы с положительным базисом. Рассмотрим систему (7) в случае  $l_m = n$ . Пусть поставлена задача выбора таких входов  $u(t)$ , чтобы система двигалась по траектории  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , при этом  $u(t_0)$  задано.

*Шаг 1.* Проверяем, что векторы  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  составляют положительный базис. Для этого находим такие положительные числа  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ , что  $\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n = 0$ . Обозначаем через  $l_d$  какой-либо номер от 0 до  $n$ , а через  $\mathcal{B}$  – набор, состоящий из всех векторов  $a_l$ , кроме  $l = l_d$ . (Из свойства 5 следует, что  $\mathcal{B}$  образует обычный базис пространства  $\mathbb{R}^n$ .) Определяем  $K$  – количество шагов для перехода от начальной точки в конечную и шаг  $\Delta = (t_f - t_0)/K$ . Полагаем  $t = t_0$ .

*Шаг 2.* Если  $u(t) \notin \mathcal{U}$ , то делаем вывод, что движение по заданной траектории при заданных ограничениях на управления невозможно и поэтому завершаем вычисления. Иначе переходим на шаг 3.

*Шаг 3.* Если  $t = t_f$ , то переходим на шаг 6. Иначе вычисляем

$$t := t + \Delta, \quad \zeta(t) = \zeta(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(s)}(t)).$$

*Шаг 4.* Раскладываем вектор  $\zeta(t)$  по базису  $\mathcal{B}$ :

$$\zeta(t) = \sum_{l \neq l_d} v_l a_l, \quad v_{l_d} = 0.$$

*Шаг 5.* Если все полученные  $v_l$  неотрицательны, то полагаем  $u_l(t) = v_l$ ,  $l = \overline{0, n}$ , а затем переходим на шаг 2. Иначе находим минимальное из чисел  $v_l/\lambda_l$ , соответствующий номер обозначаем через  $l_0$  (отметим, что  $v_{l_0} < 0$ ) и получаем разложение

$$\zeta(t) = \sum_{l \neq l_d} v_l a_l - \frac{v_{l_0}}{\lambda_{l_0}} \sum_{l=0}^n \lambda_l a_l = \sum_{l \neq l_0} \left( v_l - \frac{v_{l_0}}{\lambda_{l_0}} \lambda_l \right) a_l.$$

Заменяем в  $\mathcal{B}$  вектор  $a_{l_0}$  на вектор  $a_{l_d}$  и полагаем, что

$$u_l(t) = v_l - \frac{\lambda_l}{\lambda_{l_0}} v_{l_0}, \quad l = \overline{0, n},$$

и  $l_d = l_0$ . Затем переходим на шаг 2.

*Шаг 6.* Завершаем вычисления и получаем  $u_l(t)$ ,  $l = \overline{0, n}$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

**4. Коэффициент локальной управляемости и задача его максимизации.** Предположим, что система (1) приведена к виду (7) и выбран функционал (2). Определим коэффициент локальной управляемости, соответствующий этому функционалу. Для управления системой (7) будем использовать алгоритм, приведённый выше. Так как мы не обладаем какой-либо информацией о возможных значениях правой части системы (7) (векторной функции  $\zeta$ ), будем считать, что любое достаточно малое значение  $\zeta$  возможно и равновероятно. Понимая  $\zeta$  как случайный вектор, равномерно распределённый на шаре радиуса  $\delta$ , рассмотрим математическое ожидание  $M[\Phi(x_f, u)]$  случайной величины  $\Phi(x_f, u)$ , где  $x_f$  – фиксированная

точка, а компоненты  $u$  есть коэффициенты разложения  $\zeta$  по базису  $\mathcal{B}$ , составленному из части векторов  $a_0, \dots, a_n$  (см. шаги 4 и 5 алгоритма). Коэффициент локальной управляемости системы (7) в состоянии  $x_f$  относительно функционала (2) определим как величину, обратную к пределу

$$k(x_f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} M[\Phi(x_f, u)],$$

т.е.  $1/k(x_f)$ . Коэффициентом локальной управляемости системы (7) относительно функционала (2) будем называть точную нижнюю грань коэффициентов локальной управляемости системы (7) в её допустимых состояниях. Задача поиска параметров модели с наилучшей управляемостью сводится к нахождению максимума по всем параметрам модели коэффициента локальной управляемости системы, т.е. к поиску  $\min_{\alpha} \sup_{x_f} k(x_f)$ .

Выведем формулу для  $k(x)$ . Отметим, что на каждом шаге алгоритма по крайней мере одна компонента  $\bar{u}$  равна нулю. Обозначим через  $\nu_i$  вложение пространства  $\mathbb{R}^n$  в пространство  $\mathbb{R}^{n+1}$ , которое точку с координатами  $v = (v_1, \dots, v_n)$  отображает в точку  $u = (u_0, \dots, u_n)$ , где  $u_j = v_{j+1}$  при  $j < i$ ,  $u_i = 0$ ,  $u_j = v_j$  при  $j > i$ . Пусть  $A_i$  – квадратная матрица, полученная из  $M$  удалением  $i$ -го столбца. Тогда если  $\zeta$  раскладывается по базису, полученному из набора  $a_0, \dots, a_n$  удалением  $a_i$ , то

$$\zeta = M\nu_i(v) = A_i v.$$

Обозначим также через  $V_n(\delta)$  объём  $n$ -мерного шара радиуса  $\delta$ , а через  $B_\delta^i$  – часть шара радиуса  $\delta$ , состоящую из точек  $\zeta = A_i v$ . Тогда

$$M[\Phi(x_f, u)] = \sum_{i=0}^n \int_{B_\delta^i} \frac{1}{V_n(\delta)} \Phi(x_f, \nu_i(A_i^{-1}\zeta)) d\zeta.$$

В каждом интеграле, сделав замену  $\zeta = \delta A_i v$ , получим

$$M[\Phi(x_f, u)] = \sum_{i=0}^n \frac{|M_i|}{V_n(1)} \int_{G^i} \Phi(x_f, \delta \nu_i(v)) dv,$$

где  $M_i = \det A_i$ , а  $G^i = \{v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : \|A_i v\| \leq 1, v_j \geq 0, j = \overline{1, n}\}$ .

**Пример 5.** Рассмотрим подводный аппарат цилиндрической формы с закругленными концами, причём точки  $P_1, \dots, P_m$  расположены на цилиндрической поверхности. В этом случае  $|\overrightarrow{CP_l}| = d/|\sin(\psi_l + \phi_l)|$ , где  $d$  – радиус цилиндрической поверхности аппарата. Из условия локальной управляемости следует, что  $l_m \geq 3$ . Рассмотрим случай  $l_m = 3$ .

Для упрощения рассуждений разделим последнее уравнение системы (6) на  $-J/(md)$ . Матрица  $M$  коэффициентов при управлениях полученной системы (см. теорему 1) имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos \phi_2 & \cos \phi_3 \\ 0 & \sin \phi_1 & \sin \phi_2 & \sin \phi_3 \\ 0 & \frac{\sin \psi_1}{|\sin(\psi_1 + \phi_1)|} & \frac{\sin \psi_2}{|\sin(\psi_2 + \phi_2)|} & \frac{\sin \psi_3}{|\sin(\psi_3 + \phi_3)|} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что коэффициенты этой матрицы не зависят от  $\bar{x}$ , а значит, коэффициент локальной управляемости системы во всех состояниях одинаковый. Кроме того,  $n = 3$ , поэтому  $V_n(1) = 4\pi/3$  и

$$k(x_f) = \sum_{i=0}^3 \frac{3|M_i|}{4\pi} \int_{G^i} (v_1 + v_2 + v_3) dv.$$



Таким образом, задача поиска параметров модели с наилучшей управляемостью сводится к нахождению минимума  $k = k(x_f)$  по  $\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2, \phi_3, \psi_3$ , где  $\phi_j \in [0, 2\pi]$ ,  $\psi_j \in [0, 2\pi]$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Указанная экстремальная задача решалась численно. При этом для исключения деления на малые величины были добавлены следующие ограничения на значения параметров:  $|\operatorname{tg}(\psi_j + \phi_j)| \geq 0.2$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и  $|M_i| > 0.1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Оказалось, что функция  $k(\phi_i, \psi_i)$  имеет большое количество точек локального минимума. Соответствующие значения коэффициента  $k$  указаны в таблице.

Системы с полученными значениями параметров были протестированы на следующих четырёх траекториях:

1) поворот

$$x(t) = 0, \quad z(t) = 0, \quad \theta(t) = \theta_f \left( 2 \frac{t^3}{T^3} - 3 \frac{t^2}{T^2} \right), \quad t \in [0, T], \quad \theta_f = \frac{\pi}{4}, \quad T = 2 \text{ с};$$

2) движение по синусоиде вниз

$$x(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), \quad z(t) = -\frac{2\pi t}{T}, \quad \theta(t) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\pi t/T) + 1}}, \quad t \in [0, T], \quad T = 18 \text{ с};$$

3) движение по горизонтальной синусоиде

$$x(t) = \frac{40\pi t}{T}, \quad z(t) = 2 \sin\left(\frac{20\pi t}{T}\right), \quad \theta(t) = \operatorname{arctg} \cos\left(\frac{20\pi t}{T}\right), \quad t \in [0, T], \quad T = 350 \text{ с};$$

4) движение по эллипсу

$$x(t) = 20 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad z(t) = 10 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad \theta(t) = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \right), \quad t \in [0, T], \quad T = 210 \text{ с}.$$

Соответствующие значения функционала приведены в таблице.

**Таблица.** Значения функционала  $\sum_{i=0}^3 u_i$

Параметры $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$	$k$	Траектория			
		1)	2)	3)	4)
2.06, 2.16, 4.28, 1.84, 4.33, 2.70	4.68	5.51	61.23	1124.93	115.49
1.15, 1.12, 3.67, 1.79, 4.27, 3.19	7.41	11.64	40.82	1528.06	243.45
2.11, 1.97, 4.28, 1.23, 4.11, 6.26	4.50	5.49	59.51	1114.02	114.14
2.06, 4.17, 4.17, 0, 5.06, 1.92	4.48	5.44	67.26	1105.61	112.94
1.87, 2.35, 4.23, 2.05, 4.13, 2.83	4.86	5.54	58.03	1109.14	113.69
2.11, 2.11, 4.23, 1.23, 4.37, 3.14	4.44	5.53	62.32	1132.80	116.62
2.09, 2.09, 4.19, 1.22, 4.37, 0	4.37	5.47	61.61	1121.26	115.05
1.74, 4.06, 4.14, 0.27, 5.16, 1.89	4.64	6.42	54.70	1186.55	130.13
1.57, 3.14, 4.19, 3.14, 1.57, 4.71	7.87	5.73	47.84	1011.71	119.65

**Заключение.** В работе рассмотрены локально управляемые системы с положительными управлениями, введены системы, названные системами с положительным базисом. Для таких систем доказано достаточное условие локальной управляемости, сформулирован алгоритм построения управления для движения по заданной траектории и определён коэффициент локальной управляемости.

Введённые понятия были исследованы для системы, описывающей движение подводного аппарата в вертикальной плоскости. Рассмотрен случай, когда аппарат управляется только винтомоторными агрегатами, винты которых вращаются только в одну сторону. Показано, что движение такого аппарата описывает система с положительным базисом. Она локально

управляема, только если винтомоторных агрегатов не менее четырёх. Задача минимизации потребляемой энергии двигателями аппарата эквивалентна задаче максимизации коэффициента управляемости для соответствующего функционала. Численные расчёты показали, что данный коэффициент имеет большое количество точек локального максимума. Значения функционала для некоторых наборов параметров на четырёх выбранных траекториях показали (см. таблицу), что при движении по конкретной траектории модель с меньшим значением коэффициента управляемости (с большим значением  $k$ ) может быть более эффективной. Мы объясняем это тем, что определение коэффициента управляемости основано на вероятностных понятиях, и поэтому эффективность модели с максимальным значением коэффициента управляемости должна сказаться при движении на продолжительных и разнообразных траекториях.

Отметим также, что в работе рассмотрен только случай, когда сдвиг из любого состояния в любом направлении возможен и равновероятен. Однако в реальной ситуации вероятность сдвига в каком-либо направлении зависит от решаемой аппаратом задачи. По нашему мнению, закон распределения вероятности сдвига в направлении может быть определён при дополнительном исследовании траекторий аппарата с использованием искусственного интеллекта. При этом изменение закона распределения приведёт к изменению зависимости коэффициента локальной управляемости от параметров и к другим оптимальным значениям параметров.

Работа выполнена при поддержке программы “Приоритет 2030” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amory A., Maehle E.* SEMBIO-a small energy-efficient swarm AUV // OCEANS 2016 MTS/IEEE Monterey. Monterey, 2016. P. 1–7.
2. *Amory A., Maehle E.* Energy efficiency of the swarm-capable micro AUV SEMBIO // OCEANS 2019 Marseille. Marseille, 2019. P. 1–7.
3. *Fossen T.I.* Guidance and Control of Ocean Vehicles. Chichester, 1994.
4. *Buzikov M.E., Galyaev A.A.* Time-optimal interception of a moving target by a Dubins car // Automation and Remote Control. 2021. V. 82. № 5. P. 745–758.
5. *Buzikov M.E., Galyaev A.A.* Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car // Automatica. 2022. V. 135. Art. 109968.
6. *Berlin L., Galyaev A., Lysenko P.* Time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators // Mathematics. 2022. V. 10. Art. 3552.
7. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
8. *Петров Н.Н.* Локальная управляемость автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 15.06.2023 г.  
После доработки 07.10.2023 г.  
Принята к публикации 11.10.2023 г.