ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 12, с. 1710–1714

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ОДНОЙ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ФОЙГТА

© 2023 г. А. В. Звягин, Е. И. Костенко

Изучается задача управления с обратной связью для одной математической модели, описывающей движение вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траекторий движения поля скоростей. Доказывается существование оптимального управления, дающего минимум заданному ограниченному и полунепрерывному снизу функционалу качества.

DOI: 10.31857/S0374064123120117, EDN: NWUHBJ

1. Введение. Постановка задачи. В ограниченной области $Q_T=[0,T]\times\Omega$, где $T\geqslant 0$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, с границей $\partial\Omega\subset C^2$ рассматривается задача

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\mu_0\triangle v-\mu_1\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\operatorname{Div}\int\limits_0^t e^{-(t-s)/\lambda}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds+\nabla p=f(t,x); \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v(t,x)=0,\quad (t,x)\in Q_T; \quad (2)$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int\limits_t^\tau v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad t,\tau\in[0,T],\quad x\in\bar\Omega; \quad (3)$$

$$v(t,x)|_{[0,T]\times\partial\Omega}=0;\quad v(0,x)=v_0(x),\quad x\in\Omega. \quad (4)$$

Здесь $v(t,x)=(v_1(t,x),\ldots,v_n(t,x))$ и $p(t,x)$ – искомые скорость и давление рассматриваемой среды; $\mathcal{E}(v)=\{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – тензор скоростей деформации с элементами $\mathcal{E}_{ij}=(\partial v_i/\partial x_j+ +\partial v_j/\partial x_i)/2$; $\mu_0>0$, $\mu_1\geqslant 0$, $0<\alpha<1$, $\lambda>0$ – константы, отвечающие за вязкоупругие свойства изучаемой жидкости; $z(\tau;t,x)$ – траектория движения частицы жидкости; $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера (см. [1, с. 29]). Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, т.е. вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы.

Начально-краевая задача (1)–(4) является математической моделью движения вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траектории движения частицы среды (см. работы [2–7], в которых исследован вопрос слабой разрешимости частных случаев рассматриваемой модели). Наличие интегрального слагаемого в уравнении (1) отражает учёт памяти сплошной среды, которую необходимо учитывать вдоль траектории движения частицы среды. Таким образом, возникает $z(s;t,x)$-траектория частицы среды, указывающая в момент времени s расположение частицы, находящейся в момент времени t в точке x. Данная траектория определяется полем скоростей v. Необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v, т.е. чтобы уравнение (3) имело единственное решение для поля скоростей v. Для этого в работе разрешимость интегральной задачи Коши (3) изучается в терминах регулярных лагранжевых потоков (РЛП) (см. [8–10]).

В данной статье для изучаемой математической модели рассматривается задача управления с обратной связью. Заметим, что задачам оптимального управления в механике жидкости посвящено большое число исследований (см., например, книгу [11] и приведённую в ней библиографию), однако в большинстве из них изучаются различные задачи оптимального управления для системы Навье–Стокса. Но в природе существует огромное число жидкостей, которые описываются более сложными системами уравнений (такие жидкости называются “неньютоновскими жидкостями”). Список работ, где рассматриваются задачи оптимального управления, в том числе и задачи с обратной связью для подобных моделей движения жидкости, существенно короче (см. [12–14]). В настоящей статье доказывается существование оптимального управления с обратной связью для одной такой модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью.

2. Постановка задачи управления и основной результат. Рассмотрим пространство $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из множества Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω. Обозначим множество $\mathcal{V}=\{v\in C_0^\infty(\Omega),\ \operatorname{div} v=0\}$. Через V^0 обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V^1 – по норме $W_2^1(\Omega)$. Через V^{-1} будем обозначать сопряжённое пространство к V^1. Введём пространство

$$W=\{v\in L_2(0,T;V^1)\bigcap L_\infty(0,T;V^0),\quad v'\in L_{4/3}(0,T;V^{-1})\},$$

в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи.

Перейдём к описанию задачи управления для изучаемой математической модели. Для этого рассмотрим многозначное отображение $\Psi: W\multimap L_2(0,T;V^{-1})$, которое будет использовано для определения обратной связи и задания ограничений на управление. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

$(\Psi1)$ отображение Ψ определено на пространстве W и имеет непустые компактные выпуклые значения;

$(\Psi2)$ отображение Ψ полунепрерывно сверху (т.е. для каждого $v\in W$ и открытого множества $V\subset L_2(0,T;V^{-1})$ такого, что $\Psi(v)\subset V$, существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v))\subset V$) и компактно (т.е. образ Ψ относительно компактен в $L_2(0,T;V^{-1})$);

$(\Psi3)$ отображение Ψ глобально ограничено, т.е. существует константа $M>0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}:=\sup\{\|u\|_{L_2(0,T;V^{-1})}: u\in\Psi(v)\}\leqslant M\quad \text{для всех}\ \ v\in W;$$

$(\Psi4)$ отображение Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^\infty\subset W$, $v_l\rightharpoonup v_0$, $u_l\in\Psi(v_l)$ и $u_l\to u_0$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, то $u_0\in\Psi(v_0)$.

Будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально-краевой задачи (1)–(4). Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f\in\Psi(v). \tag{5}$$

Таким образом, в работе рассматриваем задачу управления с обратной связью (1)–(5). Будем предполагать, что начальное условие v_0 принадлежит пространству V^0.

Определение. *Слабым решением* задачи управления с обратной связью (1)–(5) называется пара функций $(v,f)\in W\times L_2(0,T;V^{-1})$, удовлетворяющая:

a) условию обратной связи (5);

b) при любой $\varphi\in V^1$ и п.в. $t\in(0,T)$ тождеству

$$\langle v',\varphi\rangle-\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n v_iv\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx+\mu_0\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx+$$

$$+\mu_1\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_\Omega\int\limits_0^t e^{-(t-s)/\lambda}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds\,\mathcal{E}(\varphi)\,dx=\langle f,\varphi\rangle,$$

где z – РЛП, порождённый v;

c) начальному условию $v(0)=v_0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям $(\Psi1)$–$(\Psi4)$. Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи управления с обратной связью (1)–(5).*

Обозначим через $\Sigma\subset W\times L_2(0,T;V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (1)–(5). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi:\Sigma\to\mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

($\Phi 1$) существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geqslant \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$;

($\Phi 2$) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W и $f_m \to f_*$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, то $\Phi(v_*, f_*) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \Phi(v_m, f_m)$.

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Если отображение Ψ удовлетворяет условиям ($\Psi 1$)–($\Psi 4$), а функционал Φ удовлетворяет условиям ($\Psi 1$), ($\Psi 2$), то задача оптимального управления с обратной связью (1)–(5) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f)$.*

Доказательство данных утверждений состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики, разработанного В.Г. Звягиным [15, 16], доказывается существование слабых решений исследуемой задачи управления с обратной связью. Для этого вводится семейство $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$ вспомогательных включений, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$, доказываются априорные оценки решений и на основе теории топологической степени для многозначных векторных полей доказывается существование слабых решений вспомогательной задачи управления с обратной связью при $\xi = 1$. Далее для доказательства разрешимости исходной задачи управления с обратной связью на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход. В заключение показывается, что во множестве решений найдётся хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

3. Схема доказательства. Рассмотрим следующее семейство $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$ вспомогательных задач с малым параметром $\theta > 0$. Необходимо найти пару функций $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$ $(W_1 = \{v \in C([0, T]; V^3),\ v' \in L_2(0, T; V^3)\})$, удовлетворяющих:

a) условию обратной связи (5);

b) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\langle v', \varphi\rangle - \xi \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx - \xi\theta \int_\Omega \nabla \Delta v' : \nabla \varphi \, dx +$$

$$+ \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\Omega \int_0^t e^{-(t-s)/\lambda} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi) \, ds \, dx = \xi \langle f, \varphi\rangle,$$

где z – РЛП, порождённый v;

c) начальному условию $v(0) = \xi v_0$.

Далее для изучения вспомогательной задачи перейдём к операторной трактовке. Введём операторы

$$J : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi\rangle = \int_\Omega v\varphi \, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi \, dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A_2 : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle A_2 v, \varphi\rangle = -\int_\Omega \nabla\Delta v : \nabla\varphi \, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$B : V^1 \times [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega} \to V^{-1}, \quad (B(v, z)(t), \varphi) = \left(\int_0^t e^{-(t-s)/\lambda} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right),$$

$$v \in V^1, \quad z \in [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega}, \quad \varphi \in V^1, \quad t \in (0, T);$$

$$K : L_4(\Omega) \to V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1.$$

Также определим следующие операторы:

$$L : W_1 \to L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \theta A_2)v' + \mu_0 Av, v|_{t=0});$$

$$C : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \quad C(v) = (K(v), 0);$$
$$G : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \quad G(v) = \left(\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v,z), 0\right);$$
$$\mathcal{Y} : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \quad \mathcal{Y}(v) = (\Psi(v), v_0).$$

Тогда задача о нахождении управления с обратной связью для вспомогательной задачи при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, удовлетворяющего начальному условию $v(0) = \xi v_0$, эквивалентна задаче о нахождении решения при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ операторного включения

$$v \in \xi \mathcal{M}, \tag{6}$$

где $\mathcal{M} = L^{-1}(\mathcal{Y} + C(v) - G(v))$.

Для введённых выше операторов справедливы следующие свойства.

Лемма 1. *1. Отображение $L : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ обратимо и обратное к нему отображение $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to W_1$ является непрерывным.*

2. Отображение $K : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1})$ является компактным.

3. Отображение $B : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1})$ является L-уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k.

Далее для операторного включения (6) доказываются априорные оценки.

Лемма 2. *Если $v \in W_1$ – решение семейства включений (6) для некоторого $\xi \in [0,1]$, то для него имеет место оценка $\|v\|_{W_1} \leqslant C$, где константа C зависит от θ.*

Из данной априорной оценки следует, что все решения операторного включения (6) лежат в шаре $B_R \subset W_1$ с центром в нуле и радиуса $R = C + 1$. Согласно утверждению 1 леммы 1 оператор $L : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ является обратимым. Тогда ни одно решение $v \in \xi\mathcal{M}$ не принадлежит границе шара B_R.

В силу утверждения 1 леммы 1 оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to W_2$ является непрерывным. Согласно утверждениям 2 и 3 леммы 1 отображение $(\mathcal{Y} + C(v) - G(v)) : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ является L-уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k. Следовательно, оператор $\mathcal{M} : W_1 \to W_1$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k.

Таким образом, векторное поле $v - \xi\mathcal{M}$ невырождено на границе шара B_R, а значит, для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi\mathcal{M}, B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что $\deg(I - \mathcal{M}, B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1$. Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_1$ включения (6) при $\xi = 1$, а следовательно, и вспомогательной задачи при $\xi = 1$.

Далее для полученного решения вспомогательной задачи при $\xi = 1$ доказывается следующая оценка решений.

Лемма 3. *Если $v \in W_1$ – решение семейства включений (6) для $\xi = 1$, то для него имеет место оценка $\|v\|_W \leqslant C_1$, где константа C_1 не зависит от θ.*

На основе оценки леммы 3, условий $(\Psi1)$–$(\Psi4)$, плотного вложения пространства V^3 в V^0, без ограничения общности (если необходимо переходя к подпоследовательности) получаем, что для любого $v_0^* \in V^0$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0^* в V^0; $v^m \to v^*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$ при $m \to \infty$; $v^m \to v^*$ $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^0)$ при $m \to \infty$; $(v^m)' \to (v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$ при $m \to \infty$; $z^m(\tau;t,x)$ сходится по мере Лебега на множестве $[0,T] \times \Omega$ по (τ,x) к $z(\tau;t,x)$ для $t \in [0,T]$ и существует $f^* \in L_2(0,T;V^{-1})$ такое, что $f^m \to f^* \in \Psi(v^*)$ при $m \to \infty$.

Переходя к пределу при $\theta \to 0$ в интегральном равенстве для вспомогательной задачи при $\xi = 1$, получаем, что предельная пара функций (v^*, f^*) удовлетворяет интегральному равенству из определения слабого решения задачи управления с обратной связью (1)–(5), условию обратной связи (5) и начальному условию из (4). Это и завершает доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 следует, что множество решений Σ не пусто. Таким образом, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что $\lim\limits_{l\to\infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf\limits_{(v,f,)\in\Sigma} \Phi(v,f)$.

Как и ранее, используя оценку леммы 3, без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности), можем предположить, что $v_l \rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;V^0)$; $v_l \to v_*$ сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$; $z_l(\tau;t,x) \to z_*(\tau;t,x)$ по норме Лебега относительно $(\tau,x)\in[0,T]\times\Omega$; $f_l \to f_* \in \Psi(v^*)$ сильно в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m\to+\infty$.

Аналогично как в п. 2 перейдём к пределу во включении

$$Jv_l' + \mu_0 A v_l + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_l, z_l) - K(v_l) = f_l \in \Psi(v_l)$$

и получим включение

$$Jv_*' + \mu_0 A v_* + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_*, z_*) - K(v_*) = f_* \in \Psi(v_*).$$

Следовательно, $(v_*, f_*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, то имеем $\Phi(v_*, f_*) \leqslant \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v,f)$, откуда следует, что (v_*, f_*) – требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-10026).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2018. V. 38. № 12. P. 6327–6350.
3. *Звягин А.В.* О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74. № 3. С. 189–190.
4. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О регулярности слабых решений обобщённой модели вязкоупругости Фойгта // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 11. С. 1933–1949.
5. *Звягин А.В.* Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85. № 1. С. 66–97.
6. *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of one viscoelastic fractional dynamics model of continuum with memory // J. of Math. Fluid Mech. 2021. V. 23. Art. 9.
7. *Zvyagin V.G., Kostenko E.I.* Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory // Lobachevskii J. of Math. 2023. V. 44. № 3. P. 969–988.
8. *DiPerna R.J., Lions P.L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Inventiones Mathematicae. 1989. V. 98. № 3. P. 511–547.
9. *Crippa G.* The ordinary differential equation with non–Lipschitz vector fields // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 2008. V. 1. № 2. P. 333–348.
10. *Crippa G., de Lellis C.* Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow // J. fur die reine und angewandte Mathematik. 2008. V. 616. P. 15–46.
11. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
12. *Звягин А.В.* Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 245–249.
13. *Zvyagin V., Zvyagin A., Ustiuzhaninova A.* Optimal feedback control problem for the fractional Voigt α-model // Math. 2020. V. 8. № 7. Art. 1197.
14. *Звягин В.Г., Звягин А.В., Хонг Н.М.* Об оптимальном управлении с обратной связью для модели движения нелинейно-вязкой жидкости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 1. С. 135–139.
15. *Звягин В.Г.* Аппроксимационно–топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // Соврем. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 46. С. 92–119.
16. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М., 2012.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 08.09.2023 г.
После доработки 08.09.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.