ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 12, с. 1715–1717

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА–НЕРСЕСЯНА

© 2023 г. Б. Ю. Иргашев

Получено решение задачи Коши для одного вырождающегося уравнения с дробной производной Джрбашяна–Нерсесяна, частные решения которого представлены с помощью функции Килбаса–Сайго.

DOI: 10.31857/S0374064123120129, EDN: NWUWZQ

В последнее время интенсивно изучаются уравнения с производными дробного порядка с переменными коэффициентами. В работе [1] изучалось уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}x^{\beta}u(x)=\lambda u(x),\quad 0<x<b,$$

где $0<\alpha<1$, $\beta\geqslant 0$, λ – спектральный параметр. В статье [2] были найдены решения в замкнутой форме уравнений дробного порядка

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x)=ax^{\beta}y(x)+f(x),\quad 0<x<d\leqslant\infty,\quad \alpha>0,\quad \beta\in\mathbb{R},\quad a\neq 0,$$

$$(D_{-}^{\alpha}y)(x)=ax^{\beta}y(x)+f(x),\quad 0\leqslant d<x<\infty,\quad \alpha>0,\quad \beta\in\mathbb{R},\quad a\neq 0,$$

с производными Римана–Лиувилля на полуоси $(0,\infty)$ (см. [3, с. 85]).

К таким уравнениям приводят многие прикладные задачи [4]. Примером является уравнение теории полярографии [5]

$$(D_{0+}^{1/2}y)(x)=ax^{\beta}y(x)+x^{-1/2},\quad x>0,\quad -1/2<\beta\leqslant 0,$$

возникающее при $a=-1$ в задачах диффузии [5].

Рассмотрим следующее уравнение:

$$D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},\gamma_m\}}u(y)=\lambda y^{s}u(y),\quad y>0,\quad \lambda,s\in\mathbb{R},\tag{1}$$

где $D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},\gamma_m\}}$ – оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна порядка $\alpha=\sum_{k=0}^{m}\gamma_k-1>0$, ассоциированный с последовательностью

$$\{\gamma_k\}_0^m=\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},\gamma_m\},\quad \gamma_k\in(0,1],\quad k=\overline{0,m},$$

определяемый соотношением [6]

$$D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},\gamma_m\}}=D_{0y}^{\gamma_m-1}D_{0y}^{\gamma_{m-1}}\ldots D_{0y}^{\gamma_1}D_{0y}^{\gamma_0},$$

D_{0y}^{γ} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка γ с началом в точке $y=0$ [1, с. 9]:

$$D_{0y}^{\gamma}g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\gamma)}\displaystyle\int\limits_0^y\dfrac{g(t)\,dt}{|y-t|^{1+\gamma}}, & \gamma<0,\\ g(y), & \gamma=0,\\ \left(\dfrac{d}{dy}\right)^{p}D_{0y}^{\gamma-p}g(y), & p-1<\gamma\leqslant p,\quad p\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

В работе [6] рассмотрена задача Коши для уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D_{0y}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_k\}} u(y) = f(y) \tag{2}$$

с переменными коэффициентами. Исследуемая задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Вольтерры второго рода. Доказана теорема существования и единственности решения. В статье [7] в терминах функции Райта построено явное представление решения задачи Коши для уравнения (2). В статье [8] для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка вида (2) с производными Римана–Лиувилля была сформулирована и решена начальная задача.

В данной работе в терминах функции Килбаса–Сайго строится решение следующей задачи Коши (см. [6]).

Задача Коши. Найти функцию $u(y)$, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям:

1) $u(y) \in L_1[0, l]$, $0 < l < +\infty$;

2) $D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_j\}} u(y) \in AC[0, l]$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$;

3) $D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},\gamma_m\}} u(y) = \lambda y^s u$, $y > 0$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\{\gamma_0\}} u(y) = A_0$, $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1\}} u(y) =$ $= A_1$, $\ldots$, $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1}\}} u(y) = A_{m-1}$, здесь A_i, $i = \overline{0, m-1}$, – заданные константы.

Теорема. *Пусть* $\alpha > 0$, $\gamma_0+\gamma_m+s > 1$. *Тогда задача Коши имеет единственное решение.*

Доказательство. Решение задачи будем искать в виде

$$u(y) = \sum_{k=0}^{m-1} d_k u_k(y), \tag{3}$$

где d_k – произвольные постоянные и

$$u_k(y) = y^{\alpha_k} E_{\alpha,(\alpha+s)/\alpha,(\alpha_k+s)/\alpha}(\lambda y^{\alpha+s}).$$

Здесь

$$E_{\alpha,m,l} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \quad c_0 = 1, \quad c_i = \prod_{j=0}^{i} \frac{\Gamma(\alpha(jm+l)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+l+1)+1)}, \quad i \geqslant 1,$$

– функция Килбаса–Сайго [2].

Для определения постоянных d_k запишем функции u_k в виде

$$u_k(y) = c_0 y^{\alpha_k} + c_1 \lambda y^{\alpha_k+\alpha+s} + y^{\alpha_k} \sum_{n=2}^{\infty} c_n (\lambda y^{\alpha+s})^n, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Учитывая неравенство $\gamma_0 + \gamma_m + s > 1$ и применяя формулу (см. [6])

$$D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_j\}} y^{\alpha_k} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant j-1, \\ \Gamma(1+\alpha_k), & k = j, \\ \dfrac{\Gamma(1+\alpha_k)}{\Gamma(1+\alpha_k-\alpha_j)} y^{\alpha_k-\alpha_j}, & j < k \leqslant m, \end{cases}$$

из начальных условий 3) задачи Коши находим

$$d_k = \frac{A_k}{\Gamma(\alpha_k+1)}.$$

Теперь покажем, что представление

$$u(y)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{A_k y^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}E_{\alpha,(\alpha+s)/\alpha,(\alpha_k+s)/\alpha}(\lambda y^{\alpha+s})$$

удовлетворяет уравнению (1). Из обобщённой формулы Ньютона–Лейбница (см., например, [9, с. 15]) имеем

$$D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_m\}}u=D_{0y}^{\alpha}u-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{y^{\alpha_k-\alpha}A_k}{\Gamma(\alpha_k-\alpha+1)}.$$

Далее, использовав формулу (10) из работы [2] (в нашем случае $m=(\alpha+s)/\alpha,\ \ l=(\alpha_k+s)/\alpha,$ $\alpha_k=\alpha(l-m+1)),$ будем иметь

$$D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1},\gamma_m\}}u(y)=\lambda y^s u(y).$$

Перейдём к единственности решения. Пусть функция $u(y)$ – решение задачи Коши. Из результата работы [6, лемма 1] следует, что $u(y)$ есть также решение следующего интегрального уравнения Вольтерры:

$$u(y)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{A_k y^{\alpha_k}}{\Gamma(1+\alpha_k)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^y (y-t)^{\alpha-1}t^s u(t)\,dt,\quad 0\leqslant y\leqslant l. \tag{4}$$

Из условий 1) и 2) задачи Коши следует интегрируемость функции $y^s u(y).$ Это означает, что интегральное уравнение (4) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Из утверждения теоремы следует, что общее решение уравнения (1) из класса $L_1[0,l],\ \ 0<$ $<l<+\infty,$ можно представить в виде (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
2. *Килбас А.А., Сайго М.* Решение в замкнутой форме одного класса линейных дифференциальных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 195–204.
3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
4. *Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus. New York; London, 1974.
5. *Wiener K.* On solutions of a differential equation of nonintegral order that occurs in the theory of polarography // Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle- Wittenberg Math.-Natur. Reiche. 1983. V. 32. № 1. P. 41–46.
6. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. № 1. С. 3–28.
7. *Богатырева Ф.Т.* Начальная задача для уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 5. С. 21–26.
8. *Псху А.В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб. 2011. Т. 202. № 4. С. 111–122.
9. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.

Наманганский инженерно-строительный институт,
Узбекистан,
Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз,
г. Ташкент

Поступила в редакцию 01.03.2023 г.
После доработки 21.09.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.